# GEOMETRÍA ANALÍTICA

## para ciencias e ingenierías

## ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE


Silvia **RAICHMAN** . Eduardo **TOTTER** . Daniel **VIDELA**
Liliana **COLLADO** . Florencia **CODINA** , Gabriel **MOLINA**
Adrián **CASCONE** . Gisela **FITT, Facundo CUERVO**



qellqasqa editorial

# Geometría Analítica

## para Ciencias e Ingenierías

# ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE

Mendoza, República Argentina
2023

Geometría analítica para ciencias e ingenierías : actividades para el aprendizaje / Silvia Raichman ... [et al.]. - 1a ed - Guaymallén : Qellqasqa, 2023.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-4026-82-8

1. Geometría Analítica. 2. Ingeniería. 3. Actividades Practicas. I. Raichman, Silvia
CDD 516

Qellqasqa considera que los estándares científicos y editoriales de esta obra son adecuados y suficientes para la publicación en su plataforma en línea:
www.qellqasqa.com

ISBN 978-987-4026-82–8

Mendoza, República Argentina.

# Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías
## *Actividades para el Aprendizaje*

Silvia Raquel RAICHMAN
Ingeniera Civil, Magister en Ingeniería Estructural, Especialista en Docencia Universitaria.
Profesora Titular de las asignaturas *Geometría Analítica* y *Matemáticas Avanzadas*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería. Facultad Ciencias Exactas y Naturales.
Profesora Titular de la asignatura *Cálculo Avanzado*, Departamento de Ingeniería Civil.
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Mendoza.

Eduardo TOTTER
Ingeniero Civil, Magister en Ingeniería Estructural.
Profesor Adjunto de las asignaturas *Geometría Analítica*, *Matemáticas Avanzadas* y *Construcciones Metálicas y de Madera*. Profesor a cargo de la asignatura *Diseño Estructural I*. Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería. Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Cálculo Avanzado*. Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Mendoza.

Daniel César VIDELA
Ingeniero Civil.
Profesor Adjunto de la asignatura *Geometría Analítica*. Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Construcciones y Montajes Industriales*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería.

Liliana Beatriz COLLADO
Profesora de Matemática, Física y Cosmografía.
Se ha desempeñado como docente en los niveles secundario, terciario, universitario y en el posgrado.

María Florencia CODINA
Ingeniera Industrial.
Jefe de Trabajos Prácticos de las asignaturas *Geometría Analítica* y *Cálculo I*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería. Facultad Ciencias Exactas y Naturales.

Gabriel Santiago MOLINA
Ingeniero Civil, Master en Ingeniería Mecánica y Civil.
Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Geometría Analítica*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería.

Adrián Ignacio CASCONE
Ingeniero Civil, Master en Geotecnia.
Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Geometría Analítica*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería.

Gisela Paola FITT
Profesora de Matemática, Especialista en Didáctica de la Matemática.
Jefe de Trabajos Prácticos de las asignaturas *Geometría Analítica* e *Introducción al Algebra Lineal*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería. Facultad Ciencias Exactas y Naturales.

Facundo Ezequiel CUERVO
Ingeniero Civil.
Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Geometría Analítica*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería.

# Prólogo

En la asignatura Geometría Analítica en *Facultad de Ingeniería* de la *Universidad Nacional de Cuyo*, se implementa un modelo pedagógico conformado por escenarios de interacción destinados a promover el desarrollo de habilidades asociadas al pensamiento complejo y capacidades que aportan a competencias genéricas del perfil profesional de carreras científico-tecnológicas. El trabajo con lugares geométricos en el plano y en el espacio exige el manejo apropiado y simultáneo de aspectos gráficos y analíticos que implican grandes desafíos para los estudiantes. Se plantea así el reto de abrir nuevas puertas al aprendizaje, que lo potencien y enriquezcan a partir de intervenciones educativas generadas con actividades y recursos didácticos especialmente diseñados para tal fin.

En este texto, complemento del texto *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*, se incluyen actividades para el aprendizaje a desarrollar en determinados escenarios del modelo pedagógico del espacio curricular. Se plantean problemas de aplicación que resulten de interés y que a la vez se encuentren en un nivel apropiado para el estudiante en el bloque de formación básica de su carrera.

En el primer Capítulo se realiza una descripción de la asignatura, que abarca su ubicación dentro de los planes de estudio de las carreras a las que pertenece, los objetivos y resultados de aprendizaje, los contenidos teórico-prácticos, así como también el modelo pedagógico. En el segundo Capítulo se presentan actividades destinadas al trabajo sincrónico en los escenarios de desarrollo de contenidos, tanto en las *Aulas Teórico-Prácticas* como en las *Aulas-Taller de Geometría Analítica*. En el Capítulo 3 se presentan las resoluciones completas, analíticas y gráficas, de las actividades del Capítulo previo. En el Capítulo 4, se indican actividades complementarias propuestas para que los estudiantes elaboren en horario extra-áulico, promoviendo de este modo un incremento del aprendizaje autónomo. En el Capítulo 5 se encuentran las respuestas a las actividades complementarias planteadas en el Capítulo anterior, incluyendo algunas resoluciones sintéticas y sólo en algunos casos especiales particularmente seleccionados, se presentan los desarrollos completos. El Capítulo 6 describe un trabajo integrador de contenidos que incluye las respuestas para su verificación por parte del lector. En el Capítulo 7, se detalla una de las actividades de articulación con otros espacios curriculares, elaborada específicamente para los escenarios de articulación de contenidos. Finalmente, se incluyen las referencias bibliográficas generales y las específicas asociadas al modelo pedagógico.

Existen dos apartados especialmente destinados a docentes de otras unidades académicas interesados en conocer el marco conceptual de la propuesta de trabajo: por un lado, la descripción del modelo pedagógico de Geometría Analítica incluida en el Capítulo 1, y por otro, las respectivas referencias bibliográficas indicadas en el Capítulo 8.

# *AL ESTUDIANTE*

## ¡Bienvenido al trabajo con la geometría analítica!

En este texto encontrarás el planteo de actividades destinadas a promover la comprensión profunda y la apropiación de conceptos de la Geometría Analítica del plano y del espacio, así como también a favorecer un acercamiento a situaciones de interés de tu carrera.

Te recomendamos fuertemente realizar una lectura comprensiva previa de los contenidos teóricos desarrollados en clase y en el texto de referencia, utilizando lápiz y papel para completar pasos, realizar esquemas o reafirmar conceptos, antes de intentar resolver los ejercicios. Es muy positivo además contar con una calculadora con pantalla para gráficas o un computador con algún paquete de representación gráfica, ya que el apropiado uso de estos elementos favorece los procesos comprensivos de los conceptos desarrollados en la resolución de un mayor número de casos y en situaciones más complicadas.

Si bien encontrarás apartados con las respuestas a todos los ejercicios aquí planteados, ya sean resoluciones sintéticas o completas de los mismos, te sugerimos resolver cada ejercicio en forma completa, realizar los gráficos en lápiz y papel y verificar la coherencia gráfico-analítica de tus desarrollos, antes de leer las respuestas.

Las siguientes recomendaciones te facilitarán el camino de resolución de problemas de geometría analítica del plano y del espacio:

- Lee cada enunciado detenidamente, extrayendo la información relevante para su resolución.

- Asigna nombres apropiados tanto a los datos como a las incógnitas.

- Realiza siempre una representación gráfica que facilite la interpretación del problema.

- Cuando hayas comprendido el problema y tengas definido un procedimiento de resolución, indica claramente todas las expresiones a utilizar.

- Una vez obtenidos los resultados, interpreta la solución obtenida y verifica la coherencia gráfica y analítica de los mismos.

- Intenta plantear otra vía de resolución del problema.

- Cuando sea posible, utiliza la aplicación de algún software de representación gráfica para orientarte al momento de dibujar y de interpretar tanto el problema como sus posibles caminos de resolución.

# ÍNDICE GENERAL

# 1. INTRODUCCIÓN.

## 1.1. SITUACIÓN CURRICULAR DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.

Los planes de estudio de las carreras de Ingeniería y de la Licenciatura en Ciencias de la Computación están organizados en base a una estructura que agrupa espacios curriculares en diferentes bloques de formación. En el bloque de *Ciencias Básicas* se encuentran las asignaturas básicas instrumentales, que son aquellas que abarcan los contenidos curriculares y los fundamentos necesarios para el desarrollo de las competencias lógico - matemáticas y científicas requeridas para abordar las disciplinas específicas de la carrera.

Dicho bloque tiene por objetivos, que el estudiante:

- Adquiera los prerrequisitos cognoscitivos, habilidades y actitudes necesarios para poder iniciar los estudios de las ciencias de la ingeniería y de la computación, con un nivel académico universitario de grado.
- Maneje algunos contenidos de iniciación en el área problemática de las ingenierías y de las ciencias de la computación.
- Resuelva problemas con iniciativa, autonomía y creatividad.

La sólida formación básica no sólo provee al estudiante de las herramientas necesarias para abordar otras disciplinas, sino que además le brinda al futuro egresado la capacidad de actualización permanente.

*Geometría Analítica* es una asignatura que pertenece al bloque de Ciencias Básicas. Se ubica en el primer semestre del primer año, en los planes de estudio de todas las carreras de Ingeniería y de la Licenciatura en Ciencias de la Computación, en Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo.

La *Geometría Analítica* permite hallar y estudiar los lugares geométricos del plano y del espacio de forma sistemática y general. Provee de métodos para transformar los problemas geométricos en problemas algebraicos, resolverlos analíticamente e interpretar geométricamente los resultados.

# 1.2. OBJETIVOS Y RESULTADOS DE APRENDIZAJE

## 1.2.1. Objetivos.

*Geometría Analítica* pertenece al área Matemática dentro del bloque de formación de ciencias básicas y como tal, contribuye a la formación lógico-deductiva del estudiante, a la vez que se promueve el desarrollo y la integración de conceptos, habilidades y actitudes necesarios para asignaturas de los restantes bloques de los planes de estudios y para la formación general del futuro profesional.

Se busca que el estudiante esté capacitado para: expresar, interpretar y manejar la geometría del entorno real que transformará mediante sus obras y proyectos; programar y utilizar aplicaciones informáticas que requieren de computación geométrica; y resolver problemas de la geometría analítica del plano y del espacio, necesarios para su formación básica y para abordar temas específicos de los restantes bloques de formación.

Así mismo, se desarrollan capacidades que aportan a competencias genéricas del futuro egresado:

- En la formación lógico-deductiva: comprender conceptos y principios y fundamentar con profundidad y rigurosidad.
- En la resolución de problemas de la ingeniería y de ciencias de la computación: comprender, aplicar y transferir el conocimiento en ciencias básicas a situaciones problemas concretas.
- En las habilidades que estimulen la capacidad de análisis, de síntesis y espíritu crítico, que despierten su vocación creativa y entrenen para el trabajo en equipo y la valoración de alternativas.
- En las habilidades para la comunicación oral y escrita.

Siendo que el futuro egresado se desenvolverá en un medio en constante evolución es importante estimular la creatividad, la curiosidad, la objetividad y la flexibilidad, así como también, asegurar la formación de profesionales con capacidad conceptual dinámica, sosteniendo una actitud permanente de actualización de conocimientos y asegurando el aprendizaje con rigor científico.

### 1.2.2. Resultados de aprendizaje.

Al finalizar el curso de Geometría Analítica el estudiante:

- *Construye* e *interpreta* modelos matemáticos de lugares geométricos del plano y del espacio mediante la aplicación de procedimientos analíticos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones vinculadas a la práctica profesional.

- *Formula* y *resuelve* problemas geométricos en el plano y en el espacio, a partir de la identificación de los datos explícitos e implícitos, la representación de los mismos, la identificación de ecuaciones apropiadas para modelar los lugares geométricos involucrados y el establecimiento de relaciones, utilizando software de representación gráfica para orientarse al momento de representar e interpretar tanto el problema como sus posibles caminos de resolución, aplicando diferentes estrategias e integrando contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales.

- *Argumenta, analiza* e *interpreta* resultados obtenidos de problemas geométricos en el plano y en el espacio, mediante el lenguaje verbal, variados registros de representación y el uso de software y/o aplicaciones computacionales interactivas para la visualización, el análisis y la exploración, considerando la coherencia gráfico analítica y evidenciando comprensión.

- *Comunica* con precisión y claridad, reflexiva y críticamente, en forma oral y escrita, tanto la fundamentación y el procedimiento de resolución de problemas geométricos en el plano y en el espacio, como el análisis e interpretación de los resultados, contrastando los mismos con modelos establecidos o situaciones reales.

## 1.3. CONTENIDOS TEÓRICO-PRÁCTICOS

La asignatura está estructurada en 6 unidades didácticas. Se detallan a continuación los contenidos incluidos en las mismas, para los programas correspondientes a las carreras de Ingeniería Civil, Ingeniería Industrial, Ingeniería de Petróleos, Ingeniería en Mecatrónica y la Licenciatura en Ciencias de la Computación, en Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo. Los contenidos que se desarrollan en el espacio curricular cumplen con los requerimientos de los planes de estudio en vigencia de las carreras mencionadas.

Unidad didáctica 1: Vectores. Álgebra vectorial: Vectores. Adición de vectores. Propiedades. Multiplicación de un vector por un escalar. Propiedades. Espacios vectoriales reales. Definición. Ejemplos. Propiedades. Combinación Lineal. Dependencia e independencia lineal. Conjunto generador. Base. Dimensión. Coordenadas de un vector respecto de una base dada. Módulo o norma de un vector. Vector unitario. Cosenos directores de un vector. Producto escalar. Propiedades. Ángulo entre dos vectores. Condición de ortogonalidad. Proyección ortogonal de un vector sobre un eje. Producto vectorial. Propiedades. Producto mixto. Propiedades. Bases ortonormales. Aplicaciones con software. Aplicaciones en Ciencias e Ingenierías.

Unidad didáctica 2: Planos y Rectas: Planos. Distintas formas de la ecuación de un plano. Distancia de un punto a un plano. Posiciones relativas de dos planos. Ángulo entre dos planos. Familias de planos. Familias de planos que pasan por la intersección de dos planos dados. Rectas en el plano y en el espacio. Distintas formas de la ecuación de la recta. Posiciones relativas de dos rectas. Distancia de un punto a una recta. Distancia entre dos rectas. Ángulo entre dos rectas. Ángulo entre recta y plano. Familias de rectas. Familias de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas. Aplicaciones con software. Aplicaciones en Ciencias e Ingenierías.

Unidad didáctica 3. Cónicas: Definición general de cónica. Circunferencia. Ecuaciones paramétrica, vectorial y cartesiana de la circunferencia. Traslación de los ejes coordenados. Ecuación general de la circunferencia. Familias de circunferencias. Parábola, elipse e hipérbola: ecuaciones vectoriales, cartesianas, paramétricas. Familias de parábolas, de elipses y de hipérbolas. Traslación de ejes coordenados. Ecuaciones generales. Posiciones relativas entre una recta y una cónica. Ecuación de la recta tangente a una cónica por un punto perteneciente a la misma y por un punto exterior. Propiedades y aplicaciones de las cónicas. Aplicaciones con software. Aplicaciones en Ciencias e Ingenierías.

Unidad didáctica 4. Superficies: Superficie esférica. Plano tangente a una esfera. Superficies cilíndricas. Superficies cónicas. Superficies regladas. Superficies de revolución. Superficies cuádricas con y sin centro. Elipsoide. Hiperboloide de una hoja.

Hiperboloide de dos hojas. Paraboloide elíptico. Paraboloide hiperbólico. Aplicaciones con software. Aplicaciones en Ciencias e Ingenierías.

Unidad didáctica 5. Lugares Geométricos en Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas: Sistema de coordenadas polares. Relaciones entre coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas polares. Ecuaciones polares de rectas y circunferencias. Ecuaciones polares de las cónicas. Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares. Otras curvas: espirales, lemniscatas, caracoles, rosas. Coordenadas cilíndricas. Relaciones entre coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas cilíndricas. Coordenadas esféricas. Relaciones entre coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas esféricas. Ecuaciones de superficies en coordenadas cilíndricas y esféricas. Aplicaciones con software. Aplicaciones en Ciencias e Ingenierías.

Unidad didáctica 6. Rotaciones y traslaciones en el plano y en el espacio: Ecuación general de segundo grado en 2 variables: forma matricial; forma cuadrática asociada; rotación de los ejes coordenados; teorema de los ejes principales. Identificación de secciones cónicas. Ecuación general de segundo grado en 3 variables: forma matricial; forma cuadrática asociada; rotación de los ejes coordenados; teorema de los ejes principales. Identificación de superficies cuádricas. Aplicaciones con software. Aplicaciones en Ciencias e Ingenierías.

## 1.4. MODELO PEDAGÓGICO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.

En la asignatura Geometría Analítica en Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo, se implementa un modelo pedagógico constituido por diferentes *escenarios de interacción* [*Raichman y Mirasso*, 2018], tales que a partir de una equilibrada y coherente articulación de *actividades significativas de aprendizaje* [*Molina y Prieto Castillo*, 1997] definidas en cada uno de ellos, favorezca en los estudiantes la apropiación de conceptos y procedimientos propios de la geometría analítica plana y espacial, así como también el desarrollo de capacidades asociadas a *competencias genéricas* del perfil profesional [*CONFEDI*, 2018].

### 1.4.1. Escenarios de desarrollo de contenidos en Geometría Analítica

Los escenarios de desarrollo de contenidos están constituidos por el Aula Teórico-Práctica y el Aula Taller [*Raichman y Totter*, 2008; *Raichman y Totter*, 2010]. El eje del trabajo en el aula Teórico-Práctica lo constituye el desarrollo de contenidos conceptuales y procedimentales en clases participativas e interactivas, en el marco de la *enseñanza para la comprensión* [*Perkins*, 1999]. Las demostraciones y resolución de problemas se elaboran en conjunto entre el docente y los estudiantes, en base a variados registros de representación y un trabajo de preguntas y respuestas, alternando con variadas actividades bajo el enfoque del *aprendizaje activo* [*Felder y Brent*, 2003].

Por otra parte, el Aula-Taller, constituye un escenario alternativo de interacción, donde se genera un modelo de trabajo en equipos desde la perspectiva del *aprendizaje colaborativo* [*Felder y Brent*, 2007], potenciando la comprensión profunda, la integración y la aplicación de contenidos y la transferencia de los mismos a situaciones que los acerquen a problemas reales. En cada grupo de Aula - Taller los estudiantes trabajan divididos en equipos de 4 a 6 integrantes, resolviendo los problemas indicados por el docente, quien realiza el seguimiento permanente de los avances logrados [*Raichman y Totter*, 2008]. Los problemas son seleccionados a partir de una guía de trabajos prácticos específicamente elaborada para este escenario de aprendizaje. En algunos casos la sesión de Aula-Taller se inicia con una actividad de recuperación de saberes previos, en la que se entrega a los estudiantes un cuestionario de rápida resolución.

Se estimula a los estudiantes a realizar inferencias, generar hipótesis, formular preguntas, organizar ideas para luego explicarlas y justificarlas a los otros. Se promueve la comunicación oral a través de la exposición del desarrollo de la solución obtenida por parte de los representantes de cada equipo. Se alienta un trabajo de interacción y de discusión de diferentes caminos de solución del problema, no sólo hacia el interior de cada equipo, sino también entre los expositores y el resto de los estudiantes. Las exposiciones finalizan con las palabras del docente, quien señala aspectos relevantes de cada uno de los problemas resueltos y atiende inquietudes que puedan surgir. El debate moderado por el docente promueve la discusión de distintas vías de solución del problema, en un ambiente de trabajo ameno, con un alto nivel de compromiso y pertenencia [*Raichman, et.al.*, 2014]. El estudiante, partícipe activo del proceso, se apropia del espacio en el cual es escuchado y respetado. Se genera así una comunidad de aprendizaje, con una cultura de trabajo propia y específica de cada Aula - Taller.

Teniendo en cuenta que la selección de un material de estudio apropiado entre variados textos con lenguajes simbólicos y enfoques diferentes es una tarea para la cual el estudiante recién ingresante, en general no está aún preparado para realizar, el texto de cátedra es un valioso y necesario recurso para los escenarios de desarrollo de contenidos [*Raichman y Totter,* 2016]. Las guías de actividades incluidas en este texto, referidas a ejercicios y problemas a resolver en el Aula Teórico-Práctica y en el Aula-Taller, así como también los ejercicios complementarios, constituyen otro recurso importante en estos escenarios. Se plantean problemas de aplicación que resulten de interés y que a la vez se encuentren en un nivel apropiado para el estudiante del primer semestre de primer año.

### 1.4.2. Escenarios de tutorías en Geometría Analítica.

En la modalidad de trabajo de Aula - Taller de Geometría Analítica es posible incorporar las tutorías de pares. El rol asignado a los ayudantes alumnos es el de acompañar a los estudiantes en la apropiación de conceptos y procedimientos. En dicha tarea, es importante que sea acompañado por el docente a cargo del Aula-Taller en su compromiso de guiar en la construcción reflexiva del conocimiento, planteando preguntas y estableciendo relaciones, que favorezcan la integración del nuevo conocimiento con los saberes previos. Se busca la reflexión individual del estudiante sobre el conocimiento y que la interacción con sus iguales promueva la profundización de saberes, la confrontación de percepciones y distintas vías de solución del problema planteado [*Raichman, et.al.*, 2017].

### 1.4.3. Escenario virtual de aprendizaje en Geometría Analítica

Los escenarios virtuales de aprendizaje implican el diseño e implementación de actividades con materiales de educación a distancia mediados pedagógicamente [*Ozollo* y *Orlando,* 2006]. Las plataformas educativas virtuales constituyen tanto una tecnología transmisiva como colaborativa e interactiva, con una gran variedad de recursos disponibles, que brindan además a los docentes la posibilidad de realizar seguimiento de numerosos indicadores [*Raichman, et. al.,* 2013]. Las intencionalidades educativas específicas de estos escenarios en carreras de Ingeniería son [*Totter* y *Raichman*, 2009]:

guiar a los estudiantes en las actividades extra-áulicas; favorecer los procesos comprensivos de conceptos complejos, poniendo a disposición de los estudiantes recursos y actividades para tal fin; promover el desarrollo de habilidades tecnológicas y comunicativas; promover la autonomía en el aprendizaje.

Se dispone de un Espacio Virtual de Geometría Analítica dentro del Aula Abierta de Facultad de Ingeniería, en el que se encuentran recursos y actividades diseñadas específicamente, a los efectos de favorecer los procesos comprensivos y reflexivos de los estudiantes. Para cada semana se ponen a disposición de los alumnos recursos específicos mediados pedagógicamente, de acuerdo a los contenidos a abordar. En primer lugar, una Guía de Estudio y Actividades para ordenar los pasos a seguir, con indicaciones detalladas de lecturas en el texto *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías* y actividades incluidas en el presente texto y en el texto *Geometría Dinámica para Ciencias e Ingenierías.* Se promueve de este modo el trabajo autónomo y autorregulado de los estudiantes en las actividades asincrónicas a partir de las Guías de Estudio y Actividades, con la apropiada guía y acompañamiento docente en las actividades sincrónicas y en los horarios de consultas.

### 1.4.4. Escenarios de exploración y experimentación en Geometría Analítica.

Los escenarios de experimentación y exploración se incluyen en actividades sincrónicas dentro de los escenarios de desarrollo de contenidos y en actividades asincrónicas en el escenario virtual de aprendizaje implementado en el Aula Abierta de Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo. Los recursos didácticos para la exploración y la experimentación se refieren tanto a las aplicaciones informáticas interactivas [*Raichman y Totter*, 2017] que permiten al estudiante explorar libremente y trabajar según sus propios ritmos de estudio, como a los dispositivos experimentales [*Raichman, et.al.*, 2018]. En el caso de estos últimos, se busca, mediante la manipulación, observación y exploración sobre objetos concretos, favorecer la apropiación de modelos matemáticos de los lugares geométricos en estudio. Las actividades diseñadas con estos recursos están destinadas a potenciar la comprensión y resolución de problemas en el espacio tridimensional. Los resultados se refieren a los cambios en las producciones gráficas de los estudiantes, en las asociaciones entre las representaciones gráficas y las expresiones analíticas de los lugares geométricos y en la resolución de problemas que los involucran.

### 1.4.5. Escenarios de articulación en Geometría Analítica.

Se realizan actividades de articulación con otras asignaturas: Análisis Matemático I, Cálculo Numérico y Computación, Análisis Matemático II, Estabilidad II e Introducción a la Programación [*Raichman y Pacini,* 2017]. Los recursos didácticos se refieren a las guías de trabajo específicas en las que se plantean a los estudiantes las actividades a realizar en el marco de la articulación definida, o bien a los ejercicios acordados entre los responsables de las asignaturas y que son incluidos en las guías de trabajos prácticos. La generación de escenarios de articulación promueve el trabajo en equipo de docentes de diferentes espacios curriculares para el diseño e implementación de una innovación educativa compartida, diversificando los contextos de aprendizaje de un mismo conocimiento e incrementando así las vías para su recuperación.

### 1.4.6. Escenarios de integración de contenidos en Geometría Analítica.

A partir de la resolución de un problema integrador seleccionado se busca que los estudiantes: planifiquen y desarrollen estrategias para la resolución de problemas geométricos a partir de la identificación de los datos, la representación de los mismos y el establecimiento de relaciones, integrando los conocimientos adquiridos en una situación concreta; analicen e interpreten resultados; sean metódicos en la exposición y en el registro de la información; se comuniquen con precisión y claridad en forma oral y escrita.

En los diferentes escenarios se integran además, actividades y recursos destinados a promover la autonomía en el aprendizaje y la metacognición [*Raichman y Mirasso*, 2018].

# 2. ACTIVIDADES

## 2.1. ESPACIOS VECTORIALES.

1. Dado el conjunto $V = \{(x, y) \ / \ x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}\}$, espacio vectorial respecto de las operaciones definidas como:

Suma: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$ ; Producto por un escalar: $k(x, y) = (kx , ky)$

a) Escriba al vector $\boldsymbol{w} = (1.5, 0.5)$ como *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{u} = (1, 1)$ y $\boldsymbol{v} = (-1, 1)$. Represente gráficamente y valide su respuesta con el *Recurso Geométrico Interactivo RGI - Combinación Lineal* del Capítulo 1 de *Espacios Vectoriales* en el *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

b) Escriba al vector $\boldsymbol{w}$ como *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{u} = (1, 1)$ y $\boldsymbol{r} = (-2, -2)$. Valide su respuesta con el *Recurso Geométrico Interactivo RGI - Combinación Lineal* del Capítulo 1 de *Espacios Vectoriales* en el *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

c) Obtenga el vector $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$, siendo: $\boldsymbol{c} = 3\,\boldsymbol{u} + 2\,\boldsymbol{v}$.

d) Determine el conjunto que *genera* $B_1 = \{\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}\}$. Justifique su respuesta.

e) Determine el conjunto que *genera* $B_2 = \{\boldsymbol{u}; \boldsymbol{r}\}$ Justifique su respuesta.

f) Indique, justificando su respuesta, si el conjunto $B_1$ es conjunto *linealmente dependiente* (LD) o conjunto *linealmente independiente* (LI).

g) Indique, justificando su respuesta, si el conjunto $B_2$ es conjunto LD o conjunto LI.

h) Justifique si los conjuntos $B_1$ y $B_2$ son *base* de $V$.

i) ¿Cuál es la dimensión de cada uno de los espacios generados por los conjuntos $B_1$ y $B_2$? ¿Por qué?

2. Dados los siguientes vectores: $\boldsymbol{a} = (-8, 4)$; $\boldsymbol{b} = (2, -2)$; $\boldsymbol{c} = (-1, 0)$

a) Indique, justificando su respuesta, si el conjunto $\{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}\}$ es conjunto linealmente dependiente o conjunto linealmente independiente.

b) Elija un conjunto de vectores que resulte *base* de $\mathbb{R}^2$. Justifique su respuesta.

c) Escriba al vector $\boldsymbol{a}$ como *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Represente gráficamente.

d) Determine gráfica y analíticamente las *coordenadas* del vector $\boldsymbol{a}$ en la base $B_3 = \{\boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}\}$, es decir $(\boldsymbol{a})_{B3}$

e) Relacione las respuestas obtenidas en c) y en d).

3. Dado el conjunto $A = \{(1, 3, 1); (0, 2, -1); (0, 0, 5)\}$

a) Determine si el conjunto $A$ es base de $\mathbb{R}^3$. Justifique su respuesta.

a) Halle las coordenadas del vector $\boldsymbol{v} = (2, 0, 1)$ en dicha base.

b) Indique, justificando su respuesta, si el conjunto
{(1, 3, 1); (0, 2, -1); (0, 0, 5); (2, 0, 1)} es conjunto LD o conjunto LI.

**4**. Indique justificando su respuesta cuáles de los siguientes conjuntos de vectores, constituyen una Base de $\mathbb{R}^2$:

a) {(-3, 2, 0), (1, 0, -1)} ; b) { (2, 2), (4, 4) };
c) {(2, 1), (-1, 3), (0, 3)} ; d) { (1, -2), (0, 5) }

**5**. Dado el conjunto $V = \{(x, y, z) \ / \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$, espacio vectorial respecto de las operaciones definidas como:

Suma: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ ;

Producto por un escalar: $k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$

a) Indique la *base canónica* del mismo.

b) Obtenga un vector $\boldsymbol{w}$ tal que $\boldsymbol{w} = 5\boldsymbol{v}$ , siendo $\boldsymbol{v} = (-1, 3, 2)$

c) Explique por qué el conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}; \boldsymbol{w}; \boldsymbol{a}\}$ no es base del espacio, cualquiera que sea el vector $\boldsymbol{a}$.

d) Indique una base del espacio vectorial que no sea la base canónica. Justifique su respuesta.

e) Encuentre las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ y de $\boldsymbol{w}$ en la base del inciso (d).

**6**. Dado el conjunto $S = \{(x, y) \ / \ y = 4x \ ; x \in \mathbb{R}\}$

a) Verifique que es un *subespacio vectorial* de $\mathbb{R}^2$. Interprete geométricamente.

b) Justifique porqué el conjunto $B = \{(1, 4)\}$ es conjunto generador de $S$.

c) ¿Cuál es la dimensión de $S$? ¿Por qué?

d) Dado el conjunto $D = \{(x, y) \ / \ y = 4x + 3 \ ; x \in \mathbb{R}\}$, indique si es o no un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Justifique su respuesta. Interprete geométricamente.

**7**. Indique justificando su respuesta cuáles de los siguientes conjuntos de vectores, constituyen una Base de $\mathbb{R}^3$:

a) {(2, -1, 0); (-1, 0, 4)}

b) {(2, 1); (-3, 0); (3, -2)}

c) {(2, 3, -2); (0, 0, 0); (2, -4, 8)}

d) {(4, 0, 0); (1, -3, 0); (-2, 6, 5)}

**8**. Indique los conjuntos generados por cada uno de los siguientes conjuntos de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$:

a) $\{\boldsymbol{u}\}$ ; b) $\{\boldsymbol{u} ; \boldsymbol{v}\}$ ; c) $\{\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v} ; \boldsymbol{w}\}$

9. En un sistema coordenado $xy$, realice el siguiente procedimiento:

a) Ubique el punto inicial A(-2, 1), a partir del cual grafique el vector $\boldsymbol{w}$= (0, 2.5).

b) Ubique el punto C(2, 2), punto inicial de los vectores $\boldsymbol{v_1}$= (2, 1.5) y $\boldsymbol{v_2}$= (-0.5, 1).

c) Por el punto A trace una línea paralela a la dirección dada por el vector $\boldsymbol{v_1}$.

d) Por el punto extremo final del vector $\boldsymbol{w}$ trace una línea paralela a la dirección dada por el vector $\boldsymbol{v_2}$.

e) Determine gráficamente los escalares $k_1$ y $k_2$ que permiten escribir al vector $\boldsymbol{w}$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$. Compare con la solución analítica.

f) Indique, justificando su respuesta, si modificando las coordenadas de A y/o C se modifica su respuesta.

g) Indique, justificando su respuesta, si el conjunto $\{\boldsymbol{v_1} ; \boldsymbol{v_2}\}$ genera a $\mathbb{R}^2$.

h) Justifique que el conjunto B=$\{\boldsymbol{v_1} ; \boldsymbol{v_2}\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ y determine las coordenadas de $\boldsymbol{w}$ en dicha base.

i) Indique las coordenadas del vector $\boldsymbol{u}$ sabiendo que $(\boldsymbol{u})_B$=(-2,3).

j) Utilice el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Combinación Lineal* para verificar las respuestas (a) a (e) y el *RGI-Cambio de base* para verificar la respuesta. [*Libro Interactivo Geometría Dinámica*].

## 2.2. VECTORES GEOMÉTRICOS PRODUCTO ESCALAR.

10. Sea $\boldsymbol{v}$ un vector de $\mathbb{R}^3$:

a) Determine cos $\alpha$ , si cos $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y cos $\gamma = \frac{1}{2}$

b) Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que el vector $\boldsymbol{u}$ = $(4, 4\sqrt{2}, 4)$. Compare con la respuesta del inciso (a).

c) Encuentre las componentes del vector $\boldsymbol{w}$, si $\|\boldsymbol{w}\|$= 4 y su versor es el vector $\boldsymbol{v}$ del inciso (a).

11. Dados los vectores $\boldsymbol{a}$ = (4, 3), $\boldsymbol{b}$ = (–2, 6) y $\boldsymbol{c}$ = ($x$, $y$).

a) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\boldsymbol{c}$ si es $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ = 15 y además el vector $\boldsymbol{c}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{b}$?

b) Represente gráficamente y verifique su respuesta.

c) Indique, justificando su respuesta, si cada uno de los siguientes conjuntos es LD o LI:

c.i) $\{\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}\}$ ; c.ii) $\{\boldsymbol{b} ; \boldsymbol{c}\}$ ; c.iii) $\{\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b} ; \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\}$ ; c.iv) $\{\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b} ; \boldsymbol{c}\}$

**12**. Dos cuerdas, AB y CB, sujetan un cable vertical en B (3,3) que soporta un objeto. Las cuerdas están fijas en los puntos A (0,6) y C (7,7). Las distancias están medidas en metros. En el punto B actúa una fuerza vertical hacia abajo de 4 kN.

a) Represente gráficamente e indique las componentes de los vectores $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{CB}$, y $\boldsymbol{F}$.

b) Determine las longitudes de ambas cuerdas.

c) Evalúe el vector proyección del vector fuerza $\boldsymbol{F}$ en la dirección de cada una de las dos cuerdas.

**13**. Dados los vectores $\boldsymbol{a}$ = (4, –1, –4) y $\boldsymbol{b}$=(1, 1, 2) :

a) Halle la *proyección ortogonal* del vector $\boldsymbol{a}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{b}$.

b) Determine el *vector proyección* de $\boldsymbol{a}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{b}$.

**14**. Dados los vectores $\boldsymbol{u}$=(3/5, 4/5) y $\boldsymbol{v}$=(4/5, -3/5),

a) Evalúe el ángulo que ellos forman.

b) Calcule *la proyección* del vector $\boldsymbol{w}$ = (3,9) en la dirección del vector $\boldsymbol{u}$ y *la proyección* de $\boldsymbol{w}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{v}$.

c) Indique, justificando su respuesta, si $\{\boldsymbol{u} ; \boldsymbol{v}\}$ es o no una base ortonormal (BON) de $\mathbb{R}^2$.

d) Determine gráfica y analíticamente las coordenadas del vector $\boldsymbol{w}$ = (3,9) en la base definida por los siguientes vectores: $B = \{\boldsymbol{u} ; \boldsymbol{v}\}$

e) Compare los valores obtenidos en (b) y (d). ¿Qué conclusiones obtiene?

f) Represente gráficamente todos los vectores y verifique sus respuestas analíticas.

**15**. Sean los vectores $\boldsymbol{a}$=(1,–1, 2) y $\boldsymbol{b}$=(2, 1, -1) :

a) Encuentre un vector $\boldsymbol{c}$, no nulo, que sea *combinación lineal* de $\boldsymbol{a}$ y de $\boldsymbol{b}$ y perpendicular al vector $\boldsymbol{a}$. ¿Es único dicho vector $\boldsymbol{c}$? Interprete geométricamente.

b) Encuentre un *vector unitario* o versor en la dirección del vector $\boldsymbol{a}$.

c) Indique, justificando su respuesta, si cada uno de los siguientes conjuntos es LD o LI e identifique el *espacio generado* por cada uno de ellos:

c.i) $\{\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b} ; \boldsymbol{c}\}$ ; c.ii) $\{\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}\}$; c.iii) $\{\boldsymbol{a}\}$

**16**. Demuestre que el vector proyección $\boldsymbol{w}$ de un vector dado $\boldsymbol{u}$ sobre la dirección de otro vector dado $\boldsymbol{v}$ no nulo, está dado por: $\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$

**17**. Dados los vectores $\boldsymbol{a}$=(1,2), $\boldsymbol{b}$=(0,-2) y $\boldsymbol{w}$=(-4,2) :

a) Determine el *vector proyección* del vector $\boldsymbol{w}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

b) Represente gráficamente todos los vectores del inciso anterior y verifique su respuesta analítica.

c) Verifique su respuesta empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Proyección*, en el [*Libro Interactivo Geometría Dinámica*]. En dicho Recurso se designa componente de $\boldsymbol{w}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{v}$, al valor de $k$ tal que:

$\mathbf{Proy}\ \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{m} = k\ \boldsymbol{v}$ . Es decir , $k = \frac{\boldsymbol{w}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$

d) Indique, justificando su respuesta, si cada uno de los siguientes conjuntos es LD o LI e identifique el *espacio generado* por cada uno de ellos:

d.i) $\{ \boldsymbol{a} , \boldsymbol{b} , 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \}$ ; d.ii) $\{\boldsymbol{w} , \boldsymbol{v}\}$ ; d.iii) $\{\boldsymbol{w} , \boldsymbol{b}\}$ ; d.iv) $\{ \overline{\mathrm{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{w}} ; \mathbf{v} \}$

18. La columna de una antena de 5m de altura está colocada sobre el eje $z$. Está sostenida por tres tensores que parten del extremo superior y se dirigen a los puntos $P_1$ (–5, –5, 0) m, $P_2$ (0, 5, 0) m y $P_3$ (10, –5, 0) m. Los tensores ejercen sobre la columna una fuerza de 750 N, vertical hacia abajo.

a) Demuestre que los tensores son mutuamente perpendiculares.

b) Indique una *base ortonormal* de $\mathbb{R}^3$ cuyos vectores tengan las direcciones de los tres tensores.

c) Determine la proyección del vector fuerza $\boldsymbol{F}$ en la dirección de cada uno de los tres tensores.

d) Verifique que se cumple el Teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^3$ para las componentes ortogonales del vector $\boldsymbol{F}$ en las direcciones de los tensores.

## 2.3. PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO MIXTO.

19. El vector momento de una fuerza $\boldsymbol{f}$ se define como $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{OP} \wedge \boldsymbol{f}$, siendo $\boldsymbol{OP}$ el vector posición del punto de aplicación de la fuerza.

a) Encuentre el vector momento de la fuerza $\boldsymbol{f}$ = (20, 40, 30) N, aplicada en el punto de coordenadas P (3, 1, 3) m.

b) Verifique que el vector momento es perpendicular tanto al vector $\boldsymbol{f}$ como al vector $\boldsymbol{OP}$.

20. Dados dos vectores cualesquiera $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$:

a) Encuentre una expresión que permita calcular el área del paralelogramo que tiene a los vectores como lados. Justifique la respuesta.

b) Dados los vértices P (1, -2, 3), Q (2, 2, 1) y R (0, 4, -1) del paralelogramo *PQRS*, determine coordenadas para el vértice S y calcule el área de dicho paralelogramo.

21. El producto vectorial entre dos vectores puede reiterarse multiplicando vectorialmente por otro vector. Esta operación se llama *doble producto vectorial*.

a) Resuelva el siguiente producto doble vectorial y verifique que el vector que resulta es perpendicular al vector $\boldsymbol{a}$ y al vector $(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$:

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$, siendo $\boldsymbol{a} = -2\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{c} = 2\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j}$.

b) Indique, justificando su respuesta, si cada uno de los siguientes conjuntos es LD o LI:

b.i) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ ; b.ii) $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}\}$ ; b.iii) $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})\}$

**22**. Dados tres vectores cualesquiera $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$

a) Demuestre la forma de calcular el volumen del paralelepípedo que tiene a los tres vectores como aristas concurrentes.

b) Dados los puntos A (0, 1, 1), B (–2, 1, 1), C (4, 1, 0) y D (3, 5, 2), calcule el volumen del prisma de base triangular de aristas $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AD}$.

**23**. Se quiere realizar una excavación en el área definida por los puntos A (0,2,1), B(0,8,0), C(3,6,0) y D(3,0,1), de 4 metros de profundidad medidos desde el punto B (o C).

a) Represente gráficamente y determine las coordenadas de los puntos que definen la zona de excavación.

b) Evalúe el volumen de tierra a extraer.

**24**. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (4, -2, 3)$ y $\boldsymbol{b} = (2, 0, -1)$:

a) Calcule el vector $\boldsymbol{w}$ resultado del producto vectorial entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

b) Compruebe que el vector $\boldsymbol{w}$ es perpendicular a cada uno de los vectores dados.

c) Identifique el espacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos de vectores:

c.i) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ ; c.ii) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\}$

**25**. Para los vectores dados: $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (3, 1, 0)$ y $\boldsymbol{c} = (1, 3, 0)$,

a) Verifique la siguiente identidad: $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$

b) Interprete geométricamente la identidad dada en el inciso anterior e indique, justificando su respuesta, si el conjunto $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})\}$ es base de $\mathbb{R}^3$

**26**. Una fuerza puede trasladarse sobre su recta de acción. Teniendo en cuenta ello, demuestre que el vector momento de una fuerza no depende del punto de aplicación de la misma.

**27**. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (1,2,3)$, $\boldsymbol{b} = (3,-2,1)$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} - 6\,\boldsymbol{k}$

a) Determine el vector $\boldsymbol{v}$, sabiendo que $\boldsymbol{v}$ es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, y satisface además la condición $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{c} = 40$

b) Indique, justificando su respuesta, si los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{v}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

**28**. Sean los vectores $\boldsymbol{a}$ = (2, 3, 5), $\boldsymbol{b}$ = (2, 3, 2) y $\boldsymbol{c}$ = (– 4, α, –10).

a) Halle el valor de α de modo que el producto mixto de los vectores dados sea nulo.

b) Indique, justificando su respuesta, si los vectores $\boldsymbol{a}$ , $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

**29**. Dados los puntos A(9,0,0), B(0,9,0), C(0,0,9) y D(0,0,0):

a) Calcule el volumen del tetraedro $ABCD$.

b) Represente gráficamente.

**30**. La Figura muestra una estructura de acero definida por los puntos: A(4, 0, 10)m; B(0, 0, 10)m; C(4, 0, 5)m; D(0, 0, 5)m; E(4, 0, 0)m; F(0, 0, 0) y H(2, 3, 0)m. Sobre la misma se encuentran aplicadas dos fuerzas $\mathbf{P}$ en la dirección y sentidos indicados, cuyo módulo es de 1000N. A partir de la utilización de operaciones exclusivamente vectoriales resuelva los siguientes incisos:

a) Encuentre la superficie del panel ABFE.

b) Encuentre el vector proyección ortogonal de una fuerza $\mathbf{P}$ sobre el puntal HC.

c) Halle el ángulo comprendido entre los puntales HC y HD

d) Halle el volumen del espacio comprendido entre los puntos C, D, F, E y H

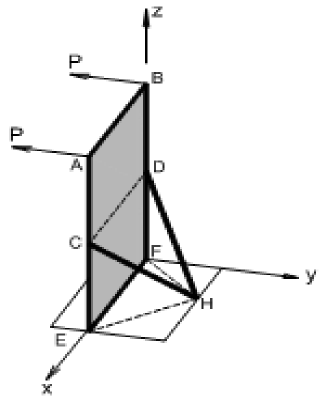



*Figura* 2.1. Estructura del Ejercicio 30.

## 2.4. PLANOS

**31**. Un plano pasa por los puntos A(–1, 1, 0), B(2, –3, 4) y C(–3, 1, 1).

a) Encuentre las distintas formas de su ecuación: general, normal, segmentaria, vectorial paramétrica y cartesianas paramétricas.

b) Escriba las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos y represente gráficamente: plano paralelo al plano $yz$ que pasa por el punto B; plano paralelo al plano $xy$ que pasa por el punto C.

**32**. Dados los planos:

$\pi_1$: $2x - y + z - 3 = 0$

$\pi_2$: $x - 2z + 6 = 0$

$\pi_3$: $(x, y, z) = (3,0,1) + t(2,0,-4) + k(2,5,1,)$ $\quad\quad t, k \in \mathbb{R}$

a) Indique, justificando su respuesta, dos de los planos dados que sean paralelos.

b) Indique, justificando su respuesta, dos de los planos dados que sean perpendiculares.

c) Determine la intersección del plano $\pi_1$ con los planos coordenados ($trazas$).

d) Represente gráficamente y verifique todas sus respuestas.

**33**. Dada la ecuación del plano $\pi_1$: [**OP** – (2, -1, 5)].(-3, 0, 1)=0

a) Determine la ecuación de un plano $\pi_2$, paralelo a $\pi_1$ que pase por el punto Q (9,0,1). ¿Es único?

b) Determine la ecuación de un plano $\pi_3$, perpendicular a $\pi_1$ que pase por el punto R(2,7,0). ¿Es único?

**34**. Dados los planos:

$\pi_1$: $2x - y + z + 1 = 0$

$\pi_2$: $x + 2y - z - 4 = 0$

a) Usando el concepto de familia de planos, encuentre la ecuación del plano $\pi_3$ que pasa por la intersección de los planos dados y por el punto Q (–1, 1, 1).

b) Determine el ángulo que forman los dos planos dados.

c) Halle la ecuación del plano $\pi_4$ normal a los dos planos dados y que pasa por el punto Q. Encuentre el punto de intersección entre estos tres planos.

**35**. Dado el plano ***OP*** = (3, 2, 4) + μ (2, 4, 2) + β (6, 4, 8) $\quad\quad \mu, \beta \in \mathbb{R}$

a) Indique las coordenadas de dos puntos del plano dado.

b) Calcule la distancia desde el punto A (1, 3, 3) al plano dado.

c) Encuentre las ecuaciones de los planos que disten 3 unidades del plano dado.

**36**. Determine si los puntos A (1, 2, 3), B (0, 1, 0), C (0, 0, 1) y D (0, 1, 1) pertenecen a un mismo plano. Justifique su respuesta.

**37**. Dado el plano de ecuación $\pi$: $5x + 5y + z - 5 = 0$:

a) Calcule el ángulo que forma el mismo con el plano $xy$;

b) Calcule el volumen del tetraedro determinado por el plano $\pi$ y los planos coordenados. Represente gráficamente.

c) Calcule la distancia desde el punto Q (5,3,1) al plano dado.

**38**. Dados los planos: $\pi_1$ : $2x - 4y + 2z - 3 = 0$ y $\pi_2$: $2x + 6y - z - 26 = 0$

a) Encuentre la ecuación del plano $\pi_3$ que pasa por el punto R (1, 4, 3) y por la intersección de los dos planos dados, usando el concepto de *familia de planos*.

b) Determine la ecuación del plano $\pi_4$ perpendicular a los dos planos dados que contenga al origen de coordenadas.

c) Indique, justificando su respuesta, si el plano $\pi_4$ pertenece a la familia de planos que pasa por la intersección de $\pi_1$ y $\pi_2$

**39**. a) Escriba la ecuación de la *familia de planos* que pasan por la intersección del plano $xy$ y el plano $xz$. Represente gráficamente dos planos de dicha familia.

b) Determine la ecuación del plano que pertenece a dicha familia y es plano bisector de ambos planos coordenados. Represente gráficamente.

**40**. Dada la siguiente ecuación vectorial paramétrica del plano $\pi_1$ :

$\pi_1$ : $\boldsymbol{OP} = (1, 2, 0) + \mu\,(1, 4, -2) + \beta\,(3, 0, 2)$ $\qquad \mu, \beta \in \mathbb{R}$

a) Determine las coordenadas de dos puntos que pertenezcan a dicho plano.

b) Halle la ecuación cartesiana de un plano $\pi_2$ que sea perpendicular al plano dado $\pi_1$ , que sea paralelo al eje $z$ y que además pase por el origen de coordenadas. Justifique su respuesta.

c) Verifique sus respuestas utilizando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Posiciones relativas entre planos*. [*Libro Geometría Dinámica*].

## 2.5. RECTAS

**41**. Rectas en $\mathbb{R}^2$. Halle las ecuaciones de las siguientes rectas y represente gráficamente:

a) La recta que pasa por el punto A (3,1) y es paralela a la recta determinada por los puntos B (4, 1) y C (–2, 2).

b) La recta que pasa por el punto Q (2, 2) y es perpendicular a la recta dada en el inciso anterior.

**42**. Familia de rectas en $\mathbb{R}^2$:

a) Obtenga la ecuación de la familia de rectas que tiene ordenada al origen $b = -4$.

b) Calcule el ángulo entre las rectas $L_1$: $3x - 3y + 1 = 0$ y $L_2$: $x = -y - 3$

c) Encuentre la ecuación de la familia de rectas que pasan por la intersección de las dos rectas dadas en el inciso anterior.

d) Represente gráficamente y verifique las respuestas anteriores.

## 43. Rectas en $\mathbb{R}^3$

a) Halle la ecuación vectorial paramétrica, cartesianas paramétricas y simétricas de la recta $L_1$ que pasa por el punto Q(2,2,-2) y es paralela al vector $\boldsymbol{v} = (2,-1,3)$.

b) Halle la intersección de la recta $L_1$ con los planos coordenados.

c) Encuentre dos puntos de la recta $L_1$, distintos a los determinados en el inciso anterior.

d) Determine el ángulo que forma la recta $L_1$ con la recta:

$x = 4 - 2t$, $y = 3 + 2t$, $z = -7 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$;

e) Calcule la distancia de la recta $L_1$ al punto M (4, –1, 3).

## 44. Sean las rectas: $L_1: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ $L_2: \begin{cases} -x + y + 1 = 0 \\ -6y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

a) Encuentre la ecuación vectorial paramétrica y las ecuaciones simétricas de la recta $L_2$. Identifique los números directores.

b) Indique justificando su respuesta, si las rectas dadas son paralelas, secantes (incidentes) o alabeadas. Determine la distancia entre ambas o el punto de intersección, según corresponda.

c) Determine la ecuación de la recta $L_3$ que es perpendicular simultáneamente a las rectas $L_1$ y $L_2$ y que pasa por el punto Q (1,-5,3).

## 45. Encuentre la proyección del punto Q (2,2,2) sobre el plano $2x + y - z + 6 = 0$ paralela a la dirección dada por el vector $\boldsymbol{v} = (1,1,-2)$.

## 46. Halle las distintas formas de la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $\boldsymbol{OP} = (2, 4) + t\,(4, -3)$; $t \in \mathbb{R}$ y pasa por el punto Q (2,1). Represente gráficamente.

## 47. Dadas las rectas $y=3$ e $y=-x$

a) Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto P (2, 5) y por la intersección de las rectas dadas usando el concepto de *familia de rectas*.

b) Represente gráficamente.

## 48. Dadas las siguientes rectas:

$L_1$: $\boldsymbol{OP} = (1,1,-1) + t_1\,(2,3,1)$ $t_1 \in \mathbb{R}$ y $L_2$: $\boldsymbol{OP} = (-1,-2,-2) + t_2\,(1,4,2)$ ; $t_2 \in \mathbb{R}$

a) Demuestre que las rectas $L_1$ y $L_2$ se cortan en un punto.

b) Halle las coordenadas del punto de intersección.

c) Determine la ecuación del plano que ellas definen.

d) Calcule el ángulo que forman las dos rectas.

**49**. Distancia entre un punto y una recta en $\mathbb{R}^3$.

a) Encuentre una expresión que permita calcular la distancia entre un punto y una recta en $\mathbb{R}^3$. Justifique su desarrollo.

b) Calcule la distancia entre el punto Q(–2, 3, 5) y la recta $L_1$: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

**50**. Dado el plano $\pi_1 : 2x - y + z + 3 = 0$

a) Escriba la ecuación vectorial paramétrica de la recta $L_1$ que es perpendicular al plano $\pi_1$ y pasa por el punto Q (-1,3,6).

b) Determine si la recta $L_2$: $(x,y,z)$ = (0,1,1) + $k$ (-4,0,8), $k \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi_1$ son paralelos, o se cortan en un punto, o la recta está contenida en el plano. Justifique su respuesta

**51**. Una vía férrea pasa por los puntos $Q_1$ (20, 5, 0) y $Q_2$ (0, 30, 0.5) en un tramo recto en el que existe una línea aérea de distribución de electricidad que pasa por los puntos $R_1$ (0, 10, 5.5) y $R_2$ (200, 10, 0.5). Indique si la vía férrea y la línea de distribución de electricidad son paralelas o alabeadas y determine la mínima distancia entre ambas.

**52**. a) Indique la ecuación de la familia de planos con traza común en el plano $xy$ la recta: $2x + y - 8 = 0$. Represente gráficamente dos planos de dicha familia.

b) Indique la ecuación vectorial paramétrica de la traza dada en el inciso(a).

c) Escriba las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos y represente gráficamente:

c.1. plano paralelo al plano $xy$ que pasa por el punto Q (2,-3,5);

c.2. plano perpendicular al plano $xy$ que pasa por los puntos A (4,0,0) y B (0,8,0);

c.3. ecuación vectorial paramétrica de la recta intersección de ambos planos.

d) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos en GeoGebra y utilizando los comandos *Producto Vectorial* y *Plano Perpendicular*. Utilice las distintas vistas para ayudarse en la visualización.

**53**. Dado el plano $\pi_1$ : $4y + 3z - 24 = 0$

a) Determine la posición relativa entre el plano dado y el eje $x$. Represente gráficamente.

b) Calcule la distancia entre el plano dado y el eje $x$, o bien el punto de intersección entre ambos, según corresponda.

c) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos en GeoGebra y utilizando los comandos *Perpendicular*, *Interseca* y *Distancia*.

## 2.6. CIRCUNFERENCIAS

**54**. Determine analíticamente la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C (2, -1) y es tangente a la recta $L$: $x - y + 1 = 0$. Represente gráficamente.

**55**. Halle la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos A (0, 0), B (2, 3) y C (5, 1). Represente gráficamente.

**56**. Determine un nuevo sistema de coordenadas respecto del cual la ecuación: $x^2+y^2+4x-6y+9 = 0$ carezca de términos lineales. Identifique el lugar geométrico de los puntos que cumplen con dicha ecuación y encuentre sus elementos fundamentales. Represente gráficamente.

**57**. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $L$ de ecuación $L$: $2x + y - 14 = 0$ y pasa por la intersección de las circunferencias:

$C_1: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0 \quad : \quad C_2: 2x^2 + 2y^2 - 8x + 8y - 16 = 0$

Utilice el concepto de *familia de circunferencias*. Represente gráficamente. Determine la longitud de la cuerda común de las circunferencias dadas.

**58**. Determine los puntos de intersección entre la circunferencia

$C_1$: $(x+4)^2 + y^2 = 9$ y cada una de las siguientes rectas. Represente gráficamente.

a) $L_1$: $y + x - 5 = 0$ ; b) $L_2$: $y - x - 1 = 0$ ; c) $L_3$: $x + 7 = 0$.

**59**. Halle la ecuación de las rectas tangentes a la circunferencia:

$2x^2 + 2y^2 + 4x + 2y - 22 = 0$ y que tengan pendiente $-3/2$. Represente gráficamente.

**60**. Indique las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de radio 4 y centro en el punto C (-1,3).

**61**. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C (3, –2) y pasa por el punto A (3, 7). Determine además la ecuación en su forma paramétrica vectorial. Represente gráficamente**.**

**62**. Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto Q (–3, 2) y tiene su centro en la intersección de las rectas:

$L_1$ :$3x - y + 15 = 0$ y $L_2$ : $4x + y + 13 = 0$.

Represente gráficamente.

**63**. Halle la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es C (3, −2) y es tangente a la recta $L$: $3x - 2y = 0$. Grafique.

**64**. Dadas las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

$C_1$: $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$ ; $C_2$: $4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0$

a) Halle la ecuación del eje radical de las mismas.

b) Demuestre que el eje radical es perpendicular a la recta que une sus centros.

c) Represente gráficamente.

d) Halle la ecuación de la circunferencia $C_3$ cuyo centro tiene abscisa $h$=7, y que pertenece a la familia de circunferencias que pasan por la intersección de $C_1$ y $C_2$.

e) Halle la ecuación de la circunferencia $C_4$ cuyo centro es el origen de coordenadas y tal que $C_4$ es tangente a la recta que une los centros de las circunferencias $C_1$ y $C_2$. La circunferencia obtenida ¿pertenece o no a la familia de circunferencias que pasan por la intersección de $C_1$ y $C_2$? Justifique su respuesta.

**65**. Indique ecuaciones paramétricas de la circunferencia de radio 6 con centro en el punto C (-2,1) y determine a partir de ellas dos puntos de dicha circunferencia. Represente gráficamente.

**66**. En un proyecto vial, se requiere diseñar una rotonda para mejorar el empalme de dos rutas nacionales.

Se toma como referencia un sistema coordenado $xy$, para el cual el centro de la rotonda se ubicará en el punto C (-70;0) m.

El diámetro de la rotonda será de 60m.

Se prevé que las vías de acceso desde y hacia una de las rutas serán las tangentes a la rotonda desde el origen de coordenadas.

a) Obtenga la ecuación cartesiana y la ecuación general de la circunferencia que describe la rotonda.

b) Encuentre los puntos de intersección entre la circunferencia y las rectas tangentes a la misma que pasan por el punto O (0,0) (Exprese la solución aproximando con un decimal).

c) Obtenga ecuaciones generales que permitan describir a las vías de acceso, siendo éstas las rectas tangentes a la circunferencia desde el punto O (0,0).

d) Represente gráficamente el problema planteado y la totalidad de las soluciones halladas.

## 2.7. PARÁBOLAS

**67**. Indique todos los elementos (foco, vértice, directriz, lado recto y puntos extremos del lado recto) de la parábola cuya ecuación general es: $x^2 - 6x + 8y - 23 = 0$. Represente gráficamente.

**68**. Halle la ecuación de la parábola cuyo vértice es V (–4, 3) y su foco es F (–1, 3). Represente gráficamente.

**69**. Halle la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$ que es paralela a la recta $L$: $3x + 9y - 11 = 0$. Represente gráficamente.

**70**. Las torres de una línea de alta tensión están separadas 100 m y tienen una altura de 16m. Los cables de la línea no deben estar a menos de 6m sobre el nivel de suelo. Halle la ecuación de la parábola que determinan los cables. Indique la altura de un punto que está situado a 20m del vértice. Represente gráficamente.

*Figura* 2.2. Torres y cables de línea de alta tensión del Ejercicio 70.

**71**. Halle la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$, y que es perpendicular a la recta $L$: $4x + 2y + 5 = 0$. Represente gráficamente.

**72**. a) Indique *ecuaciones paramétricas* de la parábola de vértice V (1,1), parámetro p = 4 y eje focal paralelo al eje $x$. Identifique a partir de dichas ecuaciones dos puntos de la curva y grafique.

b) Escriba la ecuación de una *familia de parábolas* de vértice V (1,1) y grafique tres curvas de dicha familia.

**73**. Determine gráfica y analíticamente la intersección de la curva cuya ecuación es: $x^2 - 6x + y + 4 = 0$ con la recta $L$: $-y + x = 0$.

**74**. a) Halle desde el punto Q (–1,–1) las dos rectas tangentes a la parábola $y^2 - x + 4y + 6 = 0$. b) Calcule el ángulo que determinan estas rectas. c) Verifique sus respuestas representando gráficamente la parábola con el software GeoGebra y utilizando los *Comandos Tangente* y *Ángulo*.

**75**. El cable de suspensión de un puente colgante puede aproximarse mediante la forma de un arco parabólico. Las columnas que lo soportan están separadas 480 m y tienen una altura de 56 m. El punto más bajo del cable queda a una altura de 12 m sobre la calzada del puente. Determine la ecuación de la parábola, considerando como eje de abscisas la horizontal que define el puente, y como eje de ordenadas el eje de simetría de la parábola. Calcule la altura correspondiente a un punto situado a 80 m de las columnas. Represente gráficamente.

**76**. Para el diseño de un software de reconocimiento facial resulta útil aplicar la definición de parábola y el concepto de familia de la misma. Se asimila la forma del mentón a dicha curva, tomando como referencia el vértice (asociado al punto inferior del mentón) coincidente con el origen de coordenadas.

a) Dados los siguientes casos, determine para cada uno el parámetro geométrico $p$ que caracteriza a cada parábola y escriba las ecuaciones cartesianas de las mismas.

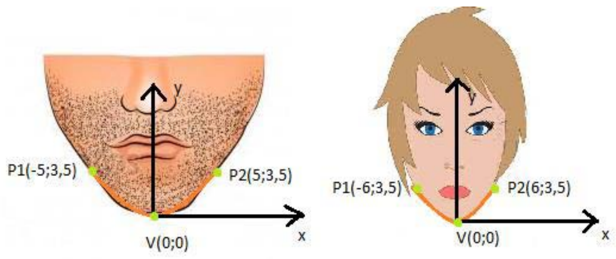



*Figura* 2.3. Reconocimiento facial. Ejercicio 76.

b) Plantee la ecuación correspondiente a la familia de parábolas a las cuales pertenecen los casos del inciso previo. ¿Cuál sería el parámetro a utilizar?

c) Para las parábolas determinadas en el inciso a) encuentre las coordenadas del foco, las coordenadas de los extremos del lado recto junto con su longitud, la ecuación de la recta directriz. Grafique.

d) Considerando que el parámetro geométrico caracteriza a un individuo en particular. Siendo el parámetro p=4,11, a qué individuo de la siguiente base de datos corresponde:

i. Individuo A - P1 ( -6,7 ; 3,5) y P2 ( 6,7 ; 3,5)

ii. Individuo B - P1 (- 4,6 ; 3,5) y P2 ( 4,6 ; 3,5)

iii. Individuo C - P1 (- 5,36 ; 3,5) y P2 ( 5,36 ; 3,5)

**77**. a) Indique *ecuaciones paramétricas* de la parábola de vértice V (2,-2), parámetro $p$ = 3 y eje focal paralelo al eje $y$. Identifique a partir de dichas ecuaciones dos puntos de la curva y grafique.

b) Escriba la ecuación de una *familia de parábolas* adoptando como fijo alguno de los parámetros del inciso anterior y grafique tres curvas de dicha familia.

**78**. Dada la parábola de vértice V ($h$,$k$) y eje focal paralelo al eje de abscisas, verifique la propiedad de reflexión en un punto extremo del lado recto.

## 2.8. ELIPSES E HIPÉRBOLAS

**79**. Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos P ($x$, $y$) cuya suma de sus distancias a los puntos fijos (4, 3) y (–2, 3) sea igual a 10. Represente gráficamente.

**80**. Dada la *elipse* $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$, halle las ecuaciones de las rectas tangentes a la misma que son perpendiculares a la recta L: $x + y - 5 = 0$. Grafique.

**81**. Un río es cruzado por una carretera por medio de un puente cuyo arco central tiene la forma de media *elipse*. En el centro del arco la altura es de 20 m. El ancho total del arco elíptico es de 50m.

*Figura* 2.4. Puente de arco semielíptico. Ejercicio 81.

a) Determine la ecuación de la elipse que describe este puente.

b) A una distancia de 5m de cada uno de los pilares, se encuentran estructuras de protección para los mismos. ¿Cuál es la altura del arco del puente en correspondencia con estos elementos?

c) Represente gráficamente.

**82**. Indique las ecuaciones paramétricas de la *elipse* con centro C (-2,0), semiejes $a$=5 y $b$=4, y eje focal paralelo al eje $x$.

**83**. El centro de una *hipérbola* es el punto C (4, 2), uno de sus focos es F (–6, 2) y su excentricidad es $e$=5/4.

a) Halle su ecuación general.

b) Indique todos sus elementos y represente gráficamente.

c) Obtenga los puntos de intersección con el eje $x$.

**84**. Halle la ecuación de la recta normal a la *hipérbola* cuya ecuación general es $3x^2 - 4y^2 - 18x - 40y - 85 = 0$ en un punto de la misma de ordenada $-2$ y abscisa negativa. Represente gráficamente.

**85**. Una embarcación envía una señal en el momento en el que se encuentra a 194 km de la costa. Dos estaciones guardacostas designadas como Q y R, que se encuentran ubicadas a 354 km de distancia entre sí, reciben dicha señal. A partir de la diferencia entre los tiempos de recepción de la misma, se determina que la nave se encuentra 258 km más cerca de la estación R que de la estación Q. Elija un sistema de referencia apropiado e indique las coordenadas correspondientes a la ubicación de la embarcación. Represente gráficamente.

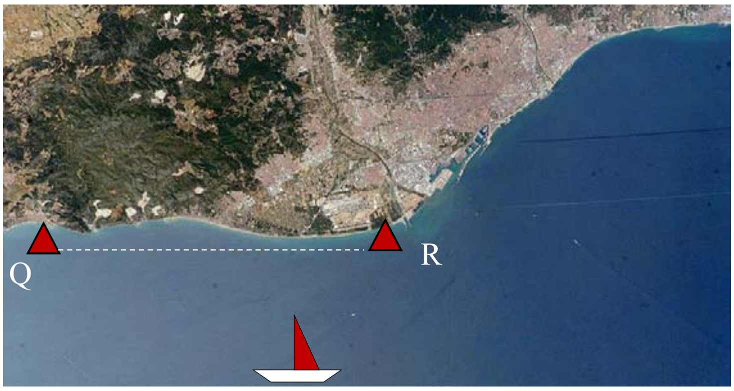



*Figura* 2.5. Estaciones guardacostas. Ejercicio 85.

**86**. Verifique que las siguientes ecuaciones representan los puntos de una *hipérbola* de centro C (0,0) y semiejes $a$ y $b$:

$$\begin{cases} x = a\sec(t) \\ y = b\,tg\,(t) \end{cases} \quad t\epsilon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$$

**87**. En cada caso indique todos los elementos de las siguientes *elipses* y represente gráficamente:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ; b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

c) $4x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 14 = 0$ ; d) $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$

**88**. Halle el ángulo formado por la recta $L$: $2x - 3y + 1 = 0$ con las rectas tangentes a la *elipse* $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$, en los puntos de intersección de la elipse con la recta $L$.

**89**. Un puente de arco *semielíptico* tiene una amplitud de 18 m en su base. En el centro su altura es de 8 m. Seleccione un sistema de coordenadas cartesianas apropiado y determine la altura del puente en un punto que está ubicado a 4 m de los extremos. Represente gráficamente.

**90**. Determine gráfica y analíticamente las ecuaciones de las rectas tangentes a la *elipse* $E$ por el punto exterior Q (10,0). La elipse $E$ es tal que sus focos son los puntos $F_1$ (-4,0) y $F_2$ (4,0) y pasa por el punto $P_0$ (2,3). Verifique sus respuestas con la ayuda del *Recurso Geométrico Interactivo RGI – Tangentes a una elipse por un punto exterior* [Capítulo 3 del Libro Interactivo Geometría Dinámica].

**91**. Indique ecuaciones paramétricas de la *elipse* con centro C (-1,1), semiejes a=6 y b=4 y eje focal paralelo al eje $y$.

**92**. Dada la ecuación: $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

a) Represente la cónica y determine sus elementos fundamentales.

b) Determine los puntos de intersección entre la cónica del inciso anterior y las rectas: $L_1$: $y - x + 8 = 0$ y $L_2$: $2y - x + 4 = 0$

**93**. Dada la ecuación cuadrática: $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$

a) Identifique la cónica y todos sus elementos.

b) Determine el ángulo que forman entre sí las rectas que son tangentes a la cónica en los puntos en los que ésta intersecta al eje $y$.

c) Grafique la cónica, identificando todos sus elementos y las rectas del inciso anterior.

**94**. Indique ecuaciones paramétricas de una *hipérbola* de centro C (0,1), semiejes $a$=5 y $b$=2, y eje focal paralelo al eje $y$.

**95**. Determine una *familia de hipérbolas* cuyos vértices son $V_1$ (1,1) y $V_2$ (1,5).

## 2.9. SUPERFICIES

**96**. a) Halle la ecuación de la *superficie esférica* de centro C (3,0,4) y que pasa por el origen de coordenadas.

b) Halle la ecuación general del plano tangente a dicha esfera en el punto Q (8,0,4).

**97**. a) Dada la *superficie esférica* de centro en el origen de coordenadas y radio 2, determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección de dicha esfera con el plano $x + z - 2 = 0$. Represente gráficamente.

b) Indique la ecuación cartesiana de la superficie cilíndrica que tiene por intersección con la superficie esférica, la curva encontrada en el inciso anterior.

c) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva que resulta de la proyección sobre el plano $xy$ de la curva hallada en el inciso (a) y grafique.

d) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando los comandos *Interseca Recorridos* y *Curva* del software GeoGebra.

**98**. Halle la ecuación de la *superficie cónica* cuya directriz es: $9y^2 + 4z^2 = 36$, con $x = 0$ , y su vértice es el punto V(12,0,0). Realice un gráfico cualitativo.

**99**. Halle la ecuación de la *superficie cilíndrica* de generatriz paralela al vector $\boldsymbol{v}=(2,1,3)$ y cuya directriz es: $\begin{cases}(x-1)^2+(z-1)^2=16\\ y=0\end{cases}$. Realice un gráfico cualitativo.

**100**. Se desea construir una cubierta de generatriz parabólica para un estadio deportivo que cubra un espacio circular de 100 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 40m. Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho estadio. Grafique.

**101**. Dadas las ecuaciones:

*i*) $x^2 - y^2 - 6z = 0$; *ii*) $-49x^2 - 49y^2 + 25z^2 - 1225 = 0$ ; *iii*) $4y^2 + 36z^2 - 288x = 0$

a) Determine las intersecciones con los ejes coordenados, con los planos coordenados (*trazas*) y con planos paralelos a los planos coordenados.

b) Estudie las condiciones de simetría.

c) Represente gráficamente.

**102**. Indique *ecuaciones vectoriales paramétricas* de las curvas de intersección de la superficie dada por la ecuación: $-25x^2 - 25y^2 + 16z^2 + 400 = 0$ con cada uno de los siguientes planos:

*i*) $z = 10$ ; *ii*) $x + z = 0$

**103**. Dadas las siguientes *representaciones vectoriales paramétricas de superficies*, identifique para cada caso de qué superficie cuádrica se trata, a partir de la eliminación de los parámetros que las describen.

a) $\boldsymbol{r}(\alpha\,,\beta) = (5sena\ cos\beta\,,\ 5sena\ sen\beta\,,\ \ 5cos\alpha) \rightarrow \begin{cases} x = 5sena\ cos\beta \\ y = 5sena\ sen\beta \\ z = 5cos\alpha \end{cases}$

$0 \le \alpha \le \pi\,; 0 \le \beta \le 2\pi$

b) $\boldsymbol{r}(\alpha\,,\beta) = (4\ cos\alpha\ sen\beta\ ,6\ sen\alpha\ sen\beta\ ,3\ cos\beta) \rightarrow \begin{cases} x = 4\ cos\alpha\ sen\beta \\ y = 6\ sen\alpha\ sen\beta \\ z = 3\ cos\beta \end{cases}$

$\alpha \in [0, 2\pi]\ \ ;\ \ \beta \in [0, \pi]$

c) $\boldsymbol{r}(\alpha\,,\beta) = (5\ cos\alpha\ ch\beta\ ,2\ sen\alpha\ ch\beta\ ,7\ sh\beta) \rightarrow \begin{cases} x = 5\ cos\alpha\ ch\beta \\ y = 2\ sen\alpha\ ch\beta \\ z = 7\ sh\beta \end{cases}$

$0 \le \alpha \le 2\pi\ \ \ ;\ \ \ -\infty < \beta < \infty$

**104**. Describa 5 aplicaciones en la ingeniería y/o en computación, de acuerdo a su carrera, de superficies en el espacio tridimensional.

**105**. Dada la ecuación de la *superficie esférica*: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 2 = 0$.

a) Indique las coordenadas del centro y radio.

b) Determine la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto A $(\sqrt{3} - 1\ ,1\ ,1)$ .

**106**. a) Dado el casquete *esférico* $x^2 + y^2 + (z\text{-}1)^2 = 9$, con $z \geq 0$, determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección con el plano $-y + z - 3 = 0$. Grafique.

b) Indique la ecuación cartesiana de una superficie cilíndrica cuya intersección con el casquete esférico es la curva encontrada en el inciso anterior. Represente gráficamente.

c) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva que resulta de la proyección sobre el plano $xy$ de la curva hallada en el inciso (a). Grafique.

d) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando los comandos *Interseca Recorridos* y *Curva* del software GeoGebra.

**107**. Halle la ecuación de la *superficie cilíndrica* que tiene como directriz la cónica $\begin{cases}(y-1)^2 = 8z \\ x = 0\end{cases}$ y generatrices paralelas al vector $\boldsymbol{v}$ = (1, 1, 2). Realice un gráfico cualitativo.

**108**. Halle la ecuación de la *superficie cónica* cuya directriz es: $\begin{cases}(x-2)^2 + (z-1)^2 = 16 \\ y = 0\end{cases}$

y su vértice es el punto V (0, 7, 0). Realice un gráfico cualitativo.

**109**. a) Halle la ecuación de la *superficie cónica* cuya directriz está dada por:

$$\begin{cases}36(x-4)^2 + 16(y+6)^2 = 576 \\ z = 0\end{cases}$$

y su vértice es el punto V(0, 0, 8). (no es necesario desarrollar la última expresión).

b) Sea la recta $L: (x, y, z) = (6,0,-4) + t(1,0,-2)$ ; $t \in \mathbb{R}$. Indique si la recta $L$ está contenida o no en la superficie. Justifique su respuesta.

c) Indique la ecuación vectorial paramétrica del eje de la superficie cónica y determine el ángulo que forma dicho eje con el plano $xy$. d) Realice un gráfico cualitativo.

**110**. a) Determine la ecuación de la *superficie de revolución* que tiene por generatriz una elipse en el plano $xz$, de semiejes $a$=5 y $b$=2 con centro en el origen de coordenadas y eje de revolución el eje $x$. b) Realice un gráfico cualitativo. c) Verifique su respuesta con el software GeoGebra, utilizando el comando *Superficie*.

**111**. a) Se desea construir una cubierta de generatriz *semielíptica* para un centro deportivo, que cubra un espacio circular de 120 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 30m. Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho centro deportivo. Grafique.

b) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva de intersección de la cubierta del estadio deportivo, con un plano horizontal a 10 metros de altura.

**112**. Una torre de enfriamiento de una central nuclear se ha diseñado a partir de un hiperboloide de revolución de 1 hoja de 60 m de altura, con eje de rotación vertical. Se sabe que la garganta tiene un diámetro de 30 m y se encuentra en un plano situado a 40 m de la base del hiperboloide donde el mismo tiene un diámetro de 142,4 m. a) Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la superficie que describe la torre de enfriamiento dada. b) Grafique. c) Verifique su respuesta con el software GeoGebra.

**113**. Dada la ecuación $\frac{(x)^2}{25} + \frac{(y)^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1$

a) Determine las intersecciones con los ejes coordenados, con los planos coordenados (*trazas*) y con planos paralelos a los planos coordenados.

b) Estudie las condiciones de simetría.

c) Represente gráficamente.

**114**. Indique justificando su respuesta, si los ejes de las dos superficies cónicas dadas por los siguientes datos, son rectas paralelas, secantes o alabeadas. Represente gráficamente.

*Superficie cónica 1:* Directriz $D_1$: $\begin{cases} 4(x-10)^2 + 9(z-2)^2 - 36 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

con vértice $V_1$ (10, 20, 2).

*Superficie cónica 2:* Directriz $D_2$: $\begin{cases} 16(x-3)^2+9(y-10)^2-144=0 \\ z=0 \end{cases}$

con vértice $V_2$ (3, 10, 20).

**115**. a) Indique *ecuaciones vectoriales paramétricas* de las curvas de intersección de la superficie dada por la ecuación: $49x^2 + 49y^2 + 9z^2 - 441 = 0$ con cada uno de los siguientes planos:

*i*) $y = 2$ ; *ii*) $x + y = 0$

b) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando el comando *Interseca Recorridos* del software GeoGebra.

**116**. Indique las ecuaciones correspondientes a las siguientes superficies cuádricas, con semiejes $a$, $b$ y $c$. Represente gráficamente.

a) Hiperboloide de una hoja de revolución, con eje de revolución el eje $y$.

b) Paraboloide de revolución, con eje de revolución el eje $x$.

c) Elipsoide de revolución, con eje de revolución el eje $z$.

d) Hiperboloide de dos hojas de revolución, con eje de revolución el eje $x$.

**117**. Dadas las siguientes *representaciones vectoriales paramétricas de superficies*, identifique para cada caso de qué superficie cuádrica se trata, a partir de la eliminación de los parámetros que las describen. Luego utiliza el software GeoGebra para representar gráficamente.

a) $\boldsymbol{r}(t,s) = (2t, 2s, t^2 - s^2) \rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 2s \\ z = t^2 - s^2 \end{cases}$ $\quad t \in R \ ; \ s \in R$

b) $\boldsymbol{r}(\beta,t) = (2t\, ch\beta, 2t\, sh\beta, t^2) \rightarrow \begin{cases} x = 2t\, ch\beta \\ y = 2t\, sh\beta \\ z = t^2 \end{cases}$ $\quad t \geq 0 \ ; \ \beta \in R$

c) Compare las superficies dadas por las *representaciones vectoriales paramétricas* indicadas en (a) y en (b)

d) $\boldsymbol{r}(\alpha,\beta) = (5\cos\alpha\, sen\beta - 2, 2\, sen\alpha\, sen\beta - 2, 9\cos\beta + 2) \rightarrow \begin{cases} x = 5\cos\alpha\, sen\beta - 2 \\ y = 2\, sen\alpha\, sen\beta - 2 \\ z = 9\cos\beta + 2 \end{cases}$

$\alpha \in [0, 2\pi) \ ; \ \beta \in [0, \pi)$

e) $\boldsymbol{r}(\alpha,t) = (3t\cos\alpha + 3, 5t\, sen\alpha + 3, t^2 - 2) \rightarrow \begin{cases} x = 3t\cos\alpha + 3 \\ y = 5t\, sen\alpha + 3 \\ z = t^2 - 2 \end{cases}$

$t \geq 0 \ ; \ \alpha \in [0, 2\pi)$

**118**. Indique ecuaciones para las siguientes familias, adoptando un parámetro apropiado. Represente en cada caso al menos tres superficies de cada familia:

a) Familia de esferas de centro (1,-3,5).

b) Familia de paraboloides de revolución de vértice V (0,3,0).

c) Familia de paraboloides de revolución de vértice variable, con eje de revolución el eje $y$.

## 2.10. LUGARES GEOMÉTRICOS en COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS y ESFÉRICAS

**119**. Determine la forma polar de las siguientes ecuaciones:

$y = 8x$ ; $x^2 + y^2 = 49$ ; $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$

**120**. En coordenadas polares la expresión analítica de cierta función es: $\rho = \frac{6}{1-cos\theta}$

Halle la expresión cartesiana rectangular de la misma e indique el nombre de la curva correspondiente.

**121**. Dada las ecuaciones en coordenadas polares:

$i)\ \rho = \frac{6}{1+\frac{1}{2}cos\theta}$ $ii)\ \rho = \frac{6}{1+cos\theta}$ $iii)\ \rho = \frac{12}{2-sen\theta}$ $iv)\ \rho = \frac{12}{2-4cos\theta}$

a) Indique para cada una de ellas, de qué cónica se trata, justificando su respuesta.

b) Represente gráficamente las cónicas, en coordenadas polares, indicando las coordenadas polares del centro y de los focos en cada uno de los casos.

**122**. Determine la ecuación en *coordenadas cartesianas*, en *coordenadas cilíndricas* y en *coordenadas esféricas* del plano que pasa por el origen de coordenadas y tiene como vector normal a (3, 2, 1).

**123**. Represente gráficamente las siguientes ecuaciones en *coordenadas cilíndricas*:

a) $\rho = 5$

b) $\theta = \pi/3$

c) $z = 5$

**124**. Escriba las ecuaciones en coordenadas polares y represente gráficamente las siguientes curvas:

a) Curvas de *trébol*.

b) *Limacon*.

c) *Lemniscatas*.

**125**. Deduzca las fórmulas de transformación que expresen coordenadas cilíndricas en términos de coordenadas rectangulares y viceversa.

**126**. Dada la ecuación expresada en coordenadas polares: $\rho\,(\text{sen}\varphi + \cos\varphi) = 3$, escríbala en coordenadas cartesianas. Determine qué tipo de curva representa y grafique.

**127**. Determine las coordenadas polares del centro y el radio de la circunferencia de ecuación: $\rho^2 - 8\rho\cos(\varphi - 60^\circ) + 12 = 0$. Grafique.

**128**. Sea la ecuación $\rho = \frac{20}{4+4\cos\phi}$. a) Identifique la cónica que corresponde, indique los elementos fundamentales y encuentre las intersecciones con el eje polar y el eje a 90º. b) Grafique. c) Verifique sus respuestas empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Cónicas en coordenadas Polares* [Capítulo 4, *Libro Interactivo Geometría Dinámica*].

**129**. a) Identifique la cónica cuya ecuación en coordenadas polares es: $\rho = \frac{9}{6-3\cos\phi}$. b) Determine los elementos fundamentales y halle las intersecciones con el eje polar y el eje a 90º. c) Grafique. d) Verifique con el software GeoGebra, utilizando el comando *Curva*.

**130**. Determine la ecuación en coordenadas polares de una hipérbola con excentricidad $e = 1.2$, parámetro $p=4$ y directriz paralela al eje polar por debajo del polo. Represente gráficamente. Verifique sus respuestas (gráfica y analítica) empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Cónicas en coordenadas Polares* [Capítulo 4, *Libro Interactivo Geometría Dinámica*].

**131**. Represente gráficamente las siguientes ecuaciones en *coordenadas esféricas*:

a) $\rho = 4$ ; b) $\theta = \pi/4$ ; c) $\varphi = \pi/3$

**132**. En una línea de producción, un brazo robótico se encarga de elevar autopartes. Dicho brazo robótico tiene tres grados de libertad (es decir, tres posibles movimientos): 1) puede ascender y descender entre 2 y 4 metros; 2) puede rotar sobre su eje de simetría; 3) puede extenderse (o “alargarse”). Se lo ha programado para que pueda alcanzar cualquier punto de la superficie cónica cuya ecuación está dada por:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 0$$

Calcule cuál será el largo total del brazo robótico extendido, cuando esté a una altura de 2,5 metros y haya girado un ángulo de 45° respecto del eje positivo de las abscisas. (Aporte del Ayudante Ad-honorem, alumno de Ing. en Mecatrónica O. Deshays).

## 2.11. ROTACIONES y TRASLACIONES en $\mathbb{R}^2$

**133**. Una cónica tiene por ecuación general $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$, obtenga:

a) La forma matricial de la ecuación de 2º grado; b) La matriz asociada a la forma cuadrática; c) El tipo de cónica a partir de los valores propios de la matriz asociada; d) Los vectores propios y la nueva base; e) La matriz de pasaje $\boldsymbol{P}$; f) La matriz $\boldsymbol{A}'$ respecto de la nueva base: $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}'$ ; g) La ecuación de la cónica en el sistema determinado por la nueva base; h) Represente gráficamente; i) El ángulo de rotación del nuevo sistema respecto del sistema original.

**134**. Para cada una de las ecuaciones:

$i$) $x^2 + 2\,xy + y^2 - 8\sqrt{2}\,x + 8 = 0$

$ii$) $2x^2 - 4\,xy - y^2 + 8 = 0$

a) Indique la cónica que representa a través de los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática; b) Encuentre la matriz $\boldsymbol{P}$ que diagonaliza ortogonalmente la matriz de la forma cuadrática; c) Encuentre la ecuación de la cónica referida al sistema rotado.

d) Calcule el ángulo que han rotado los ejes; e) Represente gráficamente; f) Verifique sus respuestas graficando con el software GeoGebra.

**135**. Teniendo en cuenta la información dada en la *Figura* 2.6: a) Determine la ecuación de la cónica en el sistema $x'y'$; b) Halle los vectores que definen los ejes del sistema $x'y'$; c) Obtenga la matriz $\boldsymbol{P}$ de transformación de coordenadas; d) Calcule la matriz $\boldsymbol{A}$ asociada a la forma cuadrática de la ecuación de segundo grado en el sistema original $xy$ ; e) Indique la ecuación de la cónica en el sistema $xy$ ; f) Halle el ángulo de rotación del sistema $x'y'$ con respecto del sistema $xy$.

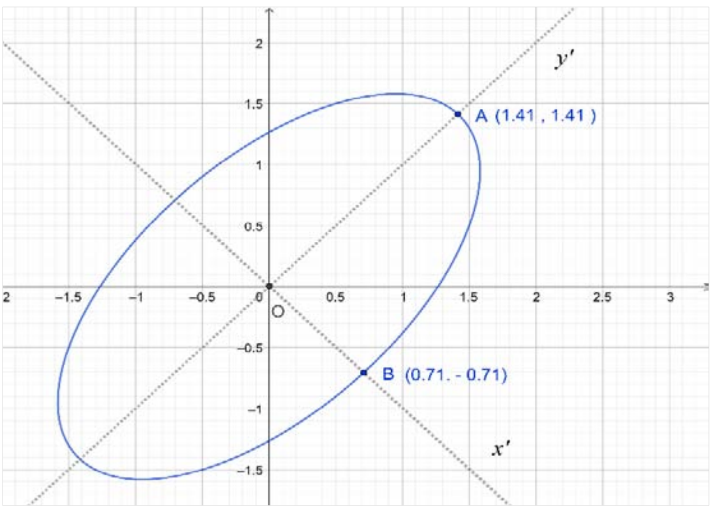



*Figura* 2.6. Elipse con ejes rotados respecto de los ejes coordenados $xy$. Ejercicio 135.

## 2.12. ROTACIONES y TRASLACIONES en $\mathbb{R}^3$

**136**. Una cuádrica tiene por ecuación: $-x^2 + yz + 2x - 4z - 5 = 0$

Efectúe una transformación de coordenadas apropiada para llevar la cuádrica a su forma normal. Identifique la cuádrica y los nuevos ejes coordenados.

**137**. Una cuádrica tiene por ecuación:

$5x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 16x + 4y - 4z + 19 = 0$

a) Indique la cuádrica que representa a través de los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática.

b) Encuentre la matriz $\boldsymbol{P}$ que diagonaliza ortogonalmente la matriz de la forma cuadrática.

c) Encuentre la ecuación de la cuádrica referida al sistema rotado.

# 3. DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

## 3.1 ESPACIOS VECTORIALES

### 1.

a) Teniendo en cuenta la definición de combinación lineal de vectores , para expresar al vector $\boldsymbol{w}$ como combinación lineal de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ tenemos que calcular los escalares $k_1 y\ k_2$ que verifican la siguiente suma vectorial $\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}$**.**

En términos de sus componentes:

$$(1.5, 0.5) = k_1(1,1) + k_2(-1,1)$$

Igualando componente a componente:

$$\begin{cases} 1.5 = k_1 - k_2 \\ 0.5 = k_1 + k_2 \end{cases} \Rightarrow\ k_1 = 1\ \ y\ k_2 = -0.5$$

El sistema de ecuaciones que obtuvimos es un sistema compatible determinado, esto indica que existen escalares únicos, $k_1 = 1\ ;\ k_2 = -0.5$ , que permiten expresar al vector $\boldsymbol{w}$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, es decir**:**

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - 0.5\boldsymbol{v}$$

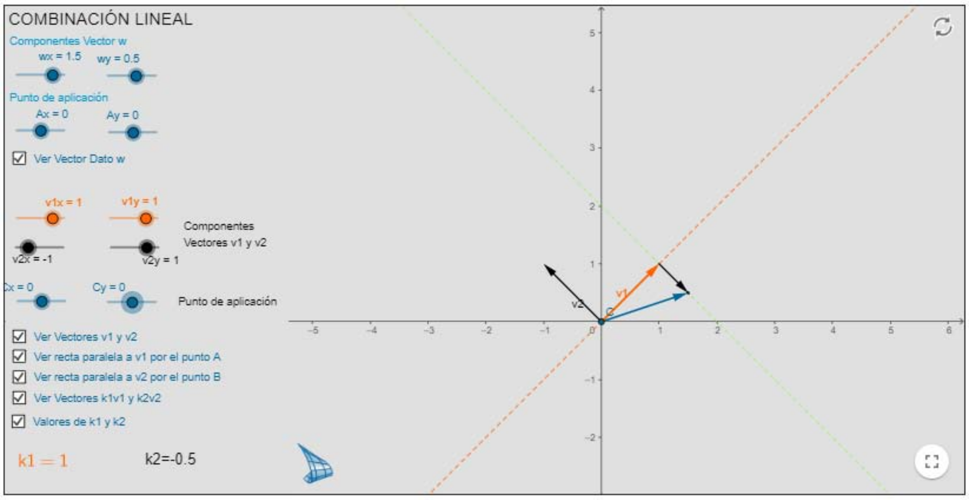



*Figura* 3.1. Representación gráfica de la combinación lineal del vector $\boldsymbol{w}$, respecto de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. [Libro Interactivo Geometría Dinámica].

b) Para expresar al vector $\boldsymbol{w}$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{r}$ tenemos que calcular los escalares $k_1 y\ k_2$ que verifican la siguiente suma vectorial $\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{r}$**.**

En términos de sus componentes:

$$(1.5, 0.5) = k_1(1,1) + k_2(-2,-2)$$

Igualando componente a componente:

$$\begin{cases} 1.5 = k_1 - 2k_2 \\ 0.5 = k_1 - 2k_2 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones que obtuvimos es un Sistema Incompatible, esto indica que no existen escalares que permitan expresar al vector $\boldsymbol{w}$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{r}$.

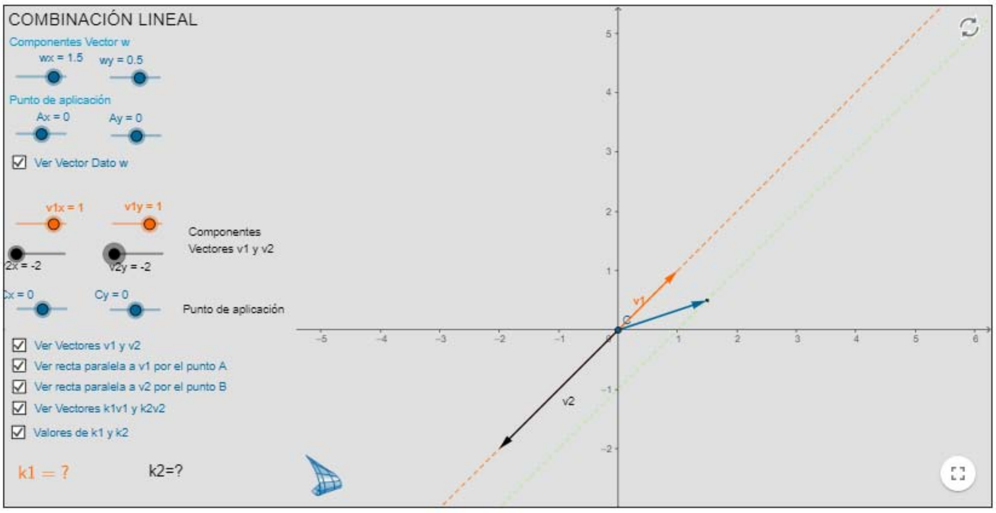



*Figura* 3.2. Representación gráfica de la respuesta analítica inciso b)
[Texto Interactivo Geometría Dinámica].

c) Expresamos la combinación lineal $\boldsymbol{c}$ = 3 $\boldsymbol{u}$ + 2 $\boldsymbol{v}$, en términos de sus componentes:

$(c_1, c_2) = 3(1,1) + 2(-1,1)$

Aplicamos las operaciones definidas en $V$ y encontramos las componentes del vector $\boldsymbol{c}$:

$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2) = (3,3) + (-2,2)$

$\boldsymbol{c} = (1,5)$

d) Sabemos por definición que un conjunto, en este caso $B_1$ , es conjunto generador de $V$ si todo vector de $V$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de $B_1$. Es decir: sea $\boldsymbol{a} = (x, y)$ un vector de $V$ ($\mathbb{R}^2$) y $k_1 y\ k_2$ números reales cualesquiera, siempre existirán escalares que permitan expresar a cualquier vector $\boldsymbol{a}$ como combinación lineal de los vectores de $B_1$. Expresamos la combinación lineal:

$(x, y) = k_1(1,1) + k_2(-1,1)$

Igualando componente a componente:

$$\begin{cases} x = k_1 - k_2 \\ y = k_1 + k_2 \end{cases}$$

Despejamos $k_1$ de la primera ecuación y reemplazamos en la segunda ecuación del sistema para expresar $k_2$ en función de las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$:

$x + k_2 = k_1$

$y = x + 2k_2$

Luego podemos expresar a cada escalar , $k_1\ y\ k_2$ , en función de las componentes del vector $\boldsymbol{a}$:

$\frac{1}{2}(y-x)=k_2$

$\frac{1}{2}(x+y)=k_1$

De este modo se puede asegurar que cualquier vector de $V$ (en este caso es $V$=$\mathbb{R}^2$) es combinación lineal de los vectores de $B$. Por ejemplo: Si $\boldsymbol{a}_1=(-1{,}3)$, entonces los escalares que permiten expresar al vector $\boldsymbol{a}_1$ como combinación lineal de los vectores de $B_1$ son:

$\frac{1}{2}(-1+3)=k_1$ y $\frac{1}{2}(3-(-1))=k_2$

$k_1=1$ y $k_2=2$

Se puede verificar que $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}$ , o lo que es equivalente: $(-1,3)=(1{,}1)+2(-1{,}1)$.

e) Sabemos por definición que un conjunto, en este caso $B_2$ , es conjunto generador de $V$ si todo vector de $V$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de $B_2$. Es decir, sea $\boldsymbol{b}=(x,y)$ un vector de $V$ (en este caso es $V$=$\mathbb{R}^2$) y $k_1$ $y$ $k_2$ números reales cualesquiera, siempre existirán escalares que permitan expresar $\boldsymbol{b}$ como combinación lineal de los vectores de $B_2$.

$(x,y)=k_1(1{,}1)+k_2(-2,-2)$

$\begin{cases} x=k_1-2k_2 \\ y=k_1-2k_2 \end{cases}$

Despejamos $k_1$ y reemplazamos en la segunda ecuación del sistema para expresar $k_2$ en función de las coordenadas del vecto$r$ $\boldsymbol{b}$*:*

$x+2k_2=k_1$ y obtenemos que:

$y=x$

Por lo tanto, $\boldsymbol{b}=(x,x)$, son los vectores generados por el conjunto $B_2=\{\boldsymbol{u};\boldsymbol{r}\}$.

Los vectores de $B_2$ no generan a $\mathbb{R}^2$, sino a un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

f) Debemos indicar si los vectores de $B_1$ son LD o LI . Dos vectores de $V$ son LI si la única combinación lineal de ellos que da por resultado el vector nulo, es aquella que tiene todos los escalares nulos. Planteamos la C.L. y luego igualamos componente a componente:

$(0,0)=k_1(1{,}1)+k_2(-1{,}1)$

$\left.\begin{array}{l} 0=k_1-k_2 \Rightarrow k_1=k_2 \\ 0=k_1+k_2 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1=k_2=0$

Vemos que la solución de ambos escalares nulos es única, luego los vectores dados son linealmente independientes. Por otra parte, observamos que uno de ellos no es múltiplo escalar del otro.

g) Para el conjunto $B_2$:

Dos vectores de $V$ son LI si la única combinación lineal de ellos que da por resultado el vector nulo, es aquella que tiene todos los escalares nulos. Planteamos la combinación lineal, igualamos componente a componente y luego resolvemos el sistema homogéneo que resulta:

$(0{,}0) = k_1(1{,}1) + k_2(-2,-2)$

$$\begin{cases} 0 = k_1 - 2k_2 \\ 0 = k_1 - 2k_2 \end{cases} \Rightarrow k_1 = 2k_2$$

El sistema de ecuaciones resulta compatible indeterminado, por lo que existen infinitos pares de escalares que satisfacen la combinación lineal, siempre que cumplan con la condición $k_1 = 2k_2$. Por lo tanto, $B_2$ es un conjunto LD.

*Observación*:

Si bien $k_1 = k_2 = 0$, es solución al sistema de ecuaciones anterior hay que recordar que para ser conjunto LI, ésta debe ser la única solución.

g) Para que un conjunto sea base de un espacio vectorial debe satisfacer dos condiciones:

- Ser conjunto generador del espacio vectorial.
- Ser conjunto linealmente independiente (LI).

Teniendo en cuenta los análisis de los incisos anteriores el conjunto $B_1$ es base de V (es decir, de $\mathbb{R}^2$) pero $B_2$ no lo es, ya que es LD y no genera a $\mathbb{R}^2$, sino que genera un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

h) Sabemos que $B_1$ es base de V, y la dimensión del espacio generado (en este caso $V$) es el número de vectores que tiene una base para el espacio vectorial que genera, por lo tanto la dimensión del espacio generado por $B_1$es dos.

El conjunto $B_2$, es un conjunto LD por lo tanto no es base del espacio que genera. Si eliminamos uno de los vectores de $B_2$ obtenemos a un conjunto, por ejemplo $B_2' = \{(1{,}1)\}$, que será LI y además genera a un subconjunto de $V$ ($\mathbb{R}^2$) que contendrá a todos los vectores $\boldsymbol{a}$ que se pueden expresar como combinación lineal del vector de $B_2'$, es decir $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{u}$ con $k \in \mathbb{R}$. Luego la dimensión del espacio que genera $B_2$ es uno, ya que coincide con el espacio que genera $B_2{}'$.

*Observación*:

Todo conjunto de vectores no nulos genera espacios vectoriales, pero no siempre son bases de esos espacios, ya que para ser base debe ser conjunto LI.

## 2.

a) Sabemos que si la única combinación lineal de $\boldsymbol{a}$ = (-8, 4) ; $\boldsymbol{b}$ = (2, -2); $\boldsymbol{c}$ = (-1, 0) que da por resultado el vector nulo, es aquella que tiene todos los escalares nulos, entonces el conjunto de vectores es LI. Planteamos la combinación lineal, igualamos componente a componente y resolvemos el sistema homogéneo que resulta:

$(0,0) = k_1(-8,4) + k_2(2,-2) + k_3(-1,0)$

$$\begin{cases} 0 = -8\mathrm{k}_1 + 2\mathrm{k}_2 - k_3 \\ 0 = 4\mathrm{k}_1 - 2\mathrm{k}_2 \end{cases}$$

Despejamos de la segunda ecuación uno de los escalares, por ejemplo $\mathrm{k}_1 = \frac{\mathrm{k}_2}{2}$, sustituimos en la primera ecuación y obtenemos $0 = -2\mathrm{k}_2 - k_3$. Como podemos ver la solución no es única, por lo tanto el conjunto $\{\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}\ ;\ \boldsymbol{c}\}$ es conjunto LD.

b) La dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es dos y tiene infinitas bases con dos vectores de $\mathbb{R}^2$ LI . Vamos a elegir una de ellas que debe cumplir con ser un conjunto de vectores LI y que lo genere. Proponemos al conjunto $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ como base de $\mathbb{R}^2$, ya que como son dos vectores tales que $\boldsymbol{b} \neq k\boldsymbol{c}$ para cualquier $k \in \mathbb{R}$ son LI. Debemos probar que el conjunto $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, lo cual podemos asegurarlo ya que son 2 vectores LI de $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto generan a $\mathbb{R}^2$. De este modo, siendo LI y generadores de $\mathbb{R}^2$, forman una base para este espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

c) Para expresar al vector $\boldsymbol{a}$ como combinación lineal de los vectores dados $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ tenemos que calcular los escalares $k_1 y\ k_2$ tales que $\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{b} + k_2\boldsymbol{c}$

Expresamos esta C.L. en términos de sus componentes y luego igualamos componente a componente:

$(-8, 4) = k_1(2,-2) + k_2(-1,0)$

$$\begin{cases} -8 = 2k_1 - k_2 \\ 4 = -2k_1 \end{cases} \Rightarrow\ k_1 = -2\ \ y\ k_2 = 4$$

El sistema de ecuaciones que obtenemos es un sistema compatible determinado, esto indica que existen escalares únicos, $k_1 = -2\ ;\ k_2 = 4$ ,que permiten expresar al vector $\boldsymbol{a}$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, es decir: $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c}$.

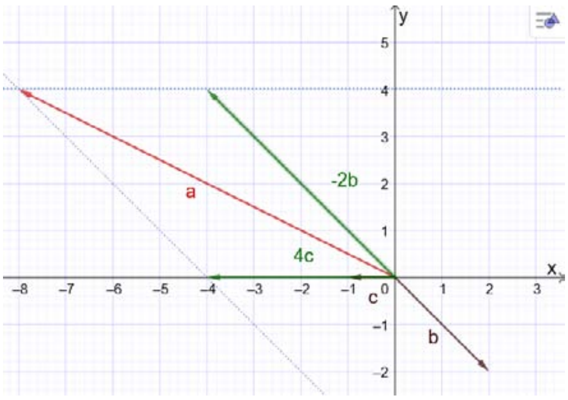



*Figura* 3.3. Representación del vector $\boldsymbol{a}$ como combinación lineal de $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.

*a)* y *e*) Por definición de coordenadas de un vector respecto a una base, sabemos que las mismas son los escalares de la combinación lineal de $\boldsymbol{a}$ respecto de la base $B_3$. Por lo tanto, a partir de lo analizado en el inciso c) podemos concluir que $(\boldsymbol{a})_{B_3} = (\mathbf{-2}, \mathbf{4})$ y gráficamente (ver Figura 3) podemos visualizar que el vector $a$ es el resultado de sumar vectorialmente 4 veces el vector $c$ y (-2) veces el vector $b$ .

*Observación:*

Es importante comprender que $(\boldsymbol{a})_{B_3}$ es el mismo vector $\boldsymbol{a}$ referido a una nueva base, y que el orden de las coordenadas hace referencia al escalar asociado al vector que se encuentra en la misma posición en la base, es decir el primer valor de $(\boldsymbol{a})_{B_3}$es el escalar asociado al primer vector de $B_3$ en la combinación lineal que da el vector $\boldsymbol{a}$ .

## 3.

a) Una base de un espacio vectorial es el conjunto de los vectores del espacio vectorial que son LI y generan todo el espacio vectorial. Analizaremos si el conjunto $A$ cumple estas condiciones:

Comenzamos analizando si son vectores LI calculando los escalares que permiten expresar el vector nulo como combinación lineal de los vectores dados en $A$:

$(0,0,0) = k_1(1,3,1) + k_2(0,2,-1) + k_3(0,0,5)$

Igualamos componente a componente y resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 0 = k_1 \\ 0 = 3k_1 + 2k_2 \end{array}\right\} \Rightarrow k_2 = 0 \\ 0 = k_1 - k_2 + 5k_3 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 5k_3 \Big\} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

Como la solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo es única e igual a la solución trivial, podemos concluir que el conjunto $A$ es LI.

Por definición de conjunto generador expresamos a un vector genérico $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores dados en $A$ para analizar si generan a todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

Escribimos la C.L., luego igualamos componente a componente y resolvemos:

$(a, b, c) = k_1(1,3,1) + k_2(0,2,-1) + k_3(0,0,5)$

$$\begin{cases} a = k_1 \\ b = 3k_1 + 2k_2 \end{cases} \Rightarrow k_3 = 1/5(c + \frac{1}{2}(b - 3a) - a)$$

Esto quiere decir que existen escalares que permiten expresar cualquier vector $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^3, \boldsymbol{v} = (a, b, c)$ como combinación lineal de los vectores del conjunto dado $A$. Por lo tanto, $A$ es base de $\mathbb{R}^3$.

*Observación*:

Podríamos haber justificado que $A$ es conjunto generador del espacio $\mathbb{R}^3$ utilizando la propiedad que dice que tres vectores de $\mathbb{R}^3$ LI generan $\mathbb{R}^3$ sin aplicar la definición de conjunto generador.

b) Las coordenadas de un vector respecto de una base son los escalares que permiten expresar a dicho vector como combinación lineal de los vectores de esa base. Entonces, aplicaremos el resultado del inciso anterior para determinar $k_1, k_2, k_3$ de la combinación. Expresamos la C.L., luego igualamos componente a componente y resolvemos:

$(2, 0, 1) = k_1(1,3,1) + k_2(0,2,-1) + k_3(0,0,5)$

Luego

$k_1 = 2$ ; $k_2 = \frac{1}{2}(0 - 3.2) = -3$; $k_3 = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{2}(0 - 3.2) - 2\right) = \frac{-4}{5}$.

Por lo tanto

$(\mathbf{v})_A = (2, -3, -4/5)$.

c) El conjunto {(1, 3, 1); (0, 2, -1); (0, 0, 5); (2, 0, 1)} es conjunto LD, porque sabemos que el cuarto vector del conjunto se puede expresar como combinación lineal de los demás vectores del conjunto teniendo en cuenta el resultado del inciso (b):

$$(2, 0, 1) = 2(1,3,1) - 3(0,2,-1) - \frac{4}{5}(0,0,5)$$

## 4.

a) Este conjunto *no* constituye una base de $\mathbb{R}^2$porque, aunque son LI , los vectores no pertenecen al espacio vectorial.

b) Este conjunto tiene vectores de $\mathbb{R}^2$ , pero uno se puede expresar como combinación lineal del otro $(2,2) = \frac{1}{2}(4,4)$ , luego son LD . Por ello este conjunto *no* es base de $\mathbb{R}^2$

c) No es base de $\mathbb{R}^2$ por ser tres vectores de $\mathbb{R}^2$ , uno cualquiera de ellos se puede expresar como combinación de los otros dos. Una base tiene la cantidad de vectores LI coincidente con la dimensión del espacio vectorial.

d) Veamos si los dos vectores dados de $\mathbb{R}^2$ , son o no LI.

$(0,0) = k_1(1,-2) + k_2(0,5)$

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{k}_1 + 0\mathrm{k}_2 \\ 0 = -2\mathrm{k}_1 + 5\mathrm{k}_2 \end{cases}$$

$k_1 = 0$ y $k_2 = 0$

Siendo los escalares únicamente nulos para escribir al vector nulo como C.L. de los vectores dados, éstos son LI y dos vectores de $\mathbb{R}^2$ LI generan a $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto el conjunto *es base* de $\mathbb{R}^2$.

## 5.

a) Se denomina base canónica de $\mathbb{R}^n$ al conjunto $\{(1,........,0),(0,1,.......,0),...,(0,0,.....,1)\}$ con n vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes, por lo que generan $\mathbb{R}^n$ .

Para $\mathbb{R}^3$ la base canónica es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}=\{\breve{i},\breve{j},\breve{k}\}$

b) Calculamos las componentes del vector $\boldsymbol{w}$ aplicando la operación vectorial producto por un escalar:

$\boldsymbol{w} = 5\boldsymbol{v} = 5(-1,3,2)$

Luego $\boldsymbol{w} = (-5, 15, 10)$.

c) Como $\boldsymbol{w}$ es combinación lineal de $\boldsymbol{v}$, por lo tanto $\{\boldsymbol{v};\ \boldsymbol{w};\ \boldsymbol{a}\}$ es conjunto LD cualquiera sea el vector $\boldsymbol{a}$ que se agregue al conjunto. Al ser siempre LD el conjunto propuesto no será base de $\mathbb{R}^3$.

d) Para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se necesitan tres vectores LI, sabemos que si uno de ellos tiene una componente nula, los otros, o al menos uno de los otros tendrá que tener una componente en dicho lugar distinta de cero, de modo de no poder ser combinación lineal de este vector. Proponemos como posible base al conjunto $B=\{(1,2,0),(0,1,-1),(2,0,1)\}$, verificamos analíticamente que es LI, plantando la C.L. de ellos que da el vector nulo e igualando componente a componente:

$$\begin{cases} 0 = k_1 + 2k_3 \\ 0 = 2k_1 + k_2 \\ 0 = -k_2 + k_3 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, vemos que es un sistema compatible determinado cuya única solución es la solución nula o solución trivial $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Luego el conjunto es LI.
Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ LI, generan $\mathbb{R}^3$ por lo que podemos concluir que el conjunto $B$ propuesto es base de $\mathbb{R}^3$.

e) Expresamos al vector $\boldsymbol{v}$ como combinación lineal de los vectores de $B$:

$(-1,3,2) = k_1(1,2,0) + k_2(0,1,-1) + k_3(2,0,1)$

Igualamos componente a componente:

$$\begin{cases} -1 = k_1 + 2k_3 \\ 3 = 2k_1 + k_2 \\ 2 = -k_2 + k_3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos que: $(\boldsymbol{v})_B = \left(\frac{11}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{7}{3}\right)$

Repetimos el procedimiento para el vector $\boldsymbol{w}$**,** lo expresamos como combinación lineal de los vectores de $B$:

$(-5,15,10) = k_1(1,2,0) + k_2(0,1,-1) + k_3(2,0,1)$

Igualamos componente a componente:

$$\begin{cases} -5 = k_1 + 2k_3 \\ 15 = 2k_1 + k_2 \\ 10 = -k_2 + k_3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema y encontramos que: $(\boldsymbol{w})_B = \left(\frac{55}{3}, -\frac{65}{3}, -\frac{35}{3}\right)$

# 6.

a) Para que S sea subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ debe satisfacer las condiciones del Teorema [Libro Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías], vamos a verificarlas:

- S no es vacío: existen vectores de $\mathbb{R}^2$de la forma $(x, 4x)$.

- El vector $\mathbf{0} = (0{,}0)$ pertenece a S porque $(0{,}0) \ = (0{,}4.0)$

- Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores de S, $\boldsymbol{u}$+$\boldsymbol{v}$ debe pertenecer a S, lo probamos aplicando la suma en $\mathbb{R}^2$:

$(x_1, 4x_1) + (x_2, 4x_2) = (x_1 + x_2, 4(x_1 + x_2))$, efectivamente el vector resultante de la suma vectorial cumple con la definición de un vector de S.

- Si $\boldsymbol{u}$ pertenece a S, $k\boldsymbol{u}$ debe pertenecer a S lo probaremos aplicando la multiplicación por un escalar en $\mathbb{R}^2$:

$k(x, 4x) = (kx, 4(kx))$ , el vector resultante del producto por un escalar cumple con la definición de un vector de S.

Luego, S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ .

*<u>Observación</u>*:

Cada vector de S está asociado a un punto de la recta y=4x que pasa por el (0,0) y tiene pendiente 4. Es posible demostrar que todas las rectas en $\mathbb{R}^2$que contienen a (0,0) son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ .

b) El conjunto B, genera todos los vectores $\boldsymbol{u} = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ que resultan de la combinación lineal del vector (1,4), es decir: $\boldsymbol{u} = k\ (1, 4)$ con $k \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el conjunto $B$ genera al subespacio S de $\mathbb{R}^2$.

c) El conjunto $B = \{(1,4)\}$ es LI porque un solo vector no nulo siempre es LI y por lo justificado en el inciso b) es conjunto generador de $S$, esto nos permite afirmar que $B$ constituye una base para $S$ y al tener un solo vector concluimos que la $dim(S) = 1$.

d) D no es subespacio de $\mathbb{R}^2$ ya que el vector nulo de $\mathbb{R}^2$ no es vector de $D$, por no satisfacer la condición de pertenencia al conjunto.

*<u>Interpretación geométrica</u>*:

$D$ representa una recta de pendiente m=4 y ordenada 3. Las rectas que no contienen al origen de coordenadas no son subespacios de $\mathbb{R}^2$.

# 7.

a) El conjunto dado no es una base de $\mathbb{R}^3$ porque la dimensión de dicho espacio no coincide con el número de vectores del conjunto, éste sólo tiene 2 vectores y la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3.

b) Para que un conjunto de vectores sea base de $\mathbb{R}^3$, los vectores deben ser de $\mathbb{R}^3$. Los vectores dados son vectores de $R^2$.

c) El vector (0,0,0) es combinación lineal de cualquier par de vectores de $\mathbb{R}^3$, por lo que el conjunto no es L I, y por lo tanto no es base de $\mathbb{R}^3$.

d) El conjunto contiene 3 vectores de $\mathbb{R}^3$. Veamos si son linealmente independientes:

$$(0,0,0) = k_1(4,0,0) + k_2(1,-3,0) + k_3(-2,6,5)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 4k_1 + k_2 - 2k_3 \\ \left.\begin{array}{l} 0 = -3k_2 + 6k_3 \Rightarrow k_2 = 2k_3 \\ 0 = 5k_3 \Rightarrow k_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = 0$$

Siendo solución única del sistema homogéneo la solución trivial, el conjunto es LI. Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ LI generan $\mathbb{R}^3$, por lo tanto este conjunto es base de $\mathbb{R}^3$.

# 8.

a) El conjunto que genera $\{\boldsymbol{u}\}$ contendrá a todas las combinaciones lineales posibles del vector $\boldsymbol{u}$, es decir, $S = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u} \text{ con } k \in \mathbb{R}\}$. Los vectores generados por $\boldsymbol{u}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ que pertenecen a una misma recta de acción.

Interpretación geométrica:

Un solo vector de $\mathbb{R}^3$ no nulo genera un subespacio de $\mathbb{R}^3$de dimensión uno, que es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

b) El conjunto que genera $\{\boldsymbol{u};\ \boldsymbol{v}\}$ contendrá a todas las combinaciones lineales posibles de los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, es decir, $S' = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3/\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} \text{ con } k \in R \wedge t \in R\}$. Los vectores generados por $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ que pertenecen a un mismo plano.

Interpretación geométrica:

Dos vectores de $\mathbb{R}^3$ LI, generan un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2, que es un plano que contiene al origen de coordenadas.

c) Son 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ LI, por lo tanto generan a todo $\mathbb{R}^3$.

# 9.

Los incisos a), b), c) y d) deben desarrollarse siguiendo los pasos que se indican en los enunciados.

e) Analíticamente obtenemos los escalares $k_1$ y $k_2$, expresando al vector $\boldsymbol{w}$ como combinación lineal de $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$: $(0, 2.5) = k_1(2, 1.5) + k_2(-0.5\,, 1)$

$$\begin{cases} 0 = 2k_1 - 0.5\,k_2 \\ 2.5 = 1.5k_1 + k_2 \end{cases} \Rightarrow\ k_1 = \frac{5}{11}\ \ y\ k_2 = \frac{20}{11}$$

f) No se modifican las respuestas anteriores si cambian los puntos que determinan el inicio de los vectores $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$, esto ocurre porque los vectores son segmentos de rectas dirigidos y son libres. Esto quiere decir que su módulo, dirección y sentido no se modifica si el punto inicial del vector se ubica en otro punto del plano o del espacio tridimensional.

g) El conjunto B = $\{\boldsymbol{v_1}\ ;\ \boldsymbol{v_2}\}$ es conjunto generador de $\mathbb{R}^2$ ya que gráficamente sabemos que los vectores son LI (no pertenecen a la misma recta de acción) y 2 vectores LI de $\mathbb{R}^2$ generan al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ . Podemos concluir que el conjunto $\{\boldsymbol{v_1}\ ;\ \boldsymbol{v_2}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

h) A partir de los resultados anteriores en e) y g) resulta: $(\boldsymbol{w})_{\{\boldsymbol{v_1}\,;\,\boldsymbol{v_2}\}} = \left(\frac{5}{11}, \frac{20}{11}\right)$.

i) Siendo $B$ base de $\mathbb{R}^2$ y teniendo como dato $(\boldsymbol{u})_B = (-2{,}3)$ calculamos las coordenadas del vector $\boldsymbol{u}$ realizado la suma vectorial: $\boldsymbol{u} = -2\boldsymbol{v_1} + 3\boldsymbol{v_2}$. En términos de sus componentes:

$\boldsymbol{u} = -2(2, 1.5) + 3(-0.5{,}1)\ ;\ \boldsymbol{u} = (-4, -3) + (-1.5, 3)$

$\boldsymbol{u} = (-5.5\,, 0)$

j)

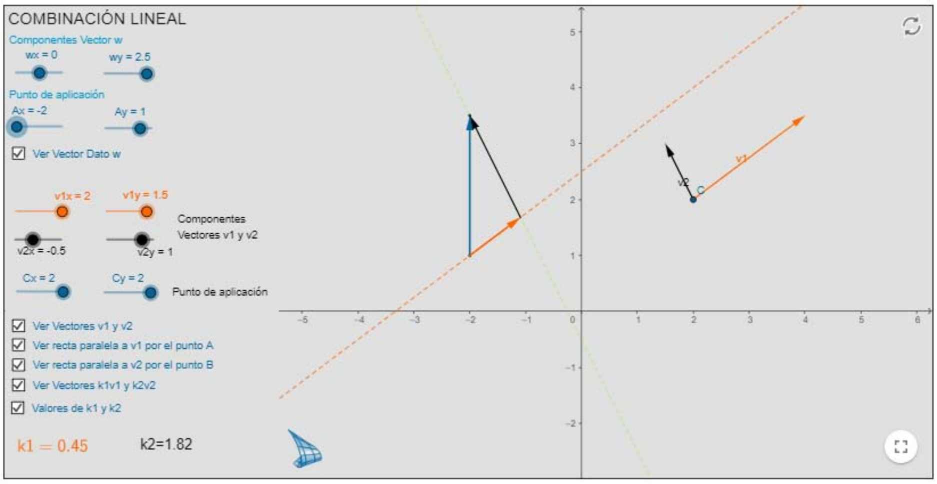



*Figura* 3.4. Verificación del Ejercicio 9. [Libro Interactivo Geometría Dinámica].

# 3.2 VECTORES GEOMÉTRICOS. PRODUCTO ESCALAR

## 10.

a) Se denominan *cosenos directores* de un vector respecto de las coordenadas ortogonales $xyz$ a los cosenos de los ángulos que dicho vector forma con el sentido positivo de los ejes coordenados. Los ángulos se miden entre 0° y 180°, por lo que los valores de los cosenos pueden ser positivos o negativos.

Existe una relación fundamental entre los cosenos directores:

$$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1$$

Utilizando esta ecuación despejamos $cos\,\alpha$

$$cos\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\,\beta - cos^2\,\gamma}$$

Sustituyendo por los valores correspondientes, obtenemos:

$$cos\,\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

*Observación:*

Dado que los cosenos directores pueden ser positivos o negativos, otra respuesta posible es que $\cos\alpha = -1/2$.

b) Se denomina *vector unitario* o versor, al vector que tiene módulo 1.

Si un vector unitario $\boldsymbol{u}$ tiene la misma dirección que un vector dado $\boldsymbol{v}$, éste se puede expresar como combinación lineal de $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}, k \in \mathbb{R}$$

Si ambos tienen el mismo sentido, $k$ será positivo. Si tienen sentido opuesto, entonces $k$ será negativo. En nuestro caso se requiere que tengan igual sentido, por lo tanto $k \in \mathbb{R}^+$

Para calcular el módulo de $\boldsymbol{v}$ tenemos que:

$\|\boldsymbol{v}\| = k\|\boldsymbol{u}\|$ y como el módulo de $\boldsymbol{u}$ es 1, $\|\boldsymbol{v}\| = k$ , y sustituyendo en $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$ resulta:

$$\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|\boldsymbol{u} \;\; ; \;\; \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \;\; ; \;\; \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \;\; ; \;\; \boldsymbol{u} = \frac{(v_x, v_y, v_z)}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$

$$\boldsymbol{v} = \left(4{,}4\sqrt{2}, 4\right) \;\; ; \;\; \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 + 4^2} = 8$$

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{4}{8}, \frac{4\sqrt{2}}{8}, \frac{4}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Observamos que las componentes del vector unitario o versor $\boldsymbol{v}$ obtenido a partir del vector dato $\boldsymbol{u}$, coinciden con los cosenos directores del vector $\boldsymbol{v}$ del inciso a).

c) Buscamos $\boldsymbol{w}$ tal que $\boldsymbol{w}= k\boldsymbol{v}$, sabiendo que su módulo es igual a 4.

$$\boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{w}\|\boldsymbol{v} \;\; ; \;\; \boldsymbol{w} = 4\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(2{,}2\sqrt{2}, 2\right)$$

## 11.

a) Existen dos condiciones para determinar al vector **c**:

- que cumpla con la condición que el producto escalar $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,.\,\boldsymbol{c}=15$ y
- la de perpendicularidad éntrelos vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$

Planteamos entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).\boldsymbol{c}=15\\ \quad\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}=0\end{cases}$$

Trabajamos la primera ecuación utilizando las propiedades de producto escalar, en este caso la distributiva respecto de la suma de vectores: $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}=15$

Usando la definición de producto escalar a partir de las componentes de los vectores, tenemos:

$(4\,,3).(x\,,y)+(-2{,}6).(x,y)=15$

$4x+3y-2x+6y=15$

$2x+9y=15$

La segunda ecuación nos queda:

$(-2{,}6).(x,y)=0$

$-2x+6y=0$

El sistema de ecuaciones a resolver queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases}2x+9y=15\\ -2x+6y=0\end{cases}$$

Cuya solución es $x=3\,;y=1$

Finalmente, el vector **c**= (3,1) es el que verifica las dos condiciones impuestas.

b)

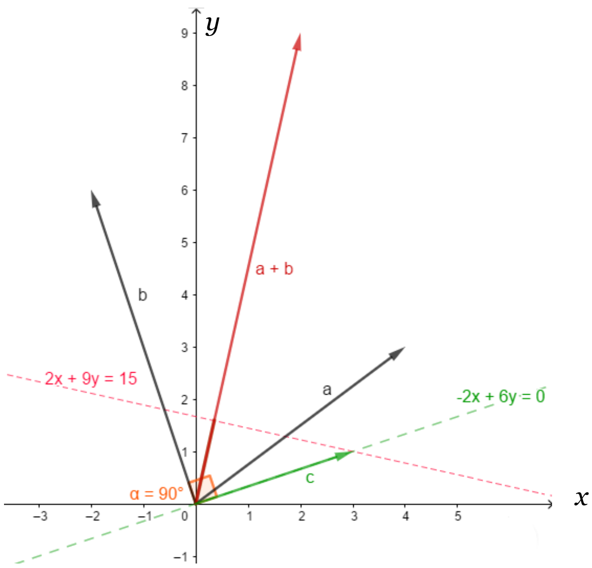



*Figura* 3.5. Representación gráfica del Ejercicio 11. [GeoGebra]

*Observación*:

Sobre la recta -2x+6y=0 se ubican los puntos extremos de todos los vectores perpendiculares al vector $\boldsymbol{b}$.

De la misma manera, sobre la recta 2x+9y=15 se ubican los puntos extremos de todos los vectores que cumplen con la primera condición $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).\boldsymbol{c}=15$

c) c.i) { $\boldsymbol{a}$ ; $\boldsymbol{b}$ } Es conjunto LI ya que son dos vectores no paralelos, es decir $\boldsymbol{a} \neq k\boldsymbol{b}$. Uno no puede escribirse como combinación lineal del otro. Esto significa que la combinación lineal entre ellos igualada al vector nulo, admite únicamente escalares nulos.

c.ii) { $\boldsymbol{b}$ ; $\boldsymbol{c}$ } Igual que el caso anterior, es conjunto LI ya que son dos vectores no paralelos, es decir $\boldsymbol{b} \neq k\boldsymbol{c}$

c.iii) { $\boldsymbol{a}$ ; $\boldsymbol{b}$ ; $\boldsymbol{a}$+$\boldsymbol{b}$ } Es un conjunto LD, ya que vemos que el tercer vector es combinación lineal de los otros dos. Además, como son vectores de $\mathbb{R}^2$, un conjunto con tres o más vectores no puede ser LI.

c.iv) { $\boldsymbol{a}$ ; $\boldsymbol{b}$ ; $\boldsymbol{c}$ } Es un conjunto LD, ya que al ser tres vectores de $\mathbb{R}^2$, siempre existirá la posibilidad de expresar alguno de ellos como combinación lineal de los otros.

## 12.

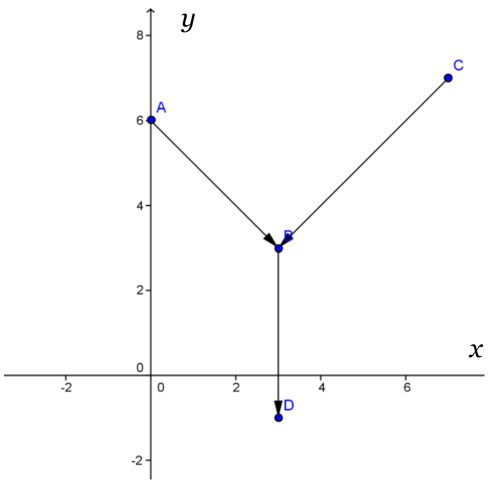



*Figura* 3.6. Representación gráfica del Ejercicio 12. [GeoGebra]

a) $\boldsymbol{AB}=\mathbf{OB}-\mathbf{OA}=(3-0{,}3-6)=(3,-3)$

$\boldsymbol{CB}=\mathbf{OB}-\mathbf{OC}=(3-7{,}3-7)=(-4,-4)$

$\|\boldsymbol{F}\|=4$

La fuerza $\boldsymbol{F}$ es vertical, por lo tanto, es paralela al versor $\check{\boldsymbol{\jmath}}$. Su dirección es hacia abajo, entonces debe tener sentido opuesto a dicho versor, es decir:

$\boldsymbol{F}=\|\boldsymbol{F}\|(-\check{\boldsymbol{\jmath}})$

$\boldsymbol{F}=4(0,-1)=(0,-4)$ kN

*Observación*:

Si bien $\boldsymbol{F}$ se encuentra aplicada en el punto B, esto no influye en el cálculo de las componentes del vector $\boldsymbol{F}$.

b) La longitud de cada una de las cuerdas es el módulo del vector que la representa

$\|\boldsymbol{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ [L]

$\|\boldsymbol{CB}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ [L]

[L]: unidades de longitud

c) La proyección de un vector respecto de otro se evalúa como

$$Proy_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

que proviene de la definición de producto escalar entre dos vectores: $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{v}\| \cos\alpha$, siendo el ángulo que forman entre sí los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

Podemos observar gráficamente las proyecciones del vector $\boldsymbol{F}$ sobre las direcciones de $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{CB}$

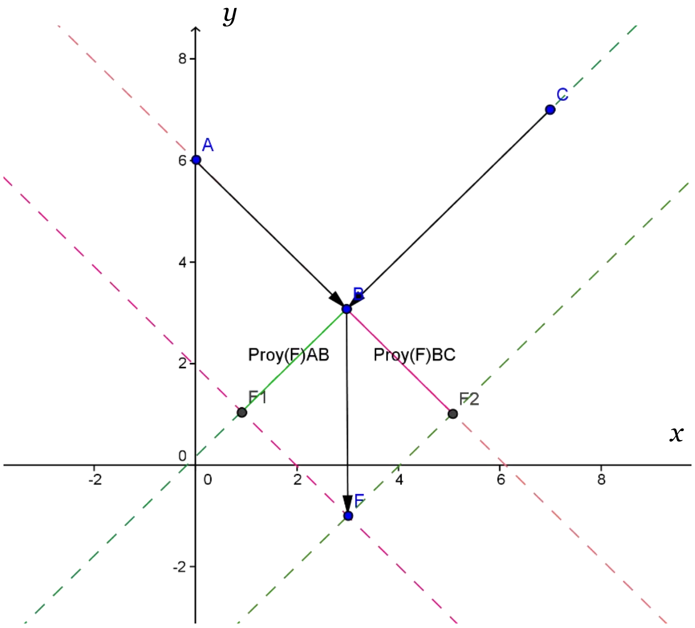



Figura 3.7. Representación gráfica ejercicio 12. [GeoGebra]

$$Proy_{\boldsymbol{AB}}\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{F}.\boldsymbol{AB}}{\|\boldsymbol{AB}\|} = \frac{(0,-4).(3,-3)}{3\sqrt{2}} = \frac{0+12}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$Proy_{\boldsymbol{CB}}\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{F}.\boldsymbol{CB}}{\|\boldsymbol{CB}\|} = \frac{(0,-4).(-4,-4)}{4\sqrt{2}} = \frac{0+16}{4\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

El signo de la proyección indica si el sentido del vector proyección coincide o no con el sentido del vector $\boldsymbol{v}$. En este caso ambas proyecciones son positivas.

El *vector proyección* de $\boldsymbol{u}$ respecto de un vector $\boldsymbol{v}$, es un vector que tiene como módulo al valor absoluto de la proyección $Proy_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$ y por dirección, la dirección de $\boldsymbol{v}$.

$$\overrightarrow{Proy_v\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}.\breve{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$$

Entonces:

$$\overrightarrow{Proy_{\boldsymbol{AB}}\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{AB}\frac{\boldsymbol{AB}}{\|\boldsymbol{AB}\|^2} = \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{(3,-3)}{3\sqrt{2}} = (2\,,-2)$$

$$\overrightarrow{Proy_{\boldsymbol{CB}}\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{CB}\frac{\boldsymbol{CB}}{\|\boldsymbol{CB}\|^2} = \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{(-4,-4)}{4\sqrt{2}} = (-2\,,-2)$$

## 13.

$$\boldsymbol{Proy_b a} = \frac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{(4,-1,-4).(1,1,2)}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{4-1-8}{\sqrt{6}} = \frac{-5}{\sqrt{6}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{Proy_b a}} = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}\frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|^2} = -\frac{5}{\sqrt{6}}\frac{(1,1,2)}{\sqrt{6}} = \left(-\frac{5}{6}\,,-\frac{5}{6}\,,-\frac{5}{3}\right)$$

## 14.

a) Para calcular el ángulo entre dos vectores $\boldsymbol{u} = (u_1, v_1)\ y\ \boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$

utilizamos la definición de producto escalar $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$ para despejar $\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$$

En nuestro caso, vemos que $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \left(\frac{3}{5}\,;\,\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\,;-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = 0$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = 0$$

por lo que el ángulo es de 90°. Es decir, los vectores dados son perpendiculares.

b)

$$Proy_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{u}\|} = \frac{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\cdot(3,9)}{\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}} = \frac{9}{5} + \frac{36}{5} = 9$$

$$Proy_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)\cdot(3,9)}{\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{9}{25}}} = \frac{12}{5} - \frac{27}{5} = -3$$

c) Se denomina *base ortonormal* (BON) de un espacio vectorial a aquella base cuyos vectores son unitarios y perpendiculares entre sí.

Por el inciso a) sabemos que $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son perpendiculares. Siendo perpendiculares, son linealmente independientes. Y dos vectores de $\mathbb{R}^2$ LI generan a $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto forman una base de $\mathbb{R}^2$. Ahora bien, esa base es una base ortogonal porque los vectores son ortogonales. Verificamos además que el módulo de cada uno de ellos es 1, luego el conjunto $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$es una BON de $\mathbb{R}^2$.

d) Para determinar las coordenadas de un vector en una base dada, se expresa dicho vector como combinación lineal de los vectores de la base. Los valores que toman los escalares de la combinación son las coordenadas buscadas.

$$\boldsymbol{w} = (3{,}9) = k_1\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) + k_2\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$$

$$\begin{cases} 3 = \frac{3}{5}k_1 + \frac{4}{5}k_2 \\ 9 = \frac{4}{5}k_1 - \frac{3}{5}k_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 9 \ \ ; k_2 = -3$$

Entonces: $(\boldsymbol{w})_B = (9\,,-3)$

e) Observamos que las coordenadas de $\boldsymbol{w}$ en la base B coinciden con las proyecciones ortogonales de dicho vector sobre los vectores de B. Esto ocurre porque se trata de una *base ortonormal* BON.

Es decir, cuando tenemos una *base ortonormal* $B = \{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$ se cumple que:

$(\boldsymbol{w})_B = (k_1\,; k_2)$

Siendo $k_1 = \boldsymbol{w}.\boldsymbol{u} = Proy_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}$ y $k_2 = \boldsymbol{w}.\boldsymbol{v} = Proy_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}$

f)

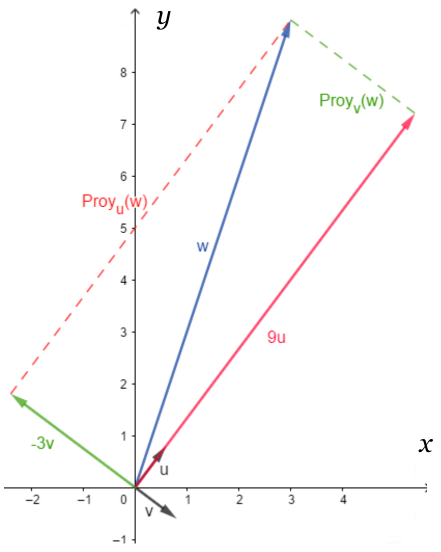



*Figura* 3.8. Representación gráfica ejercicio 14. [GeoGebra]

## 15.

a) Para encontrar el vector $\boldsymbol{c} = (x, y, z)$, escribimos las ecuaciones correspondientes a cada condición que debe cumplir el vector $\boldsymbol{c}$, y resolvemos el sistema de ecuaciones resultante.

Si $\boldsymbol{c}$ es C.L. de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, entonces tenemos que:

$\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$

$(x, y, z) = k_1(1, -1, 2) + k_2(2, 1, -1) \quad (I)$

Por otro lado, si $\boldsymbol{c}$ es perpendicular a $\boldsymbol{a}$, entonces se cumple que $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 0$. Es decir,

$(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = 0$

$x - y + 2z = 0 \qquad (II)$

Con (I) y (II) formamos el sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{cases} x = k_1 + 2k_2 \\ y = -k_1 + k_2 \\ z = 2k_1 - k_2 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Sustituimos las expresiones de $x$, $y$ y $z$ en la última ecuación:

$(k_1 + 2k_2) - (-k_1 + k_2) + 2(2k_1 - k_2) = 0$

De donde obtenemos $6k_1 - k_2 = 0$ . Es decir, $k_2 = 6k_1$

Hemos obtenido una relación que debe cumplirse entre los escalares $k_1$ y $k_2$. Es decir, $k_1$ puede tomar cualquier valor real y $k_2$ dependerá del valor elegido. Entonces existen infinitas soluciones (lo cual puede advertirse al considerar que el sistema de ecuaciones a resolver tiene más incógnitas que ecuaciones). El vector $\boldsymbol{c}$ buscado está dado por:

$\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + 6k_1\boldsymbol{b} = k_1(\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b}) = k_1[(1, -1, 2) + 6(2, 1, -1)]$

$\boldsymbol{c} = k_1(13\,, 5\,, -4)$

El vector $\boldsymbol{c}$ no es único, sino que todos los vectores paralelos al vector (13 , 5 , -4) son solución del problema.

*Interpretación geométrica*:

Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos vectores de $\mathbb{R}^3$ LI. Toda C.L. de ellos dará por resultado un vector de $\mathbb{R}^3$ que pertenece al plano que ellos definen. El vector $\boldsymbol{c}$, por lo tanto, pertenece a dicho plano, y a su vez forma un ángulo recto con $\boldsymbol{a}$.

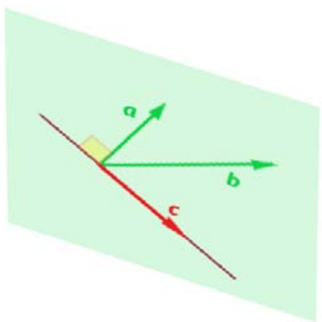



*Figura* 3.9. Interpretación geométrica del Ejercicio 15.a.

b) Un vector unitario es aquel que tiene módulo 1. A su vez, un vector que tenga la dirección de otro vector se puede expresar como combinación lineal del mismo. Entonces, un vector unitario en la dirección del vector $\boldsymbol{a}$ es:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{1+1+4}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

c) c.i) { $\boldsymbol{a}$ ; $\boldsymbol{b}$ ; $\boldsymbol{c}$ } es un conjunto LD porque el vector $\boldsymbol{c}$ es CL de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$**.** Eso significa que hay dependencia lineal entre los vectores de ese conjunto. El espacio generado por el conjunto es un plano en $\mathbb{R}^3$

c.ii) { $\boldsymbol{a}$ ; $\boldsymbol{b}$ } es un conjunto LI porque se trata de un par de vectores no paralelos. En efecto, se verifica que $\boldsymbol{a} \neq k\boldsymbol{b}$, es decir, que un vector del conjunto no puede escribirse como CL del otro. El espacio generado por el conjunto es un plano en $\mathbb{R}^3$.

*Observación*:

El plano generado por el conjunto $\{\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}\}$ es el mismo plano que el generado por el conjunto { $\boldsymbol{a}$ ; $\boldsymbol{b}$ ; $\boldsymbol{c}$ }. Es decir, los vectores que se pueden obtener al combinar $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son los mismos que se pueden obtener al combinar $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

*c*.iii) { $\boldsymbol{a}$ } es un conjunto LI ya que, por definición de independencia lineal, la C.L. $k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ sólo admite como solución $k = 0$. Cualquier conjunto que tenga un único vector no nulo, es LI. El espacio que genera este conjunto es una recta en $\mathbb{R}^3$.

## 16.

En el ejercicio 10 se ha encontrado que un vector unitario en la dirección de un vector dado $\boldsymbol{v}$ se calcula como $\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$ . Puesto que el vector proyección $\boldsymbol{w}$ de un vector dado $\boldsymbol{u}$ en la dirección de $\boldsymbol{v}$ tiene la misma dirección que $\boldsymbol{v}$, entonces $\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$ es el versor que indica la dirección del vector proyección $\boldsymbol{w}$. Por otra parte, el módulo de $\boldsymbol{w}$ será igual al valor absoluto de la *proyección ortogonal de* $\boldsymbol{u}$ *en* $\boldsymbol{v}$ (en el caso que dicha proyección sea positiva, su valor coincide con el módulo de $\boldsymbol{w}$). [ ver en Texto *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*]

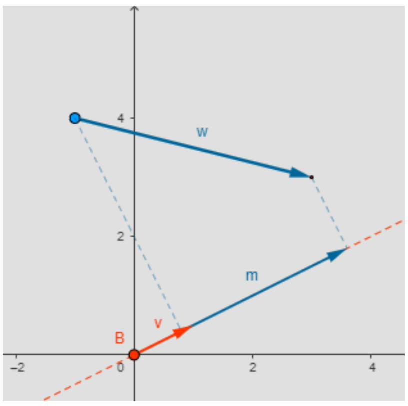



*Figura* 3.10. Representación gráfica del Ejercicio 16 [Libro Interactivo Geometría Dinámica].

Para expresar la proyección de un vector $\boldsymbol{u}$ sobre otro $\boldsymbol{v}$ se utiliza el producto escalar entre ellos:

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$$

$$Proy_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\| \cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

Entonces, construimos al vector $\boldsymbol{w}$ multiplicando al versor que le da su dirección ($\breve{\boldsymbol{v}}$), por el escalar que le da su módulo y sentido ($Proy_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$):

$$\boldsymbol{w} = (Proy_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u})\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \overline{Proy_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}}$$

*Observación*:

Para el caso en que la proyección ortogonal es negativa, $\boldsymbol{w}$ tiene sentido opuesto a $\boldsymbol{v}$, entonces, el escalar por el cual hay que multiplicar a $\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$ debe ser negativo. Por eso, la ecuación encontrada es correcta para este caso también.

## 17.

a) Primero encontramos a $v$, que es la combinación lineal de $a$ y de $b$:

$$\boldsymbol{v} = 2(1,2) + (0,-2) = (2,2)$$

Luego, el vector proyección de $w$ sobre $v$ es:

$$\overline{\boldsymbol{Proy_v w}} = \frac{\boldsymbol{w}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{(-4,2).(2,2)}{\sqrt{4+4}}\frac{(2,2)}{\sqrt{4+4}} = \frac{-4}{\sqrt{8}}\frac{(2,2)}{\sqrt{8}} = \frac{(-8,-8)}{8} = (-1,-1)$$

b)

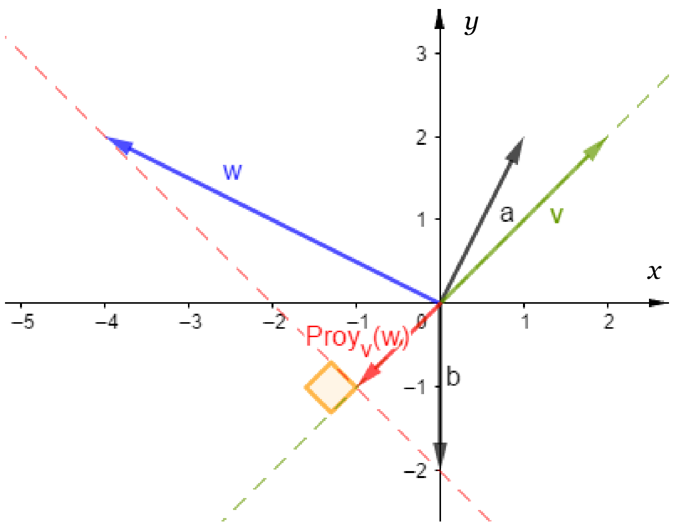



*Figura* 3.11. Representación gráfica del ejercicio 17. [GeoGebra]

Verificamos gráficamente que el vector (-1,-1) tiene la misma dirección de $\boldsymbol{v}$, y que se obtiene al proyectar ortogonalmente a $w$: notar que la línea punteada roja es perpendicular a la línea verde que indica la dirección de $\boldsymbol{v}$. El valor negativo de la proyección de $w$ en la dirección de $v$ indica que el vector proyección tiene sentido opuesto al del vector $v$,

d)

d.i) { $\boldsymbol{a}$ , $\boldsymbol{b}$ , $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ } es un conjunto LD, ya que se observa que el tercer vector es C.L. de los dos primeros. Además, por tratarse de vectores de $\mathbb{R}^2$, sabemos que como máximo podemos tener dos vectores LI. Entonces, como el conjunto tiene tres vectores, se concluye que es LD. El espacio generado es todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, ya que combinando los vectores del conjunto, es posible obtener cualquier otro vector $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$.

d.ii) $\{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\}$ es un conjunto LI, ya que es un par de vectores no paralelos, Es decir, $\boldsymbol{w} \neq k\boldsymbol{v}$. El espacio generado es todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, ya que combinando los vectores del conjunto, es posible obtener cualquier otro vector $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$.

d.iii) $\{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}\}$ es un conjunto LI, ya que es un par de vectores no paralelos: $\boldsymbol{w} \neq k\boldsymbol{b}$. El espacio generado es todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, ya que combinando los vectores del conjunto, es posible obtener cualquier otro vector $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$.

d.iv) El vector $\overline{\mathrm{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{w}}$, tiene la misma dirección que el vector $\mathbf{v}$ (son paralelos), por lo tanto, el conjunto { $\overline{\mathrm{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{w}}$ ; $\mathbf{v}$ } es LD.

Por otra parte, el conjunto { $\overline{\mathrm{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{w}}$ ; $\mathbf{w}$ } es LI, ya que ambos vectores no tienen la misma dirección (no son paralelos).

## 18.

a) Siendo el punto R(0,0,5) el extremo superior de la antena, armamos los vectores $\boldsymbol{RP_1}$, $\boldsymbol{RP_2}$ y $\boldsymbol{RP_3}$ que representan a cada tensor. Luego verificamos que son ortogonales, evaluando el producto escalar por pares y viendo que efectivamente éste sea nulo.

$\boldsymbol{RP_1} = \boldsymbol{OP_1} - \boldsymbol{OR} = (-5,-5,0) - (0,0,5) = (-5,-5,-5)$

$\boldsymbol{RP_2} = \boldsymbol{OP_2} - \boldsymbol{OR} = (0,5,0) - (0,0,5) = (0,5,-5)$

$\boldsymbol{RP_3} = \boldsymbol{OP_3} - \boldsymbol{OR} = (10,-5,0) - (0,0,5) = (10,-5,-5)$

Verificamos la condición de ortogonalidad calculando el producto escalar:

$\boldsymbol{RP_1} \cdot \boldsymbol{RP_2} = (-5,-5,-5) \cdot (0,5,-5) = -25 + 25 = 0$

$\boldsymbol{RP_1} \cdot \boldsymbol{RP_3} = (-5,-5,-5) \cdot (10,-5,-5) = -50 + 25 + 25 = 0$

$\boldsymbol{RP_3} \cdot \boldsymbol{RP_2} = (10,-5,-5) \cdot (0,5,-5) = -25 + 25 = 0$

b) Como los tres vectores son ortogonales, sabemos que son LI, y al ser tres, sabemos que generan $\mathbb{R}^3$ por lo cual forman una *base ortogonal* de $\mathbb{R}^3$. Si tomamos los vectores normalizados (es decir, sus versores), tendremos una BON de $\mathbb{R}^3$.

$$\boldsymbol{b_1} = \frac{\boldsymbol{RP_1}}{\|\boldsymbol{RP_1}\|} = \left(-\frac{5}{\sqrt{75}}, -\frac{5}{\sqrt{75}}, -\frac{5}{\sqrt{75}}\right)$$

$$\boldsymbol{b_2} = \frac{\boldsymbol{RP_2}}{\|\boldsymbol{RP_2}\|} = \left(0, \frac{5}{\sqrt{50}}, -\frac{5}{\sqrt{50}}\right)$$

$$\boldsymbol{b_3} = \frac{\boldsymbol{RP_3}}{\|\boldsymbol{RP_3}\|} = \left(\frac{10}{\sqrt{150}}, -\frac{5}{\sqrt{150}}, -\frac{5}{\sqrt{150}}\right)$$

$$BON = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}\}$$

c) En primer lugar escribimos el vector $\boldsymbol{F}$, sabiendo que su magnitud o módulo es de 750 N y que tiene la dirección y sentido del versor $-\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{F} = 750\,(-\boldsymbol{k}) = 750(0{,}0,-1) = (0{,}0,-750)N$$

Luego evaluamos las proyecciones de dicho vector en cada una de las tres direcciones:

$$Proy_{\boldsymbol{RP_1}}\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{RP_1}}{\|\boldsymbol{RP_1}\|} = \frac{(0{,}0,-750)\cdot(-5,-5,-5)}{\sqrt{75}} = \frac{3750}{\sqrt{75}}$$

$$Proy_{\boldsymbol{RP_2}}\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{RP_2}}{\|\boldsymbol{RP_2}\|} = \frac{(0{,}0,-750)\cdot(0{,}5,-5)}{\sqrt{50}} = \frac{3750}{\sqrt{50}}$$

$$Proy_{\boldsymbol{RP_3}}\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{RP_3}}{\|\boldsymbol{RP_3}\|} = \frac{(0{,}0,-750)\cdot(10,-5,-5)}{\sqrt{150}} = \frac{3750}{\sqrt{150}}$$

d) El Teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^3$ permite evaluar el módulo de un vector conocidas sus componentes en una base ortogonal:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Calculamos entonces el módulo del vector $\boldsymbol{F}$ usando las componentes ortogonales obtenidas en el inciso anterior y verificamos que el módulo de $\boldsymbol{F}$ efectivamente es de 750N:

$$\|\boldsymbol{F}\| = \sqrt{\frac{(3750)^2}{75} + \frac{(3750)^2}{50} + \frac{(3750)^2}{150}} = 750\ N$$

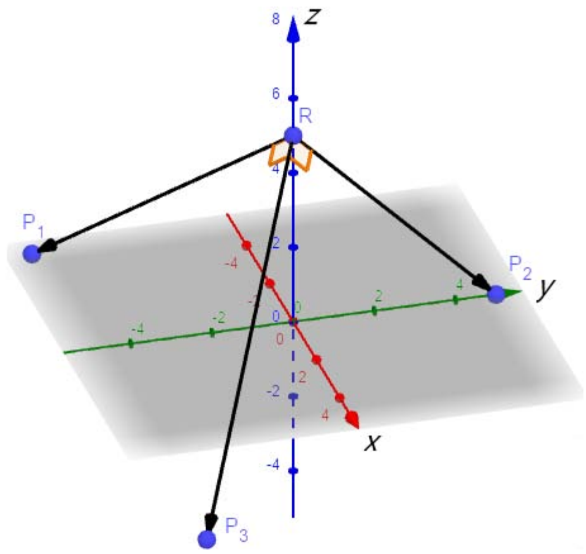



Figura 3.12. Representación gráfica del ejercicio 18. [GeoGebra]

# 3.3 PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO MIXTO.

## 19.

a) Calculamos el producto vectorial entre los vectores $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{OP}$. Un camino de resolución es:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{OP} \wedge \boldsymbol{f} = (3\breve{\imath} + \breve{\jmath} + 3\breve{k}) \wedge (20\breve{\imath} + 40\breve{\jmath} + 30\breve{k})$$

$$\boldsymbol{m} = 60\,(\breve{\imath} \wedge \breve{\imath}) + 20\,(\breve{\jmath} \wedge \breve{\imath}) + 60\,(\breve{k} \wedge \breve{\imath}) + 120\,(\breve{\imath} \wedge \breve{\jmath}) + 40\,(\breve{\jmath} \wedge \breve{\jmath}) + 120(\breve{k} \wedge \breve{\jmath}) + 90(\breve{\imath} \wedge \breve{k}) + 30(\breve{\jmath} \wedge \breve{k}) + 90(\breve{k} \wedge \breve{k})$$

$$\boldsymbol{m} = 0 - 20\breve{k} + 60\breve{\jmath} + 120\breve{k} + 0 - 120\breve{\imath} - 90\breve{\jmath} + 30\breve{\imath} + 0$$

$$\boldsymbol{m} = (-90, -30, 100)Nm$$

Otra manera de registrar el cálculo es:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{OP} \wedge \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{\imath}} & \breve{\boldsymbol{\jmath}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ 3 & 1 & 3 \\ 20 & 40 & 30 \end{vmatrix} = -90\breve{\boldsymbol{\imath}} - 30\breve{\jmath} + 100\breve{\boldsymbol{k}}$$

$$\boldsymbol{m} = (-90, -30, 100)\ Nm$$

*Observación adicional:*

El producto vectorial $\boldsymbol{m}$, entre los vectores dados $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{OP}$, siendo vectores no nulos, es un vector no nulo. Esto verifica que $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{OP}$ son vectores L.I. (no son paralelos) También podemos asegurar que $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{m}\}$ , $\{\boldsymbol{OP}, \boldsymbol{m}\}$ $y$ $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{OP}\}$ son conjuntos L.I. pero ninguno de ellos constituye una base de $\mathbb{R}^3$ sino de subespacios de $\mathbb{R}^3$. En cambio, $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{OP}, \boldsymbol{m}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ , ya que son 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ LI y por lo tanto generan a $\mathbb{R}^3$. Al ser conjunto LI y conjunto generador de $\mathbb{R}^3$, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Para verificar que dos vectores son perpendiculares, calculamos el producto escalar entre ellos:

$$\boldsymbol{m}\,.\,\boldsymbol{f} = (90,30,-100).(20,40,30) = 1800 + 1200 - 3000 = 0$$

$$\boldsymbol{m}.\boldsymbol{OP} = (90,30,-100).(3,1,3) = 270 + 30 - 300 = 0$$

Como ambos resultados son nulos hemos verificado que el vector momento de una fuerza $\boldsymbol{m}$ , es perpendicular a $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{OP}$.

## 20.

a) Consideremos que los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son los lados no paralelos de un paralelogramo como el de la figura y que α es el ángulo convexo que forman $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$. Al trazar una altura $h$ del paralelogramo (segmento perpendicular al lado v desde el extremo de u) queda determinado un triángulo rectángulo en el que $h$ es el cateto opuesto al ángulo $\propto$ y $\|\boldsymbol{u}\|$ es la longitud de la hipotenusa. Entonces: $h = \|\boldsymbol{u}\|\ sen \propto$ (I)

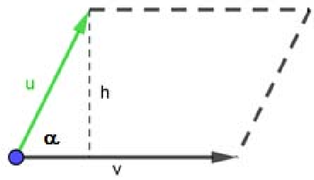



*Figura* 3.13. Representación gráfica Ejercicio 20.a.

El área $A$ del paralelogramo que tiene por lados no paralelos a $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, se obtiene a partir de la expresión $A = \|\boldsymbol{v}\| \; h$ . Considerando el resultado de (I), tenemos que:

$A = \|\boldsymbol{v}\| \; \|\boldsymbol{u}\| \; sen \propto$

Esta expresión corresponde al módulo del producto vectorial entre v y u, $\|\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}\|$.

Sustituyendo: $A = \|\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}\|$

b) Comencemos por graficar los tres puntos P, Q y R. Existen varias formas de determinar un paralelogramo con esos tres puntos ya que el punto $S(x, y, z)$ no es único.

<u>Primera solución posible</u>:

Consideremos los vectores $\boldsymbol{PQ} = (1{,}4\,, -2\,)$ y

$\boldsymbol{QR} = (-2{,}2, -2)$, lados no paralelos del paralelogramo.

Si S es el cuarto vértice del paralelogramo, se cumple:

$\boldsymbol{PS} = (x-1, y+2, z-3), \boldsymbol{PQ}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{PR}$ son coplanares, entonces el producto mixto entre ellos es nulo.

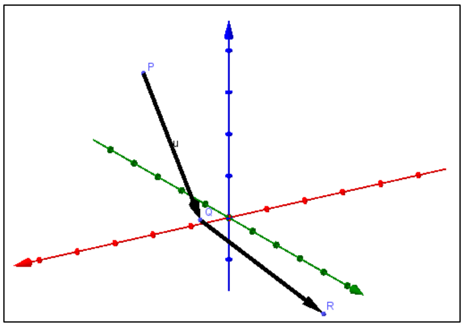



*Figura* 3.14. Representación gráfica del Ejercicio 20.b. [GeoGebra]

$$\boldsymbol{PS}\,.(\boldsymbol{PQ}\ \wedge \boldsymbol{PR}) = \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -4(x-1) + 6(y+2) + 10(z-3) = 0$$

$-4x + 6y + 10z = 14 \qquad (1)$

Si $\boldsymbol{PS} = (x-1, y+2, z-3)$ es paralelo a $\boldsymbol{QR} = (-2{,}2, -2)$, entonces el vector $\boldsymbol{PS}$ es combinación lineal de $\boldsymbol{QR}$, y como tienen la misma longitud el escalar de la combinación lineal es 1. Por lo tanto:

$(x-1, y+2, z-3) = (-2{,}2, -2)$

$$\begin{cases} x-1=-2 \\ y+2=2 \\ z-3=-2 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, obtenemos que las coordenadas del vértice son: $\boldsymbol{S}(-1,0,1)$ y verifica la ecuación (1).

<u>Segunda solución posible:</u>

Seleccionemos los vectores no paralelos del paralelogramo del siguiente modo: $PR$ y $RQ$.

$\boldsymbol{PR}=(-1,6,-4)$ y $\boldsymbol{RQ}=(2,-2,2)$

Si S es el cuarto vértice del paralelogramo, se cumple:

$\boldsymbol{PS}=(x-1,y+2,z-3)$, $\boldsymbol{PQ}\ y\ \boldsymbol{PR}$ son coplanares,

entonces el producto mixto entre ellos es nulo.

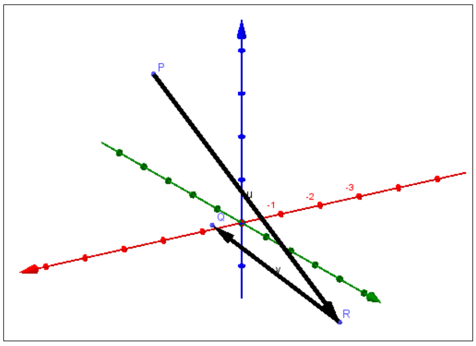



*Figura* 3.15. Representación gráfica Ejercicio 20.b. [GeoGebra]

$$\boldsymbol{PS}\,.(\boldsymbol{PQ}\ \wedge \boldsymbol{PR})=\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & -4 \end{vmatrix}=-4(x-1)+6(y+2)+10(z-3)=0$$

$-4x+6y+10z=14 \qquad (1)$

Si $\boldsymbol{PS}=(x-1,y+2,z-3)$ es paralelo a $\boldsymbol{RQ}=(2,-2,2)$, es combinación lineal de $QR$, y como tienen la misma longitud, el escalar de la combinación lineal es 1. Por lo tanto:

$(x-1,y+2,z-3)=(2,-2,2)$

$$\begin{cases} x-1=2 \\ y+2=-2 \\ z-3=2 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, obtenemos que las coordenadas del vértice son: $\boldsymbol{S}(3,-4,5)$ y verifica la ecuación (1).

<u>*Observación*</u>:

¿Hay otras coordenadas que determinen el cuarto vértice S del paralelogramo? ¿Por qué?

Calcularemos ahora el área del paralelogramo PQRS, como $A=\|\boldsymbol{PQ}\ \wedge \boldsymbol{PR}\|$. Determinamos el producto vectorial entre $\boldsymbol{PQ}\ y\ \boldsymbol{PR}$**:**

$$\boldsymbol{PQ} \wedge \boldsymbol{PR} = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{\imath}} & \breve{\boldsymbol{\jmath}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -4\breve{\boldsymbol{\imath}} + 6\breve{\boldsymbol{\jmath}} + 10\breve{\boldsymbol{k}}$$

Luego $A = \|\boldsymbol{PQ} \wedge \boldsymbol{PR}\| = \sqrt{16+36+100}$ por lo tanto el área del paralelogramo PQRS es $A \approx 12{,}33[L]^2$.

## 21.

a) Primero calculamos el producto vectorial entre los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$:

$\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = (\breve{\boldsymbol{\jmath}} - \breve{\boldsymbol{k}}) \wedge (2\breve{\boldsymbol{\imath}} + 3\breve{\jmath}) = -2\breve{k} - 2\breve{\boldsymbol{\jmath}} + 3\breve{\imath} = (3,-2,-2)$

Ahora calculamos el doble producto vectorial:

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (-2\breve{\boldsymbol{\imath}} + \breve{\boldsymbol{k}}) \wedge (3\breve{\boldsymbol{\imath}} - 2\breve{\boldsymbol{\jmath}} - 2\breve{\boldsymbol{k}}) = 4\breve{\boldsymbol{k}} - 4\breve{\boldsymbol{\jmath}} + 3\breve{\boldsymbol{\jmath}} + 2\breve{\boldsymbol{\imath}}$

$\boldsymbol{d} = (2,-1,4)$

Verificamos que $\boldsymbol{d}$ es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$ calculando el producto escalar entre ellos:

$\boldsymbol{d} \,.\, \boldsymbol{a} = (2,-1,4).(-2,0,1) = 0$ y $\boldsymbol{d} \,.\, (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (2,-1,4).(3,-2,-2) = 0$

b) $b.i)$ $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ es LI porque la única combinación lineal posible para (0,0,0) es la de escalares nulos. Verificamos:

$(0,0,0) = k_1(-2,0,1) + k_2(0,1,-1) + k_3(2,3,0)$

$$\begin{cases} 0 = -2k_1 + 2k_3 \\ 0 = k_2 + 3k_3 \\ 0 = k_1 - k_2 \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos que $k_1 = k_3$ , de la tercera $k_1 = k_2$ sustituyendo en la segunda ecuación $k_1 = 0$ y por lo tanto $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

$b.ii)$ $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}\}$ es LI porque ya probamos que $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son LI y $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ es perpendicular al plano que ellos determinan.

$b.iii)$ $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})\}$ es conjunto LD porque $\mathbf{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$ es perpendicular a $(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$ y $(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$ es perpendicular a $\boldsymbol{b}$ y perpendicular a $\boldsymbol{c}$, entonces $\mathbf{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$ es *combinación lineal* de $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

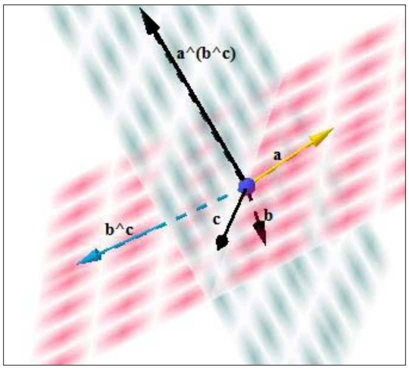



*Figura* 3.16. Representación gráfica Ejercicio 21.b.iii.

## 22.

a) Consideremos el paralelepípedo determinado por los vectores $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$. El área de la base que determinan $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ se puede calcular como $\|\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}\|$. La altura del paralelepípedo es la longitud de un segmento perpendicular a la base y que tiene por extremo al punto asociado al vector $\boldsymbol{w}$. Esa altura se puede determinar estudiando un triángulo rectángulo que tiene como cateto adyacente: $h = |\|\boldsymbol{w}\| cos\alpha|$ siendo α el ángulo que forma $\boldsymbol{w}$ con el vector $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$, coincidente (por ser ángulos alternos internos entre paralelas) con el ángulo que forma $\boldsymbol{w}$ y la altura h.

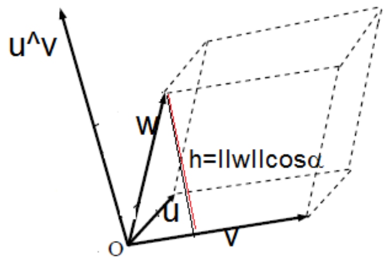



*Figura* 3.17. Representación gráfica Ejercicio 22.

El volumen $V$ del paralelepípedo se calcula:

$V = área\ de\ la\ base\ .\ altura$

$V = \|\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}\|.\, h$

$V = |\|\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}\|\ \|\boldsymbol{w}\| \cos\alpha|$

Esta expresión coincide con el valor absoluto del producto mixto entre $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, podemos concluir:

$V = |\boldsymbol{w}\,.\,(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})|$

b) Determinamos los vectores concurrentes en el vértice A:

$\boldsymbol{AB} = (-2,0,0)$ ; $\boldsymbol{AC} = (4,0,-1)$ ; $\boldsymbol{AD} = (3,4,1)$

A partir del resultado del inciso a), sabemos que el volumen del paralelepípedo cuyas aristas recurrentes son $\boldsymbol{AB}$**,** $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AD}$ se puede calcular como:

$V = |\boldsymbol{AB}\,.\,(\boldsymbol{AC} \wedge \boldsymbol{AD})|$

En el caso particular de un *prisma de base triangular* con aristas $\boldsymbol{AB}$**,** $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AD}$**,** su volumen será la mitad del volumen $V$ del paralelepípedo.

Calculamos el producto vectorial entre $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AD}$:

$$\boldsymbol{AC} \wedge \boldsymbol{AD} = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{\imath}} & \breve{\boldsymbol{\jmath}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4\breve{\boldsymbol{\imath}} - 7\breve{\boldsymbol{\jmath}} + 16\breve{\boldsymbol{k}}$$

Ahora evaluamos del producto mixto:

$\boldsymbol{AB}\,.\,(\boldsymbol{AC} \wedge \boldsymbol{AD}) = (-2,0,0).\,(4,-7,16) = -8$

También podemos calcular el producto mixto como el determinante de una matriz de orden 3: $AB.(AC\wedge AD)=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-2(0+4)+0+0=-8$

Luego el volumen es: $V_{prisma}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\,.\,(\boldsymbol{AC}\wedge\boldsymbol{AD})|=\frac{1}{2}.8$

$V_{prisma}=4[L]^3$

***Observación:***

Si el producto mixto entre tres vectores de $\mathbb{R}^3$ es no nulo, es decir, determinan un volumen (no nulo) en el espacio, dichos vectores son LI. Por ser 3 vectores de LI de $\mathbb{R}^3$, generan a $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

## 23.

a) Interpretando gráficamente los datos del enunciado podemos determinar las coordenadas de los puntos que definen la zona de excavación (además de los puntos dados A, B, C y D):

$\mathrm{E}(0{,}8,-4)$ ; $\mathrm{F}(3{,}6,-4)$ ; $\mathrm{G}(3{,}0,-4)$ ; $\mathrm{H}(0{,}2,-4)$

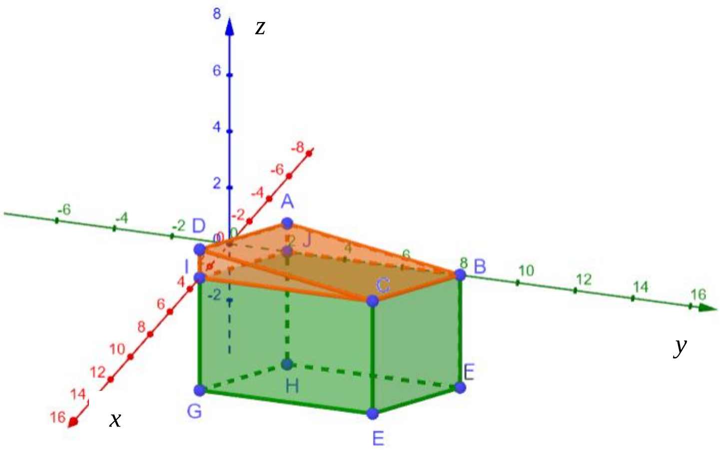



*Figura* 3.18. Representación gráfica Ejercicio 23.

b) Definimos los puntos I(3,0,0) y J(0,2,0) porque para calcular el volumen total ($V_T$) de tierra a extraer tenemos que determinar el volumen del paralelepípedo ($V_{papalelepípedo}$) de aristas $IG$, $IC$ e $IJ$; y además el volumen del prima de base triangular ($V_{prisma}$) de aristas $ID$, $IC$ e $IJ$, ya que:

$$\mathrm{V_T}=\mathrm{V_{papalelepípedo}}+\mathrm{V_{prisma}}$$

Sabiendo que $\boldsymbol{IG}=(0{,}0,-4)$, $\boldsymbol{IC}=(0{,}6{,}0)$ e $\boldsymbol{IJ}=(-3{,}2{,}0)$, calculamos:

$$\mathrm{V_{papalelepípedo}}=|\boldsymbol{IG}\,(\boldsymbol{IC}\,\wedge\,\boldsymbol{IJ})|$$

$$\mathrm{V_{papalelepípedo}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 72\mathrm{m}^3$$

Luego sabiendo que $\boldsymbol{ID} = (0,0,1)$, $\boldsymbol{IC} = (0,6,0)$ e $\boldsymbol{IJ} = (-3,2,0)$, calculamos:

$$\mathrm{V_{pisma}} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{ID}\ (\boldsymbol{IC}\ \wedge\ \boldsymbol{IJ})|$$

$$\mathrm{V_{pisma}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.|18| = 9\mathrm{m}^3$$

Ahora podemos determinar el volumen de tierra para excavar: $\mathrm{V_T} = 72\mathrm{m}^3 + 9\mathrm{m}^3$ . Por lo tanto, $\mathrm{V_T} = 81[\mathrm{L}]^3$.

## 24.

a) Calculamos el producto vectorial entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i(2-0) - j(-4-6) + k(0+4) = (2,10,4)$$

Como $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ , concluimos que $\boldsymbol{w}$ = (2,10,4).

b) Verificamos que el vector resultante del producto vectorial entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es perpendicular a los vectores dados, planteando los siguientes productos escalares:

$\boldsymbol{w}.\ \boldsymbol{a}$ = [(2, 10, 4) . (4, -2, 3)] = 8-20+12=0

$\boldsymbol{w}.\ \boldsymbol{b}$ = [(2, 10, 4) . (2, 0, -1)] = 4+0-4=0

c)

c.i) Como los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son proporcionales, son *LI* y el espacio generado por $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ será un plano de $\mathbb{R}^3$, es decir:

$S = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}\ con\ k_1 \in R\ \wedge\ k_2 \in \mathbb{R}\}$

c.ii) Expresamos al vector nulo $\mathbf{0}$ como combinación lineal de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ , $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ , veamos:

$(0,0,0) = k_1(4,-2,3) + k_2(2,0,-1) + k_3(2,10,4)$

$$\begin{cases} 0 = 4k_1 + 2k_2 + 2k_3 \\ 0 = -2k_1 + 10k_3 \\ 0 = 3k_1 - k_2 + 4k_3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene que la *única* solución es:

$k_1 = k_2 = k_3 = 0.$

Siendo los tres escalares *únicamente nulos,* los tres vectores son LI y por lo tanto el espacio generado por $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\}$ es $\mathbb{R}^3$.

## 25.

a) Trabajamos con el primer miembro de la igualdad planteada en el enunciado:

$$\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{i}} & \breve{\boldsymbol{j}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0\breve{\imath} + 0\breve{\boldsymbol{j}} + (9-1)\breve{\boldsymbol{k}} = (0,0,8)$$

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{i}} & \breve{\boldsymbol{j}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (8-0)\breve{\boldsymbol{i}} - (-16-0)\breve{\boldsymbol{j}} + 0\breve{\boldsymbol{k}} = (8,16,0)$$

Por lo tanto, el primer miembro resulta:

$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (8,16,0)$ (I)

Evaluamos a continuación el segundo miembro de la igualdad planteada en el enunciado:

$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c} = [(-2,1,2) \,.\, (1,3,0)] = -2 + 3 = 1$

$(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} = 1.(3,1,0) = (3,1,0)$

$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = [(-2,1,2) \,.\, (3,1,0)] = -6 + 1 = -5$

$(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c} = -5\,(1,3,0) = (-5,-15,0)$

Luego:

$(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c} = (3,1,0) - (-5,-15,0) = (8,16,0)$ **(II)**

A partir de los resultados en (I) y (II) podemos concluir que se verifica la identidad planteada para los vectores dados: $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$

b) El doble producto mixto $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$ es un nuevo vector que es *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$**:**

$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$

donde los escalares de la *combinación lineal* son: $k_1 = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c}$ y $k_2 = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b}$.

Por lo tanto $\{\, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}), \,\}$ es conjunto LD, y no constituye una base de $\mathbb{R}^3$.

## 26.

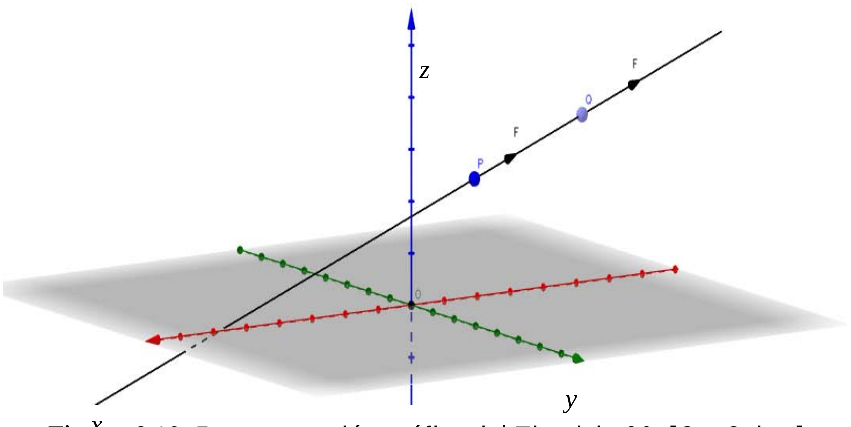



*Figura* 3.19. Representación gráfica del Ejercicio 26. [GeoGebra]

Consideramos dos posibles puntos de aplicación del vector fuerza $F$, ubicados sobre la misma recta de acción de la fuerza, y los llamamos P y Q.

Designamos $\boldsymbol{M_1}$ al vector momento $\boldsymbol{M_1} = \boldsymbol{OP} \wedge \boldsymbol{F}$, (I) siendo $\boldsymbol{OP}$ el vector posición del punto P de aplicación de la fuerza $\boldsymbol{F}$ .

Designamos $\boldsymbol{M_2}$ al vector momento $\boldsymbol{M_2} = \boldsymbol{OQ} \wedge \boldsymbol{F}$, (II) siendo $\boldsymbol{OQ}$ el vector posición del punto Q de aplicación de la fuerza $\boldsymbol{F}$.

Los vectores posición mencionados cumplen la siguiente relación:

$\boldsymbol{OQ} + \boldsymbol{QP} = \boldsymbol{OP}$ (III)

Sustituimos (III) en (I) y obtenemos:

$\boldsymbol{M_1} = (\boldsymbol{OQ} + \boldsymbol{QP}) \wedge \boldsymbol{F}$

Aplicamos propiedad distributiva del producto vectorial con respecto a la suma de vectores en el primer argumento:

$\boldsymbol{M_1} = \boldsymbol{OQ} \wedge \boldsymbol{F} + \boldsymbol{QP} \wedge \boldsymbol{F}$

Pero los vectores $\boldsymbol{QP}$ *y* $\boldsymbol{F}$ son paralelos por estar P y Q en la recta de acción de la fuerza $\boldsymbol{F}$. Por lo tanto, el producto vectorial $\boldsymbol{QP} \wedge \boldsymbol{F}$ es nulo. Es decir, $\boldsymbol{M_1}$ resulta :

$\boldsymbol{M_1} = \boldsymbol{OQ} \wedge \boldsymbol{F}$ , pero esta expresión coincide con (II).

Es así que $\boldsymbol{M_1} = \boldsymbol{M_2}$

## 27.

a) Siendo $\boldsymbol{v}$ perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, calculamos el producto vectorial:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i(2+6) - j(1-9) + k(-2-6) = (8,8,-8),$$

El vector resultante $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es proporcional al vector $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z).(1,3,-6)=40$ ya que tienen la misma dirección (son paralelos). Entonces,

$(8,8,-8) = k(v_x, v_y, v_z)$

$\left(\frac{8}{k}, \frac{8}{k}, -\frac{8}{k}\right) = (v_x, v_y, v_z)$ (1)

La otra condición que cumple el vector $\boldsymbol{v}$ es: $\boldsymbol{v}.\,\boldsymbol{c}$ = 40, por lo tanto sabemos que:

$(v_x, v_y, v_z).(1,3,-6) = 40$, es decir:

$v_x + 3v_y - 6v_z = 40$ (2)

Sustituyendo (1) en (2) obtenemos:

$$\frac{8}{k}+3\frac{8}{k}-6\left(-\frac{8}{k}\right)=40$$

$$\frac{8+24+48}{40}=k;k=2$$

Resulta: $\boldsymbol{v}$ = (4,4,-4), y la solución es única.

b) El conjunto formado por los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{v}$ es una *base* de $\mathbb{R}^3$ porque $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{v}$ son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ LI. Veamos:

$$(0,0,0) = k_1(1,2,3) + k_2(3,-2,1) + k_3(4,4,-4)$$

$$\begin{cases} 0 = k_1 + 3k_2 + 4k_3 \\ 0 = 2k_1 - 2k_2 + 4k_3 \\ 0 = 3k_1 + k_2 - 4k_3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene que la única solución es $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Siendo los tres escalares *únicamente nulos,* los tres vectores son LI y por lo tanto el espacio generado por $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}\}$ es $\mathbb{R}^3$. Al ser conjunto LI y conjunto generador de $\mathbb{R}^3$, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

## 28.

a) Calculamos el producto vectorial entre $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$:

$$\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & \alpha & -10 \end{vmatrix}=i(-30-2\alpha)-j(-20+8)+k(2\alpha+12)=(-30-2\alpha,12,2\alpha+12)$$

Luego evaluamos $\boldsymbol{a}$ . ($\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$) y resulta:

$$(2,3,5).(-30-2\alpha,12,2\alpha+12)=-60-4\alpha+36+10\alpha+60=36+6\alpha$$

Como sabemos que el producto mixto es nulo, se tiene que $36+6\alpha=0$

Por lo tanto $\alpha=-6$.

b) Siendo nulo el producto mixto, los vectores son coplanares, y por lo tanto linealmente dependientes. Entonces, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ no forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Otra forma alternativa de justificar la respuesta es planteando la combinación lineal de los tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ que da por resultado el vector nulo. En este caso se determina que los escalares de dicha combinación lineal no son únicamente nulos. Es decir, existen infinitas soluciones para los escalares, incluyendo la solución nula o solución trivial. Por lo tanto, los vectores son LD y no forman una base de $\mathbb{R}^3$.

## 29.

Expresamos los vectores asociados a las tres aristas no paralelas:

**DA** =(9,0,0); **DB**=(0,9,0); **DC**=(0,0,9)

Y calculamos el producto mixto:

$$\mathbf{DA}.(\mathbf{DB} \wedge \mathbf{DC}) = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 729$$

El volumen del tetraedro es igual a 1/6 del volumen del paralelepípedo que tiene a los vectores como aristas adyacentes. Por lo tanto:

$$Vol_{tetraedro} = \frac{729}{6}\,[L]^3 = 121.5\,[L]^3$$

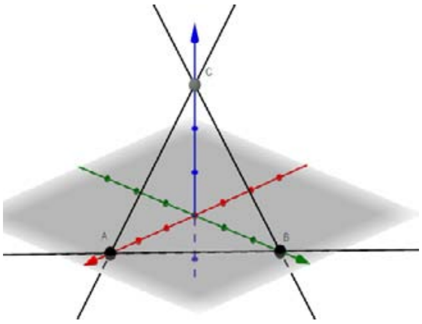



*Figura* 3.20. Representación gráfica del Ejercicio 29 [GeoGebra].

## 30.

a) Definimos los vectores **BA** = (4, 0, 0) y **FB** = (0, 0, 10). Y luego calculamos el área:

$$Area = \|\boldsymbol{BA} \wedge \boldsymbol{FB}\| = \left\| \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \right\| = \|(0\boldsymbol{i} - 40\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k})\| = 40m^2$$

b) Definimos los vectores fuerza ***P*** y el vector asociado al puntal ***HC***:

Vector Fuerza: ***P*** = 1000 (-***j***) = 1000 (0,-1,0) = (0, -1000, 0) N

Vector asociado al puntal: ***HC*** = (2, -3, 5)

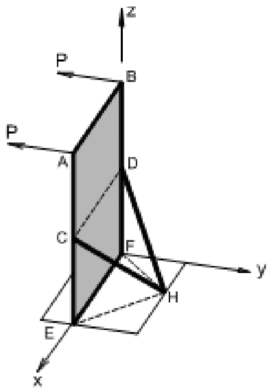



*Figura* 3.21. Representación gráfica Ejercicio 30.

$\overrightarrow{Proy\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{HC}} = \frac{\boldsymbol{P}\circ\boldsymbol{HC}}{\|\boldsymbol{HC}\|}\frac{\boldsymbol{HC}}{\|\boldsymbol{HC}\|} = \frac{(-1000)\,x\,(-3)}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}}\frac{(2,-3,5)}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}} = \frac{3000}{38}(2,-3,5) = \left(\frac{3000}{19};-\frac{4500}{19};\frac{7500}{19}\right)$ N

$\overrightarrow{Proy\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{HC}}$=(157,9,-236,8, 394,7)

c)

***HC** = (2, -3, 5) y **HD**=(-2, -3, 5)*

$\cos\emptyset = \frac{\boldsymbol{HC}\circ\boldsymbol{HD}}{\|\boldsymbol{HC}\|\|\boldsymbol{HD}\|} = \frac{2.(-2)+(-3).(-3)+5.5}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}\sqrt{2^2+3^2+5^2}} = \frac{30}{38} \cong 0.7895$

$\emptyset = arc\cos 0.7895 \cong 37.86°$

d)

$\boldsymbol{HF}$ = (-2, -3, 0) y $\boldsymbol{HD}$=(-2, -3, 5)

$Vol = \frac{1}{3}|\boldsymbol{HF}\circ(\boldsymbol{HD}\wedge\boldsymbol{HC})| = \frac{1}{3}\left\|\begin{matrix}-2 & -3 & 0\\ -2 & -3 & 5\\ 2 & -3 & 5\end{matrix}\right\| = \left|\frac{1}{3}[-60]\right| = 20m^3$

## 3.4 PLANOS

### 31.

a) A partir de los puntos dados, teniendo en cuenta que dichos puntos pertenecen al plano buscado, por diferencia de coordenadas hallamos dos vectores $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{AC}$, los cuales están contenidos en el plano:

$\boldsymbol{AB}$=(2-(-1), (-3)-1, 4-0)=(3, -4, 4)

$\boldsymbol{AC}$=((-3)-(-1), 1-1, 1-0)=(-2, 0, 1)

El producto vectorial de ambos vectores da por resultado el vector normal al plano buscado.

$$\boldsymbol{n_\pi} = \boldsymbol{ABxAC} = \begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \widehat{\boldsymbol{k}}\\ 3 & -4 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix} = -4\hat{\boldsymbol{\imath}} - 11\hat{\boldsymbol{\jmath}} - 8\widehat{\boldsymbol{k}} = (-4,-11,-8)$$

A partir del vector normal hallado y de alguno de los tres puntos dato, escribimos la ecuación vectorial del plano:

$\boldsymbol{AP}.\boldsymbol{n}_\pi$=0

($x$+1, $y$-1, $z$).(-4, -11, -8)=0

Ordenando la expresión anterior obtenemos la forma punto normal de la ecuación del plano:

(-4)( $x$+1)-11($y$-1)-8$z$=0

A partir de la ecuación anterior, hallamos la ecuación general:

-4$x$-11$y$-8$z$+7=0

$4x+11y+8z-7=0$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación anterior por 7, obtenemos la ecuación segmentaria del plano:

$$\frac{x}{\frac{7}{4}}+\frac{y}{\frac{7}{11}}+\frac{z}{\frac{7}{8}}=1$$

Con los vectores AB y AC, previamente hallados y alguno de los tres puntos dato que pertenecen al plano es posible escribir la ecuación vectorial paramétrica del mismo de la siguiente manera:

$(x, y, z)=(-1, 1, 0)+\lambda(3, -4, 4)+\beta(-2, 0, 1)$ $\qquad \lambda\epsilon R;\ \beta\epsilon R$

Por lo cual las ecuaciones cartesianas paramétricas serán:

$$\begin{cases} x=-1+3\lambda-2\beta \\ y=1-4\lambda \\ z=4\lambda+\beta \qquad\qquad \lambda\epsilon R;\ \beta\epsilon R \end{cases}$$

b) - Plano paralelo al plano $yz$ que pasa por el punto B(2, –3, 4)

Dicho plano debe tener un vector normal que resulte paralelo al eje $x$, es decir:

$\boldsymbol{n_\pi}=(A,0,0)$

Un ejemplo de dicho vector normal es: $\boldsymbol{n_\pi}=(2,0,0)$, con lo cual la ecuación general del plano buscado para dicho vector normal es:

$2x+D=0$

Reemplazando las coordenadas del punto dado (punto B), y despejando adecuadamente de la ecuación anterior, obtenemos D=-4, con lo cual luego de reemplazar y simplificar la expresión para dicho valor de D, la ecuación general del plano buscado es $x-2=0$

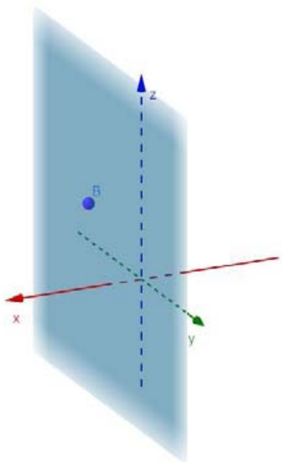



*Figura* 3.22. Representación gráfica Ejercicio 31.b.1.

- Plano paralelo al plano $xy$ que pasa por el punto C(–3, 1, 1).

Dicho plano debe tener un vector normal paralelo al eje $z$, es decir: $\boldsymbol{n_\pi}=(0,0,C)$

Un ejemplo de dicho vector normal es: $\boldsymbol{n_\pi} = (0, 0, 3)$, con lo cual la ecuación general del plano buscado para dicho vector normal es:

3$z$+D=0

Reemplazando las coordenadas del punto dado y despejando adecuadamente obtenemos D=-3, con lo cual la ecuación general del plano es $z$-1=0

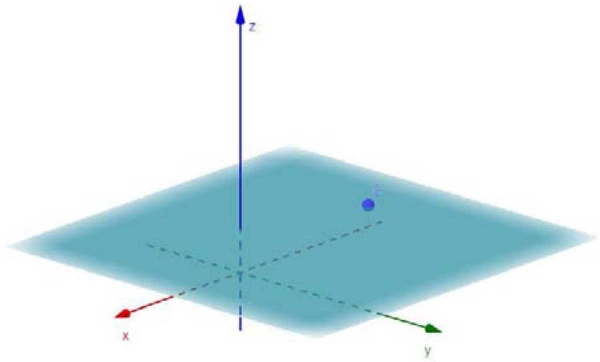


*Figura* 3.23. Representación gráfica Ejercicio 31.b.2.

## 32.

a) De la ecuación general de los dos primeros planos extraemos las componentes de sus vectores normales:

$\boldsymbol{n_{\pi 1}} = (2, -1, 1)$

$\boldsymbol{n_{\pi 2}} = (1, 0, -2)$

Para el caso del tercer plano, obtenemos el vector normal a partir del producto vectorial de los vectores paralelos al mismo:

$$\boldsymbol{n_{\pi 3}} = (2, 0, -4)\text{x}(2, 5, 1) = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \widehat{\boldsymbol{k}} \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 20\hat{\boldsymbol{\imath}} - 10\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 10\widehat{\boldsymbol{k}} = (20, -10, 10)$$

Del análisis de las correspondientes componentes surge: $\boldsymbol{n_{\pi 3}} = 10\, \boldsymbol{n_{\pi 1}}$, con los cual es posible afirmar que el plano $\pi_3$ es paralelo al plano $\pi_1$.

b) De la misma manera, evaluando el producto escalar entre los planos $\pi_1$ y $\pi_2$, obtenemos:

$\boldsymbol{n_{\pi 1}}.\boldsymbol{n_{\pi 2}} = (2, -1,1).(1,0, -2) = 2 + 0 - 2 = 0$

A partir de la expresión anterior es posible afirmar que los planos $\pi_1$ y $\pi_2$, son perpendiculares.

c) Para obtener la intersección del plano $\pi_1$ con los planos coordenados, es decir cada una de las *trazas*, es necesario resolver los sistemas de ecuaciones dados por la ecuación de dicho plano y las ecuaciones de cada uno de los planos coordenados.

<u>Traza en el plano coordenado $yz$:</u>

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

De esta manera la traza resulta:

$y = z - 3$ ; $x$=0

<u>Traza en el plano coordenado $xz$;</u>

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

De esta manera la traza resulta:

$x = \frac{1}{2}(-z + 3)$ ; $y$=0

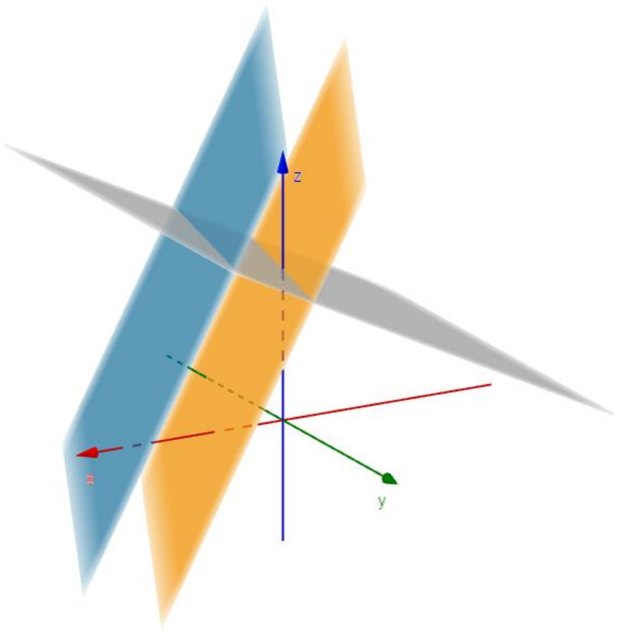
<u>Traza en el plano coordenado $xy$:</u>

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

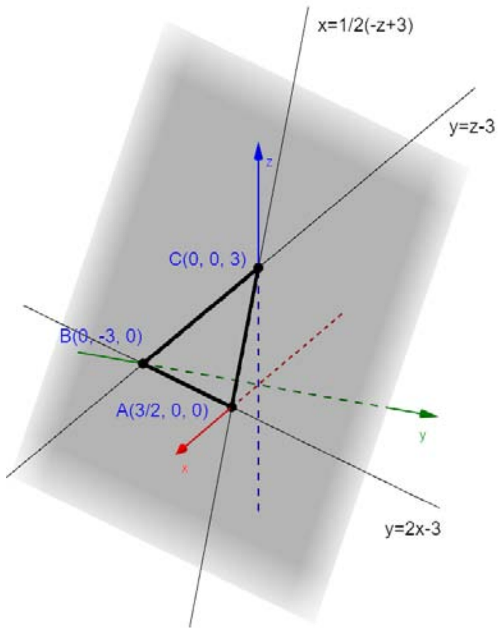
De esta manera la traza resulta:

$y = 2x - 3$ ; $z$=0

d)




Ejercicio 32 a y b




Ejercicio 32 c

*Figura* 3.24. Representación gráfica Ejercicio 32. [GeoGebra]

## 33.

a) Del análisis de la ecuación dada, es posible indicar: $\boldsymbol{n_{\pi 1}} = (-3, 0, 1)$;  R(2, -1, 5)

Por lo tanto, $\boldsymbol{n_{\pi 2}} = (-3, 0, 1)$, y la ecuación del plano está dada por:

$-3x + z + D = 0$

Reemplazamos las coordenadas del punto Q para hallar el coeficiente D:

$(-3.9) + 1 + D = 0$

Obtenemos $D = 26$ y reemplazamos en la ecuación del plano, obteniendo:

$-3x + z + 26 = 0$

El plano paralelo al plano dado que pasa por el punto Q es único.

b) Se busca un vector $\boldsymbol{n_{\pi 3}}$ de tal manera que $\boldsymbol{n_{\pi 1}}.\boldsymbol{n_{\pi 3}} = 0$

$\boldsymbol{n_{\pi 3}} = (1, 0, 3)$

$x + 3z + D = 0$

Reemplazando las coordenadas del punto R para hallar el coeficiente $D$:

$2 + 3.0 + D = 0$, obtenemos $D = -2$

$x + 3z - 2 = 0$

El plano perpendicular al plano dado que pasa por el punto R es no es único ya que existen infinitos vectores $\boldsymbol{n_{\pi 3}}$ que satisfacen la ecuación $\boldsymbol{n_{\pi 1}}.\boldsymbol{n_{\pi 3}} = 0$. La interpretación geométrica del problema se puede observar en la siguiente figura en donde se han representado dos planos $\boldsymbol{\pi_3}$ que cumplen las condiciones dadas.

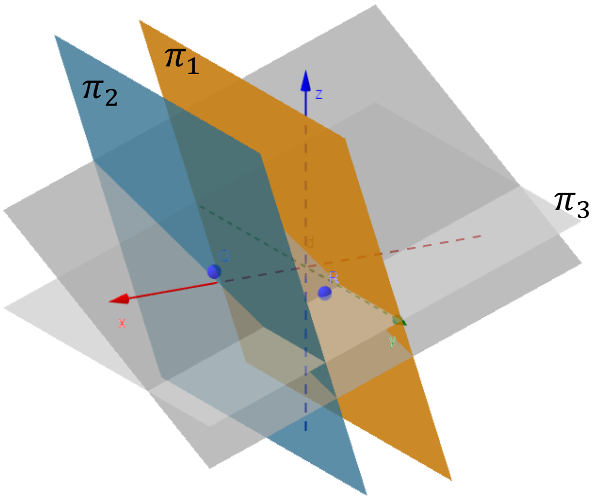



*Figura* 3.25. Representación gráfica Ejercicio 33. [GeoGebra]

Analíticamente tenemos:

$\boldsymbol{n_{\pi 3}} = (A, B, C)$

$\boldsymbol{n_{\pi 1}}.\boldsymbol{n_{\pi 3}} = 0 \implies (-3,0,1) \cdot (A, B, C) = 0$

$-3A + C = 0 \implies C = 3A$

La única condición que tenemos sobre las componentes ($A$,$B$,$C$) es que $C$=3$A$. No hay ninguna condición sobre la componente $B$, que ha quedado libre. Entonces, cualquier vector de la forma $\boldsymbol{n_{\pi 3}} = (A, B, 3A)$ , o bien $\boldsymbol{n_{\pi 3}} = (1, B, 3)$, podrá ser usado como vector normal para obtener un plano perpendicular a $\pi_1$.

## 34.

a) A partir de las ecuaciones dadas, escribimos la ecuación de la familia de planos que pasa por la intersección de los planos dados:

$2x - y + z + 1 + \beta(x + 2y - z - 4) = 0 \qquad \beta \in R$

$(2 + \beta)x - (1 - 2\beta)y + (1 - \beta)z + 1 - 4\beta = 0$

El punto Q dado, debe satisfacer la ecuación anterior, por lo cual:

$(2 + \beta)(-1) - (1 - 2\beta)1 + (1 - \beta)1 + 1 - 4\beta = 0$

De esta manera es posible encontrar el valor de β correspondiente:

$-2 - \beta - 1 + 2\beta + 1 - \beta + 1 - 4\beta = 0$

$\beta = -\frac{1}{4}$

Entonces, la ecuación general buscada resulta:

$\left(2 - \frac{1}{4}\right)x - \left(1 + \frac{2}{4}\right)y + \left(1 + \frac{1}{4}\right)z + 1 + \frac{4}{4} = 0$

$\frac{7}{4}x - \frac{6}{4}y + \frac{5}{4}z + 2 = 0$

b) Para hallar el ángulo entre los planos dados escribimos en primer lugar los vectores normales de los mismos.

$\boldsymbol{n_{\pi 1}} = (2, -1, 1)$

$\boldsymbol{n_{\pi 2}} = (1, 2, -1)$

Con dichos vectores es posible evaluar el ángulo a partir de la expresión:

$cos\theta = \frac{\boldsymbol{n_{\pi 1}}.\boldsymbol{n_{\pi 2}}}{\|\boldsymbol{n_{\pi 1}}\|\|\boldsymbol{n_{\pi 2}}\|}$

$cos\theta = \frac{(2, -1, 1).(1, 2, -1)}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{2 - 2 - 1}{6} = -\frac{1}{6}$

$\theta = 99.59°$

c) El plano $\pi_4$ normal a los planos dados debe tener un vector normal que resulte perpendicular simultáneamente a los vectores normales de dichos planos.

$\boldsymbol{n_{\pi 4}} = \boldsymbol{n_{\pi 1}} \mathrm{x} \boldsymbol{n_{\pi 2}} = (2, -1, 1)\mathrm{x}(1, 2, -1) = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\hat{\boldsymbol{\imath}} + 3\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 5\hat{\boldsymbol{k}} = (-1, 3, 5)$

A partir de dicho vector normal y el punto Q dado, obtenemos la ecuación general del plano buscado:

$(-1)x + 3y + 5z + D = 0$

$(-1)(-1) + 3.1 + 5.1 + D = 0$

$D = -9$

$-x + 3y + 5z - 9 = 0$

Para hallar el punto de intersección de los tres planos es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 4 = 0 \\ -x + 3y + 5z - 9 = 0 \end{cases}$$

Cuyo resultado brinda las coordenadas del punto de intersección I(2/7 ; 15/7 ; 4/7 )

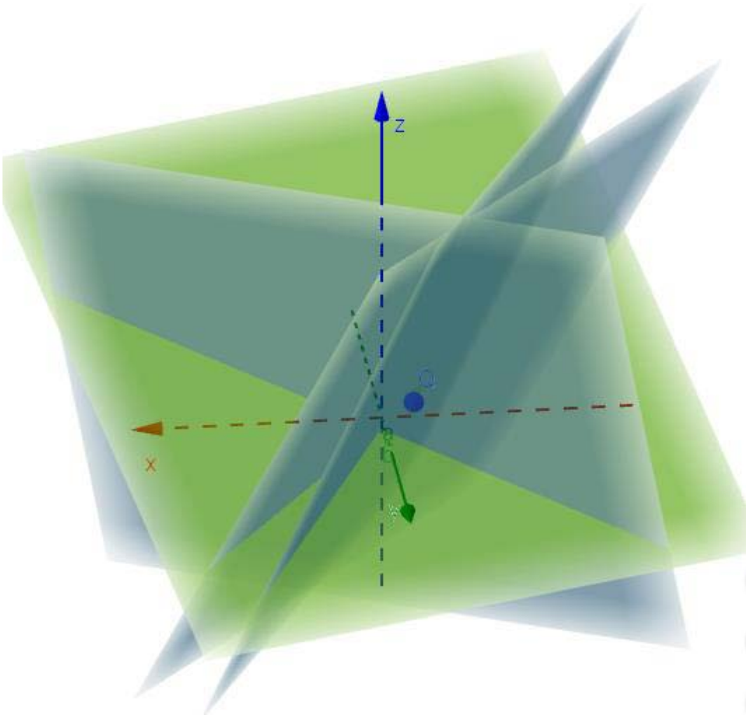



*Figura* 3.26. Representación gráfica Ejercicio 34 [GeoGebra].

## 35.

a) Para hallar puntos del plano dado en su forma vectorial paramétrica es necesario fijar valores de los parámetros μ y β

Para μ=1 y β=2 → R(17, 14, 22)

Para μ=-1 y β=1 → S(7, 2, 10)

b) En primer lugar, evaluamos el vector normal al plano dado a los efectos de obtener sus componentes:

$$\boldsymbol{n_{\pi 1}} = (2,4,2)\text{x}(6,4,8) = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \widehat{\boldsymbol{k}} \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 24\hat{\boldsymbol{\imath}} - 4\hat{\boldsymbol{\jmath}} - 16\widehat{\boldsymbol{k}} = (24, -4, -16)$$

A partir de dicho vector normal y el punto conocido del plano, obtenemos la ecuación general del mismo:

$24x - 4y - 16z + D = 0$

$24.3 - 4.2 - 16.4 + D = 0$

De donde se obtiene $D = 0$ y por lo tanto la ecuación es: $24x - 4y - 16z = 0$

Para hallar la distancia entre un punto dado y un plano utilizamos la siguiente expresión:

$$h = \frac{|\boldsymbol{AP}.\boldsymbol{n_\pi}|}{\|\boldsymbol{n_\pi}\|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$h = \frac{|24 - 4.3 - 16.3|}{\sqrt{848}} = 1.2362\ldots$$

c) Los planos buscados son paralelos al plano dado y distan 3 unidades del mismo, por lo cual es posible considerar el mismo vector normal y es necesario encontrar los coeficientes $D$ de las ecuaciones de dichos planos. Para resolver esta situación, en la ecuación de distancia de un punto a un plano, el punto dato pasa a ser ahora un punto conocido del plano original, en tanto que el plano, es el plano buscado cuyo coeficiente $D$ se desea determinar:

$$3 = \frac{|24.3 - 4.2 - 16.4 + D|}{\sqrt{848}} = \frac{|0 + D|}{\sqrt{848}}$$

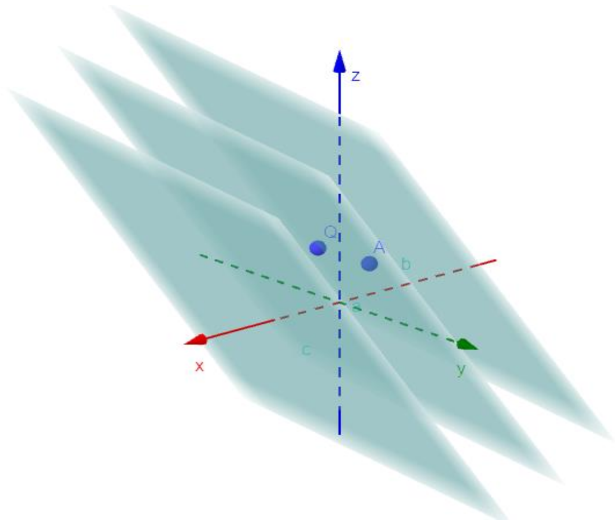
$|0 + D| = 3\sqrt{848}$

Por lo tanto: $D_1 = 3\sqrt{848} = 87.36$ ; $D_2 = -3\sqrt{848} = -87.36$

Las ecuaciones de los dos planos que distan 3 unidades del plano dado resultan:

$24x - 4y - 16z + 87.36 = 0$

$24x - 4y - 16z - 87.36 = 0$



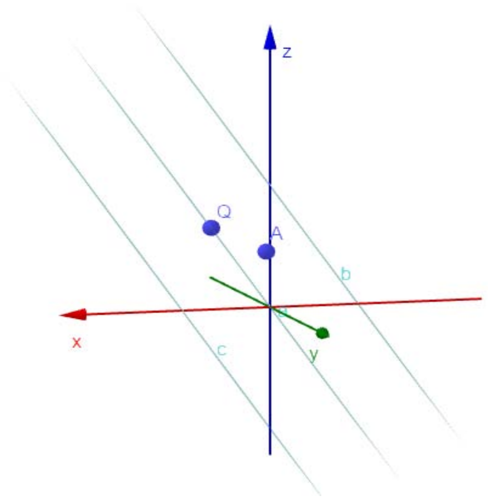




*Figura* 3.27. Representación gráfica Ejercicio 35. [GeoGebra]

*Observación*:

Dada la ecuación general de un plano A$x$+B$y$+C$z$+D=0. Si a dicha ecuación se la multiplica por un número real, se obtendrá otra ecuación del mismo plano. Por ejemplo:

$2x-y+3z+7=0$ ; $4x-2y+6z+14=0$ ; $6x-3y+9z+21=0$ ; ......

La ecuación del plano no es única, sino que podemos expresarla de diferentes maneras. Sin embargo, dicho plano, $2x-y+3z+7=0$ si es único. Como lugar geométrico de puntos de $\mathbb{R}^3$ tenemos un único plano, cuya ecuación puede presentarse de diferentes formas, todas equivalentes.

En el Ejercicio 31 hemos obtenido un único plano (como lugar geométrico) solución de cada inciso. Sin embargo, cada uno de esos planos podríamos expresarlos a través de diferentes ecuaciones, cada una de las cuales describe el mismo lugar geométrico.

En el Ejercicio 33 hemos obtenido en el inciso a) un único plano (como lugar geométrico). Sin embargo, podríamos expresar a dicho plano través de diferentes ecuaciones, cada una de las cuales describe el mismo lugar geométrico: $-3x+z+26=0$ ; $-6x+2z+52=0$ ; ecuación segmentaria, vectorial paramétrica, etc. En el Ejercicio 33 en el inciso b) hemos visto que no existe un único plano (como lugar geométrico) solución del problema planteado y en el Ejercicio 35 en el inciso c) encontramos que existen dos planos solución del problema dado.

Cada vez que encontramos la ecuación de un plano solución de nuestro problema, sea este único o no, dicho plano puede quedar expresado de diferentes formas.

Cuando nos preguntamos si es único o no, nos estamos refiriendo al lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{R}^3$ que cumplen las condiciones de nuestro problema (y no a las ecuaciones que describen ese lugar geométrico).

## 36.

Sean los vectores: $\boldsymbol{BA}=(1,1,3)$, $\boldsymbol{CA}=(1,2,2)$, $\boldsymbol{DA}=(1,1,2)$

Si los cuatro puntos pertenecen a un mismo plano, entonces el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores calculados debe ser nulo. De lo contrario, los tres vectores no son coplanares y los cuatro puntos no pertenecen a un mismo plano.

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{ABCD}}=|\boldsymbol{BA}\wedge\boldsymbol{CA}\cdot\boldsymbol{DA}|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&2\\1&1&2\end{vmatrix}=1$$

Como el volumen no es nulo, se concluye que los cuatro puntos no pertenecen a un mismo plano.

## 37.

a) El ángulo entre dos planos es igual al ángulo $\theta$ entre sus vectores normales, entonces:

$\boldsymbol{n_\pi}=(5,5,1)$ ; $\boldsymbol{n_{xy}}=\boldsymbol{\hat{k}}=(0,0,1)$

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{n_\pi} \cdot \boldsymbol{n_{xy}}}{\|\boldsymbol{n_\pi}\|\|\boldsymbol{n_{xy}}\|} = \frac{(5,5,1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{51}} = \frac{1}{\sqrt{51}} \implies \theta = 82°$$

b) Primero encontramos los puntos de intersección entre el plano $\pi$ y los ejes coordenados:

$A(x,0,0) \Rightarrow 5x + 0 + 0 - 5 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \Rightarrow A(1,0,0)$

$B(0,y,0) \Rightarrow 0 + 5y + 0 - 5 = 0 \Rightarrow y = 1 \quad \Rightarrow B(0,1,0)$

$C(0,0,z) \Rightarrow 0 + 0 + z - 5 = 0 \Rightarrow z = 5 \quad \Rightarrow C(0,0,5)$

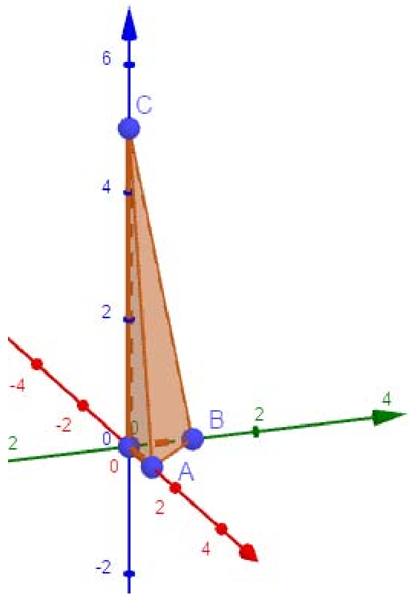



*Figura* 3.28. Representación gráfica Ejercicio 37. [GeoGebra]

Tomamos los tres vectores posición de dichos puntos, los cuales serán las aristas del tetraedro. Para calcular su volumen, consideramos 1/6 del producto mixto entre dichos vectores.

$$\text{Vol}_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{1}{6}|\boldsymbol{OA} \wedge \boldsymbol{OB} \cdot \boldsymbol{OC}| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{5}{6}\ [L]^3$$

c) Siguiendo el procedimiento desarrollado en la sección *Distancia de un punto a un plano*, del Libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*, tenemos:

$$h = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{\|n_\pi\|} = \frac{|36|}{\sqrt{51}} \approx 5{,}04\ [\text{L}]$$

## 38.

a) La ecuación de la familia de planos que pasa por la intersección de $\pi_1$ y $\pi_2$ está dada por: $2x - 4y + 2z - 3 + k(2x + 6y - z - 26) = 0\ , k \in \mathbb{R}$**.** La ecuación del plano $\pi_3$ se obtendrá de la expresión anterior, para algún valor específico de $k$. El punto R(1,4,3) debe satisfacer la ecuación del plano $\pi_3$, por lo tanto usaremos sus coordenadas, reemplazadas en la ecuación, para obtener el valor de $k$ correspondiente.

$2-4\cdot 4+2\cdot 3-3+k(2+6\cdot 4-3-26)=0 \quad \Longrightarrow k=-11/3$

$\pi_3: 2x-4y+2z-3-\dfrac{11}{3}(2x+6y-z-26)=0$

$\pi_3: -\dfrac{16}{3}x-26y+\dfrac{17}{3}z+\dfrac{277}{3}=0$

b) Para que el plano $\pi_4$ sea perpendicular a $\pi_1$ y a $\pi_2$, su vector normal debe ser ortogonal a los vectores normales de $\pi_1$ y $\pi_2$. Por lo tanto lo obtenemos mediante producto vectorial entre ambos vectores:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{n}_{\pi_1}=(2,-4,2) \\ \boldsymbol{n}_{\pi_2}=(2,6,-1) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{n}_{\pi_4}=\boldsymbol{n}_{\pi_1}\wedge\boldsymbol{n}_{\pi_2}=(-8,6,20)$$

Para que el plano $\pi_4$ contenga al punto (0,0,0) sabemos que el término independiente de su ecuación debe ser D=0, entonces $\pi_4: -8x+6y+20z=0$

c) El plano $\pi_4$ no pertenece a la familia de planos indicada: no contiene a la recta de intersección entre $\pi_1$ y $\pi_2$, sino que es perpendicular a la misma. Por lo tanto, no existe ningún valor de $k$ en la ecuación de la familia que nos dé como resultado la ecuación del plano $\pi_4$. Para que un plano pertenezca a la familia, es condición necesaria que su vector normal sea combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{n}_{\pi_1}$ y $\boldsymbol{n}_{\pi_2}$, es decir, sea coplanar con los mismos. Para el caso de $\pi_4$ , su vector normal $\boldsymbol{n}_{\pi_4}$ no es coplanar con $\boldsymbol{n}_{\pi_1}$ y $\boldsymbol{n}_{\pi_2}$, sino que es perpendicular a ellos.

## 39.

a) Ecuación del plano $xy$: $z=0$ ; Ecuación del plano $xz$: $y=0$

Por lo tanto, la ecuación de la familia de planos que pasan por la intersección de plano $xy$ y del plano $xz$ está dada por: $y+kz=0 \quad ,k\in\mathbb{R}$

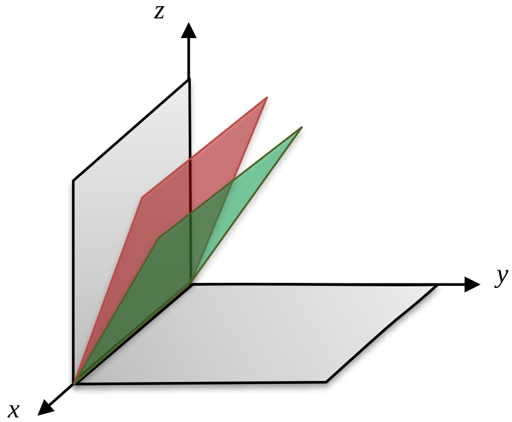



*Figura* 3.29. Representación gráfica Ejercicio 39.a.

b) Un plano bisector entre dos planos cualquiera es aquel que forma el mismo ángulo con cada uno de los dos planos. En este caso, debemos encontrar un plano bisector de los planos $xy$ y $xz$. Este plano pertenece a la familia de planos del inciso a), por lo tanto, debemos encontrar el valor de $k$ para el cual el plano resultante forma el mismo ángulo con ambos planos coordenados. El vector normal de un plano cualquiera de la familia indicada está dado por: $\boldsymbol{n_\pi} = (0,1,k)$. Buscamos el valor de $k$ tal que el vector $\boldsymbol{n_\pi}$ forme el mismo ángulo $\theta$ con los versores $\hat{\boldsymbol{k}}$ y $\hat{\jmath}$ (los vectores normales de los planos $xy$ y $xz$ respectivamente)

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{n_\pi} \cdot \hat{\boldsymbol{k}}}{\|\boldsymbol{n_\pi}\| \|\hat{\boldsymbol{k}}\|} = \frac{\boldsymbol{n_\pi} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\|\boldsymbol{n_\pi}\| \|\hat{\boldsymbol{\jmath}}\|}$$

$$\frac{(0,1,k) \cdot (0,0,1)}{\|\boldsymbol{n_\pi}\|} = \frac{(0,1,k) \cdot (0,1,0)}{\|\boldsymbol{n_\pi}\|}$$

De donde se obtiene $k = 1$. La ecuación de un plano bisector es entonces $y + z = 0$

Observamos que dicho plano forma un ángulo de 45° con los planos coordenados.

El plano encontrado no es único. Puede obtenerse otro considerando el versor $-\hat{\boldsymbol{k}}$ para el plano $xy$ (ya que también es un vector normal del mismo). En ese caso:

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{n_\pi} \cdot (-\hat{\boldsymbol{k}})}{\|\boldsymbol{n_\pi}\| \|\hat{\boldsymbol{k}}\|} = \frac{\boldsymbol{n_\pi} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\|\boldsymbol{n_\pi}\| \|\hat{\boldsymbol{\jmath}}\|}$$

$$\frac{(0,1,k) \cdot (0,0,-1)}{\|\boldsymbol{n_\pi}\|} = \frac{(0,1,k) \cdot (0,1,0)}{\|\boldsymbol{n_\pi}\|}$$

De donde se obtiene $k = -1$ . La ecuación de otro plano bisector es entonces $y - z = 0$, que también forma un ángulo de 45° con los planos coordenados.

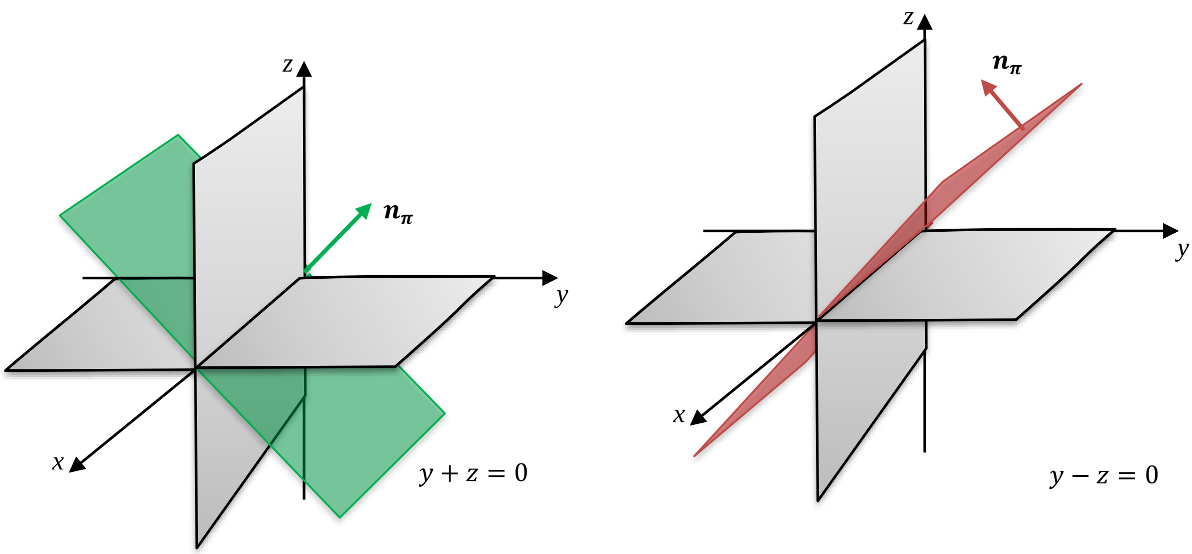



*Figura* 3.30. Representación gráfica Ejercicio 39.b.

## 40.

a) Para obtener puntos que pertenecen al plano, basta con darle valores a los parámetros $\mu$ y $\beta$, por ejemplo:

Si $\mu$=1 y $\beta$=0 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{OP_1} = (2,6,-2) \quad \Rightarrow P_1(2,6,-2)$

Si $\mu$=0 y $\beta$=1 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{OP_2} = (4,2,2) \quad \Rightarrow P_2(4,2,2)$

b) Obtenemos primero el vector $\boldsymbol{n_{\pi_1}}$ normal al plano $\pi_1$, mediante el producto vectorial entre los vectores (1,4,-2) y (3,0,2), ambos paralelos al plano.

$\boldsymbol{n_{\pi_1}} = (1,4,-2) \wedge (3,0,2) = (8,-8,-12)$

Para que el plano $\boldsymbol{\pi_2}$ sea perpendicular al plano $\boldsymbol{\pi_1}$, sus vectores normales deben ser perpendiculares, entonces, siendo $\boldsymbol{n_{\pi_2}} = (A,B,C)$, tenemos:

$\boldsymbol{n_{\pi_1}} \cdot \boldsymbol{n_{\pi_2}} = 0 \;\Rightarrow (8,-8,-12) \cdot (A,B,C) = 0$

$8A - 8B - 12C = 0 \quad [1]$

Además, si el plano $\pi_2$ es paralelo al eje $z$, entonces su vector normal debe ser perpendicular al versor $\boldsymbol{\hat{k}}$

$\boldsymbol{\hat{k}} \cdot \boldsymbol{n_{\pi_2}} = 0 \;\Rightarrow (0,0,1) \cdot (A,B,C) = 0$

$C = 0 \quad [2]$

De [1] y [2] obtenemos:

$$\begin{cases} 8A - 8B - 12C = 0 \\ \qquad C = 0 \end{cases} \Rightarrow \; A = B$$

Entonces, $\boldsymbol{n_{\pi_2}} = (A,A,0) = A(1,1,0)$, es decir, que el vector normal del plano $\pi_2$ puede ser cualquier vector paralelo al (1,1,0).

Escribimos entonces la ecuación cartesiana (o general) del plano $\pi_2$

$\pi_2: \quad x + y + D = 0$

Como el mismo debe pasar por el punto (0,0,0), sabemos que D=0, entonces:

$\pi_2: \quad x + y = 0$

<u>Otra forma de obtener $\boldsymbol{n_{\pi_2}}$</u>:

Como $\pi_2$ es perpendicular a $\pi_1$, el vector $\boldsymbol{n_{\pi_2}}$ será paralelo a $\pi_1$, y por lo tanto es combinación lineal de los vectores (1,4,-2) y (3,0,2), es decir:

$(A,B,C) = k_1(1,4,-2) + k_2(3,0,2) \qquad , k_1 \; y \; k_2 \; \in \mathbb{R}$

Incorporando la condición [2] tenemos:

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 = A \\ 4k_1 + 0k_2 = B \\ -2k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 4k_1 \\ B = 4k_1 \\ k_1 = k_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{n_{\pi_2}} = (4k_1, 4k_1, 0)\,, k_1 \in \mathbb{R} \\ \boldsymbol{n_{\pi_2}} = (1,1,0) \end{matrix}$$

# 3.5 RECTAS

## 41.

a) Para escribir la ecuación de una recta necesitamos conocer datos que nos indiquen su dirección y su ubicación en el plano (o en el espacio si estamos en $R^3$). Podemos conocer dos puntos de la recta, o un punto y la pendiente, o bien un punto y su vector director. El vector director nos indica la dirección de la recta, y un punto de la misma nos indica su ubicación.

Sabemos que la recta $L_1$ pasa por el punto A (3,1), es decir: $A\ (3,1) \epsilon\ L_1$

También sabemos que es paralela a la recta determinada por los puntos B y C, por lo tanto, podemos conocer su vector director como:

$\boldsymbol{d}_{L1} = \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{OC} - \boldsymbol{CB} = (-2,2) - (4,1) = (-6,1)$

Planteando la ecuación vectorial paramétrica, resulta:

$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{BC}\ ; t \ \epsilon\ \mathbb{R}$

en términos de sus componentes:

$(x, y) = (3,1) + t(-6,1)\ ; t\ \epsilon\ \mathbb{R}$

Igualando componente a componente, obtenemos las ecuaciones vectoriales paramétricas:

$\begin{cases} x = 3 - 6t \\ y = 1 + t \end{cases} ; t\ \epsilon\ \mathbb{R}$

Eliminando el parámetro, se llega a la ecuación cartesiana:

$\frac{x-3}{-6} = \frac{y-1}{1}$

Reordenando y reagrupando tenemos la ecuación punto pendiente:

$$-\frac{1}{6}(x-3) = (y-1)$$

y la ecuación explicita:

$y = -\frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

Finalmente, pasando todo hacia un lado de la igualdad, resulta la ecuación general:

$x + 6y - 9 = 0$

b) Para la recta $L_2$ que pasa por el punto Q (2,2), y es perpendicular a la recta $L_1$ determinada en el inciso anterior, tenemos que:

$Q\ (2,2) \epsilon\ L_2$

$\boldsymbol{d}_{L2} \perp \boldsymbol{d}_{L1}$

Un vector perpendicular a $\boldsymbol{d}_{L1} = (-6,1)$ se obtiene intercambiando las componentes de lugar y cambiándole el signo a una de ellas, luego:

$\boldsymbol{d}_{L2} = (1,6)$

*Observación*:

En $\mathbb{R}^2$, hay una única dirección perpendicular a un vector, que podemos encontrar rápidamente mediante el procedimiento anterior. Pero si estamos en $\mathbb{R}^3$, debemos tener en cuenta que hay infinitas direcciones perpendiculares a un vector.

Planteando la ecuación vectorial paramétrica, resulta:

$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OQ} + k\boldsymbol{d}_{L2}\ ; k \in \mathbb{R}$

en término de sus componentes:

$(x, y) = (2,2) + k(1,6)\ ; k \in \mathbb{R}$

Igualando componente a componente, obtenemos las ecuaciones vectoriales paramétricas:

$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 2 + 6k \end{cases} ; k \in \mathbb{R}$

Eliminando el parámetro, se llega a la ecuación cartesiana:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{6}$$

Reordenando y reagrupando tenemos la ecuación punto pendiente:

$\frac{6}{1}(x-2) = (y-2)$

y la ecuación explicita:

$y = 6x - 10$

Finalmente, pasando todo hacia un lado de la igualdad, resulta la ecuación general:

$6x - y - 10 = 0$

Graficamos:

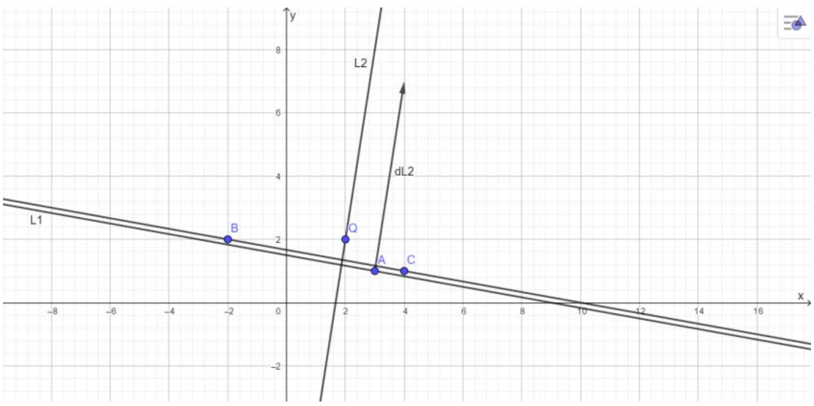



*Figura* 3.31. Representación gráfica del Ejercicio 41 [GeoGebra].

## 42.

a) La ecuación de la familia de rectas que tiene ordenada al origen $b = -4$ resulta:

$y = mx - 4\,; m \epsilon \mathbb{R}$

Observamos que el parámetro de la familia es $m \epsilon \mathbb{R}$, la pendiente de dicha recta. Todas las rectas que pertenecen a esta familia, tienen como ordenada al origen a $b = -4$, es decir que pasan por el punto $B(0, -4)$, y lo que varía entre ellas es la pendiente.

***Observación:***

La recta vertical $x = 0$ también pasa por el punto $B(0, -4)$. Sin embargo, no pertenece a la familia, porque no podemos decir que su ordenada al origen sea $b = -4$ (su intersección con el eje $y$ no es sólo ese punto, sino que es todo el eje $y$). Esta recta no tiene ecuación de la forma pendiente/ordenada al origen, sin embargo, podemos pensarla como una recta cuya pendiente tiende a infinito.

b) Para encontrar el ángulo entre las rectas determinamos en primer lugar los vectores directores de las mismas, y luego el ángulo entre ellos:

Siendo $L_1$: $3x - 3y + 1 = 0$:

Vemos que está expresada mediante la ecuación general (por estar igualada a cero). Por lo tanto, un vector normal a $L_1$ resulta:

$\boldsymbol{n}_{L1} = (3, -3)$

El vector director de $L_1$ puede obtenerse a partir de un vector perpendicular a $\boldsymbol{n}_{L1} = (3, -3)$. Luego:

$\boldsymbol{d}_{L1} = (3{,}3)$

Siendo $L_2$: $x = -y - 3$

La ecuación explícita resulta:

$y = -x - 3$

Observamos que la pendiente es $m = -1 = \frac{-1}{1} = \frac{u_y}{u_x}$, entonces, un vector director de $L_2$ es $\boldsymbol{d}_{L2} = (u_x, u_y) = (1, -1)$.

Se determina el ángulo a partir de la definición de producto escalar:

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{d}_{L1}.\boldsymbol{d}_{L2}}{\|\boldsymbol{d}_{L1}\|.\|\boldsymbol{d}_{L2}\|} = \frac{(3{,}3).(1, -1)}{\sqrt{3^2 + 3^2}\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$cos\theta = \frac{3 - 3}{\sqrt{18}\sqrt{2}} = 0$$

$\theta = arc\cos(0) = 90°$

Por lo tanto, las rectas son perpendiculares.

c) La ecuación de la familia de rectas que pasan por la intersección de las dos rectas dadas en el inciso anterior resulta:

$(3x - 3y + 1) + k(x + y + 3) = 0\,;k \in \mathbb{R}$

d) Representamos gráficamente:

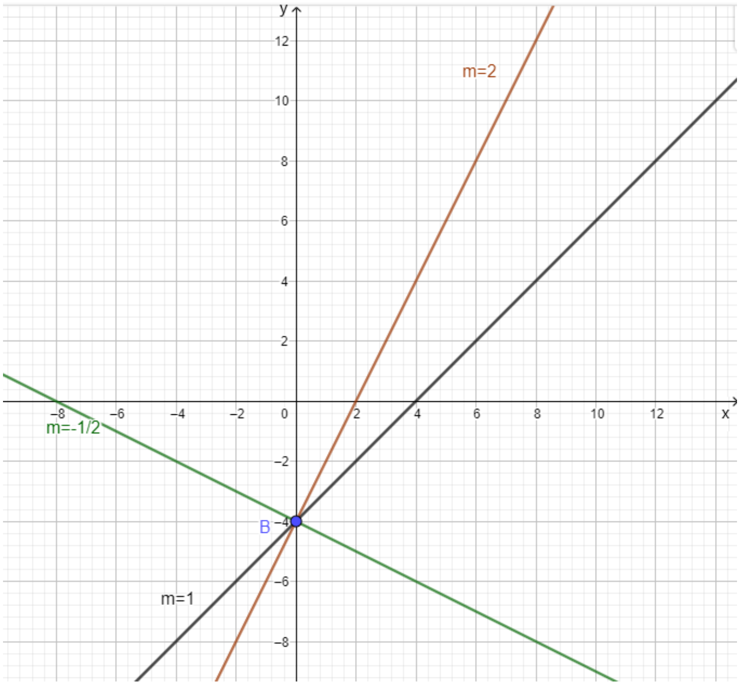



*Figura* 3.32. Representación gráfica del Ejercicio 42.a [GeoGebra].

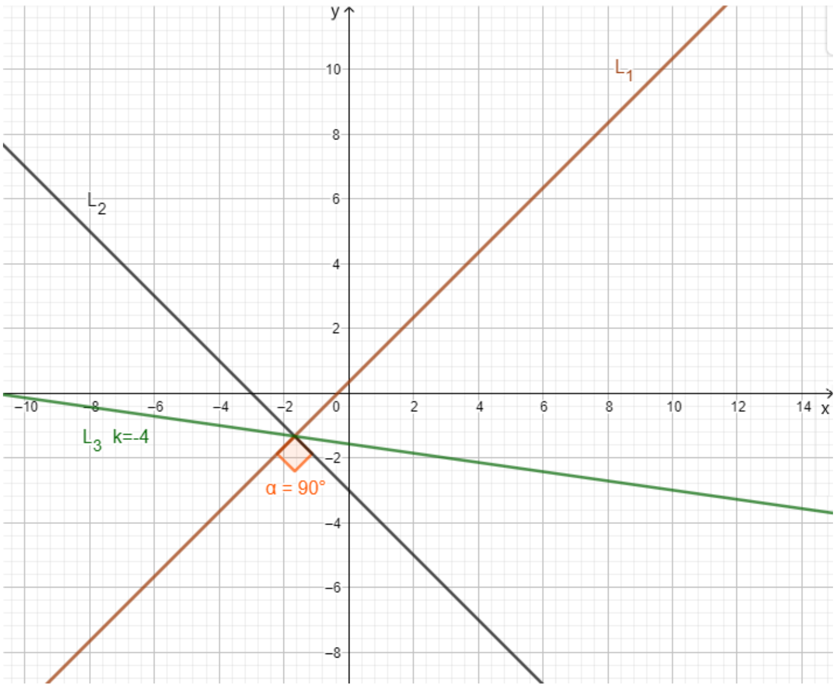



*Figura* 3.33. Representación gráfica del Ejercicio 42.b y c. Se representa la recta L3 que se obtiene para k=-4 en la familia de rectas. [GeoGebra].

## 43.

a) Conocemos la dirección de la recta $L_1$, ya que es paralela al vector $\boldsymbol{v} = (2, -1,3)$. Es decir, tomamos a dicho vector como vector director de la recta. Por otra parte, conocemos también la ubicación de la recta en el espacio, ya que ésta debe pasar por el punto dato Q (2,2,-2). Entonces:

$Q\ (2,2,-2) \epsilon\ L_1$

$\boldsymbol{d}_{L1} // \boldsymbol{v}$

Planteando la ecuación vectorial paramétrica, y tomando a $\boldsymbol{d}_{L1} = \boldsymbol{v}$, resulta:

$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OQ} + k\boldsymbol{d}_{L1}\ ; k \ \epsilon\ \mathbb{R}$

en término de sus componentes:

$(x, y, z) = (2,2, -2) + k(2, -1,3)\ ; k\ \epsilon\ \mathbb{R}$

Igualando componente a componente, obtenemos las ecuaciones vectoriales paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 2 - k \quad , k\ \epsilon\ \mathbb{R} \\ z = -2 + 3k \end{cases}$$

Eliminando el parámetro, se llega a las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

b) Tenemos las ecuaciones de los planos coordenados, a saber:

$\pi_{xy}: z = 0$

$\pi_{xz}: y = 0$

$\pi_{yz}: x = 0$

Para encontrar la intersección entre lugares geométricos cualesquiera, debemos resolver el sistema de ecuaciones con las ecuaciones de dichos lugares geométricos, entonces:

Intersección entre $L_1$ y el plano $\pi_{xy}$:

$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = -2 + 3k \\ z = 0 \end{cases}$$

Luego,

$z = -2 + 3k = 0$

$$k = \frac{2}{3}$$

Siendo,

$$x = 2 + 2k = 2 + 2.\frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

$y = 2 - k = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

La intersección de $L_1$ con $\pi_{xy}$ es el punto $I_{xy}\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$

Intersección entre $L_1$ y el plano $\pi_{xz}$:

$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = -2 + 3k \\ y = 0 \end{cases}$$

Luego,

$y = 2 - k = 0$

$k = 2$

Siendo,

$x = 2 + 2k = 2 + 2.2 = 6$

$z = -2 + 3k = -2 + 3.2 = 4$

La intersección de $L_1$ con $\pi_{xz}$ es el punto $I_{xz}(6,0,4)$

Intersección entre $L_1$ y el plano $\pi_{yz}$:

$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = -2 + 3k \\ x = 0 \end{cases}$$

Luego,

$x = 2 + 2k = 0$

$k = -1$

Siendo,

$y = 2 - k = 2 - (-1) = 3$

$z = -2 + 3.k = -2 + 3.(-1) = -5$

La intersección de $L_1$ con $\pi_{yz}$ es el punto $I_{yz}(0,3,-5)$

c) Una manera de determinar dos puntos de la recta, distintos a los determinados en el inciso anterior, es trabajar desde las ecuaciones vectoriales paramétricas y adoptar cualquier valor de $k$ distinto a los obtenidos en el inciso anterior. Los valores de $k$ determinados previamente son $k = \frac{2}{3}$, $k = 2$ y $k = -1$.

$$L_1: \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = -2 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Podemos darle cualquier valor al parámetro, por ejemplo, para $k = 1$ resulta:

$x = 2 + 2k = 2 + 2.1 = 4$

$y = 2 - k = 2 - 1 = 1$

$z = -2 + 3k = -2 + 3.1 = 1$

$I_1(4,1,1)$

Y para $k = 10$ resulta:

$x = 2 + 2k = 2 + 2.10 = 22$

$y = 2 - k = 2 - 10 = -8$

$z = -2 + 3k = -2 + 3.10 = 28$

$I_2(22, -8, 28)$

d) Llamamos $L_2$ a la recta:

$$L_2: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -7 + 3t \end{cases}$$

Para encontrar el ángulo entre $L_1$ y $L_2$, determinamos el ángulo entre sus vectores directores. Sabemos que:

$\boldsymbol{d}_{L1} = \boldsymbol{v} = (2, -1, 3)$

El vector director de $L_2$ se obtiene directamente de las ecuaciones vectoriales paramétricas. El coeficiente que acompaña al parámetro es la componente asociada a la variable presente en la ecuación. Es decir, el vector director de $L_2$ es:

$\boldsymbol{d}_{L2} = (-2, 2, 3)$

El ángulo entre ellas resulta:

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{d}_{L1}.\boldsymbol{d}_{L2}}{\|\boldsymbol{d}_{L1}\|.\|\boldsymbol{d}_{L2}\|} = \frac{(2,-1,3).(-2,,2,3)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}\,\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 3^2}}$$

$$cos\theta = \frac{-4 - 2 + 9}{\sqrt{14}\,\sqrt{17}} = 0{,}1945$$

$\theta = arc\cos(0{,}1945) = 78°47'12{,}32'$

*Observación*:

Cuando consideramos ángulos entre rectas no perpendiculares, se forman dos ángulos suplementarios, uno agudo y otro obtuso, y cualquiera de los dos es válido como respuesta. Podríamos haber tomado un vector director con sentido opuesto a los utilizados para el cálculo, en cualquiera de las rectas, y así obtendríamos analíticamente el otro ángulo.

e) Para determinar la distancia entre la recta $\boldsymbol{L_1}$ y el punto $\boldsymbol{M}(4, -1, 3)$ utilizamos la siguiente expresión, correspondiente a la distancia entre un punto y una recta en $\mathbb{R}^3$:

$$h = \frac{\|\boldsymbol{QM} \wedge \boldsymbol{d_{L1}}\|}{\|\boldsymbol{d_{L1}}\|}$$

siendo $\boldsymbol{QM}$ un vector con origen en un punto cualquiera de la recta $\boldsymbol{L_1}$ (en nuestro caso el punto Q) y el punto al cual se pretende obtener la distancia.

El vector $\boldsymbol{QM}$ resulta:

$$\boldsymbol{QM} = \boldsymbol{OM} - \boldsymbol{OQ} = (2, -3,5)$$

$$\boldsymbol{QM} \wedge \boldsymbol{d_{L1}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \big((-3).3 - 5.(-1)\big)\boldsymbol{i} - (2.3 - 5.2)\boldsymbol{j} + (2.(-1) - (-3).2)\boldsymbol{k} =$$

$$\boldsymbol{QM} \wedge \boldsymbol{d_{L1}} = (-4,4,4)$$

$$\|\boldsymbol{QM} \wedge \boldsymbol{d_{L1}}\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{48}$$

$$\|\boldsymbol{d_{L1}}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$h = \frac{\|\boldsymbol{QM} \wedge \boldsymbol{d_{L1}}\|}{\|\boldsymbol{d_{L1}}\|} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{14}} = 1{,}85\ [L]$$

La distancia entre la recta $L_1$ y el punto M es de 1,85 unidades de longitud.

## 44.

a) La recta $L_2$ se encuentra expresada como la intersección del plano $\pi_1: -x + y + 1 = 0$ y el plano $\pi_2: -6y + 3z - 3 = 0$.

Debemos obtener las ecuaciones simétricas de dicha recta, que tienen la forma:

$$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z}$$

siendo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto perteneciente a la recta, y $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$ el vector director de la misma. Es posible obtener estas ecuaciones reordenando términos en las ecuaciones de los planos, como se muestra a continuación:

Despejamos una de las variables (la misma) de las ecuaciones de los planos, y las igualamos:

$$-x + y + 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{x - 1}{1}$$

$$-6y + 3z - 3 = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{3z - 3}{6} = \frac{z - 1}{2}$$

Igualando:

$$y = \frac{x - 1}{1} = \frac{z - 1}{2}$$

Para mayor claridad, se completan términos de manera de llegar a la misma forma de las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 1}{2}$$

Observamos que los números directores son $u_x = 1$, $u_y = 1$ y $u_z = 2$. Por lo tanto, el vector director de la recta es:

$\boldsymbol{d}_{L2} = (1,1,2)$

Y un punto de la misma:

$P(1,0,1)$

La ecuación vectorial paramétrica resulta:

$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OP} + k\boldsymbol{d}_{L2}\ ; k \in \mathbb{R}$

en término de sus componentes:

$(x, y, z) = (1,0,1) + k(1,1,2)\ ; k \in \mathbb{R}$

*Otra estrategia de resolución:*

Para obtener la ecuación de la recta, necesitamos conocer su vector director y un punto de la misma. Como la recta está contenida en ambos planos simultáneamente, su vector director es ortogonal a los vectores normales de dichos planos. Entonces, podemos determinar un vector director a partir del producto vectorial de las normales de los dos planos.

$\boldsymbol{n}_{\pi 1} = (-1,1,0)$

$\boldsymbol{n}_{\pi 2} = (0,-6,3)$

$\boldsymbol{n}_{\pi 1} \wedge \boldsymbol{n}_{\pi 2} = (3,3,6) = 3(1,1,2)$

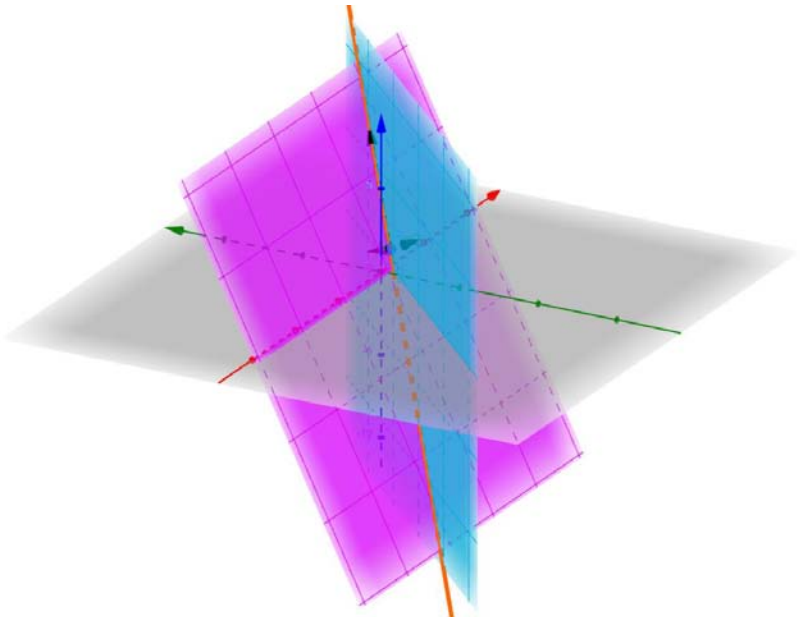


*Figura* 3.34. Representación gráfica del Ejercicio 44 a. Recta L2 como intersección de dos planos. [GeoGebra]

Para determinar un punto que pertenezca simultáneamente a los dos planos, basta con encontrar una de las infinitas soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x+y+1=0 \\ -6y+3z-3=0 \end{cases}$$

Para ello, podemos adoptar arbitrariamente el valor de alguna de las tres coordenadas, y determinar mediante las ecuaciones las otras dos coordenadas.

Siendo la ecuación del primer plano $\pi_1$:

$$-x+y+1=0$$

Asignamos, por ejemplo, el valor a la coordenada $y=0$ (se toma el valor cero por simplicidad, pero cualquier otro valor es válido), y se encuentra de la ecuación del primer plano el valor de la coordenada $x=1$.

Con el valor de $y=0$ y de $x=1$ determinados a partir de la primera ecuación, vamos a la segunda ecuación correspondiente a $\pi_2$ para encontrar un valor de la coordenada $z$ que cumpla con dicha condición.

La ecuación del segundo plano es:

$$-6y+3z-3=0$$

$$z=\frac{6y+3}{3}=\frac{6.(0)+3}{3}=1$$

Por lo tanto, un punto perteneciente al plano resulta:

$$P(1,0,1)$$

Con el vector director y el punto se plantea la ecuación vectorial paramétrica.

b) Para determinar la posición relativa entre las rectas $L_1$ y $L_2$ seguimos el siguiente procedimiento analítico:

En primer lugar, se evalúa si las rectas son paralelas. Para ello se debe determinar si sus vectores directores son paralelos (proporcionales).

¿ $\boldsymbol{d}_{L1}//\boldsymbol{d}_{L2}$?

O lo que es lo mismo, ¿se cumple que $\boldsymbol{d}_{L1}=k\boldsymbol{d}_{L2}$ para algún valor $k \in \mathbb{R}$?

Debemos determinar si existe o no algún valor de $k$ que satisfaga lo siguiente:

$$(-2,2,4)=k(1,1,2)=(k,k,2k)$$

igualando componente a componente:

$$\begin{cases} -2=k \\ 2=k \\ 4=2k \end{cases}$$

Se observa que no existe un valor de $k$ que verifique estas igualdades simultáneamente. Por lo tanto, los vectores no son paralelos (o proporcionales) y las rectas tampoco lo son.

Si no son paralelas, podrían ser entonces secantes (existe un plano que contiene ambas rectas) o alabeadas (no hay un plano que las contiene a ambas). Para determinarlo, se aplica la definición de producto mixto. El producto mixto está asociado al volumen de un paralelepípedo, cuyos lados quedan determinados por los vectores asociados al mismo. Si el producto mixto es cero, decimos que el conjunto de vectores no genera un volumen (o bien, el volumen que generan es nulo), ya que se encuentran contenidos los tres en el mismo plano (es decir son coplanares). En caso de que el producto mixto sea distinto de cero, dicho resultado significaría que los vectores generan volumen no nulo, y que los vectores no se encuentran contenidos en el mismo plano.

Los vectores a utilizar para este análisis son los vectores directores de cada recta, y un vector con origen en cualquier punto de una de las rectas y con fin en cualquier otro punto de la otra recta.

A partir de la ecuación vectorial paramétrica que define la recta $L_1$, decimos que su vector director resulta.

$\boldsymbol{d}_{L1} = (-2,2,4)$

Un punto de la recta $L_1$ es el punto:

$P_1(2,-1,-1)$

El vector director de la recta $L_2$, previamente determinado, es el vector:

$\boldsymbol{d}_{L2} = (1,1,2)$

Un punto perteneciente a la misma es:

$P_2(1,0,1)$

Un vector con origen en $L_1$ y fin en $L_2$ es $\boldsymbol{P_1P_2} = (-1,1,2)$

Evaluando el producto mixto $(\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}).\boldsymbol{P_1P_2}$**:**

$$(\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}).\boldsymbol{P_1P_2} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2).(1.2-2.1) - 2.(1.2-2.(-1) + 4.\big(1.1-1.(-1)\big)$$

$$(\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}).\boldsymbol{P_1P_2} = 0 - 8 + 8 = 0$$

El resultado del producto mixto es cero, por lo tanto, los vectores son coplanares. Esto implica que las rectas $L_1$ y $L_2$ son rectas secantes, y se intersecan en un punto.

Obtenemos el punto de intersección resolviendo un sistema de ecuaciones que incluya las ecuaciones de ambas rectas:

$$L_1: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

$$L_2: (x,y,z) = (1,0,1) + k(1,1,2) \ ; k \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow L_2: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = k \quad ; \ k \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2k \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = -1 + 4t \\ x = 1 + k \\ y = k \\ z = 1 + 2k \end{cases}$$

Entonces:

$x = 2 - 2t = 1 + k$

$y = -1 + 2t = k$

$z = -1 + 4t = 1 + 2k$

Con solo dos ecuaciones nos alcanza para determinar los valores de $t$ o de $k$ que verifican estas igualdades:

Resulta el valor de $t = \frac{1}{2}$. Remplazando dicho valor en las ecuaciones paramétricas de $L_1$ tenemos:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ y = -1 + 2t = -1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ z = -1 + 4t = -1 + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Finalmente, el punto de intersección entre $L_1$ y $L_2$ es el punto $I(1,0,1)$

*Observación:*

Si intentamos resolver un sistema similar para el caso de rectas alabeadas, nos encontraremos que dicho sistema no tiene solución, es decir, no existen valores para $x, y, z, t$ y $k$ que satisfagan simultáneamente todas las ecuaciones. Podríamos encontrar valores de los parámetros que permitan obtener el mismo valor para dos de las coordenadas en ambas rectas, pero la tercera coordenada sería diferente.

c) Conociendo el punto $Q(1,-5,3)$ que pertenece a $L_3$, solo nos falta determinar el vector director $\boldsymbol{d}_{L3}$. Necesitamos un vector que sea simultáneamente perpendicular a los vectores $\boldsymbol{d}_{L1}$ y $\boldsymbol{d}_{L2}$, por lo tanto, lo obtenemos a partir del producto vectorial entre ellos. Luego:

$$\boldsymbol{d}_{L3} = (\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} = (0,8,-4)$$

Planteando la ecuación vectorial paramétrica, resulta:

$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OQ} + n\boldsymbol{d}_{L3}\ ; n \in \mathbb{R}$

en término de sus componentes:

$(x, y, z) = (1,-5,3) + n(0,8,-4)\ ; n \in \mathbb{R}$

# 45.

Proyectar un punto sobre un plano significa que, a partir de la ubicación del punto, nos movemos en línea recta (cuya dirección está dada como dato) hasta intersecar el plano. Ese punto de intersección será la proyección buscada. Para ello, determinamos en primer lugar la ecuación de una recta auxiliar $L_A$ que pase por $Q$ y que tenga la dirección de $\boldsymbol{v}$. Luego, buscaremos la intersección de la recta $L_A$ sobre el plano correspondiente.

La ecuación vectorial paramétrica de la recta auxiliar $L_A$ resulta:

$$L_A: \boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OQ} + t\boldsymbol{v}\,; t \in \mathbb{R}$$

$$L_A: (x, y, z) = (2,2,2) + t(1,1,-2)\,; t \in \mathbb{R}$$

Las ecuaciones cartesianas paramétricas son:

$$L_A: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Para encontrar la intersección, resolvemos el sistema de ecuaciones que incluye las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 - 2t \\ 2x + y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

Sustituimos las expresiones para $x$, $y$ y $z$ en la última ecuación. Luego:

$$2(2 + t) + (2 + t) - (2 - 2t) + 6 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, se determina el valor de $t = -2$. Finalmente, para encontrar la intersección, reemplazamos el valor de t en la ecuación de la recta:

$$\begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = 2 - 2 = 0 \\ z = 2 - 2(-2) = 6 \end{cases} \Longrightarrow I(0,0,6)$$

El punto $I(0,0,6)$ es la proyección buscada.

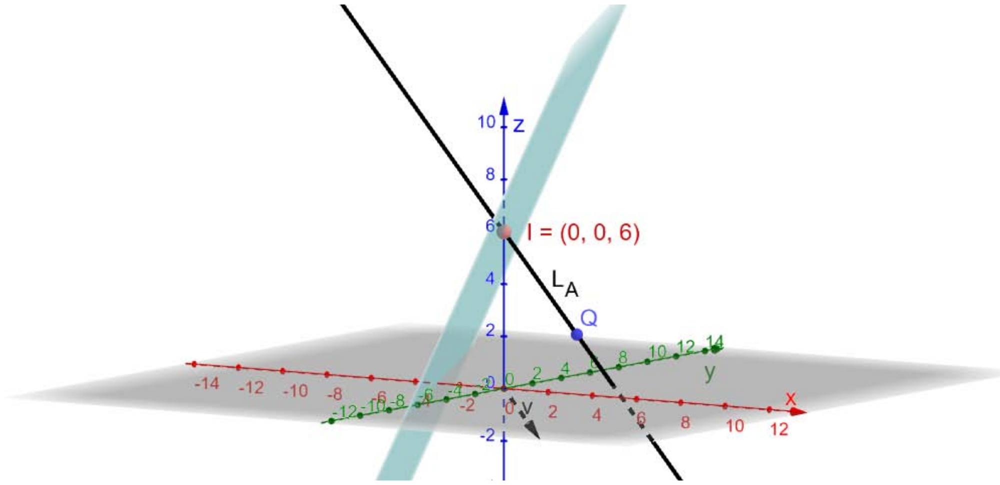



*Figura* 3.35. Representación gráfica del ejercicio 45 [GeoGebra].

## 46.

Llamamos $L_1$ a la recta dato, y $L_2$ a la recta cuya ecuación debemos encontrar. Para escribir la ecuación de $L_2$, necesitamos conocer su vector director y un punto perteneciente a la misma. Encontramos el vector director de la recta $L_2$ de modo tal que el producto escalar con el vector director de la recta $L_1$ sea cero.

$$\boldsymbol{d}_{L1} \cdot \boldsymbol{d}_{L2} = 0$$

Siendo $\boldsymbol{d}_{\mathrm{L1}} = (4,-3)$, tomamos por ejemplo $\boldsymbol{d}_{\mathrm{L2}} = (3,4)$ de forma tal que el producto escalar entre ambos vectores directores es nulo.

$$(4,-3) \cdot (3,4) = 12 - 12 = 0$$

*Observación*:

En $\mathbb{R}^2$, hay una única dirección perpendicular a un vector, que podemos encontrar rápidamente mediante el procedimiento anterior. Pero si estamos en $\mathbb{R}^3$, debemos tener en cuenta que hay infinitas direcciones perpendiculares a un vector.

*Otra forma para encontrar* $\boldsymbol{d}_{L2}$

Podemos trabajar con la ecuación de la recta $L_1$ para obtener la ecuación general y, a partir de la misma, determinar un vector normal a $L_1$. Sabiendo que el vector director de $L_2$ es combinación lineal de ese nuevo vector, podremos determinar un posible vector director de la recta $L_2$. Es decir,

$$L_1: \boldsymbol{OP} = (2,4) + t\,(4,-3) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$L_1: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 4 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$L_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{-3}$$

$$L_1: -3x - 4y + 22 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} A = -3 \\ B = -4 \end{matrix}\right\} \boldsymbol{n}_{L1} = (A, B) = (-3,-4)$$

$$\boldsymbol{d}_{L2} = k\,\boldsymbol{n}_{L1} = k(-3,-4), k \in \mathbb{R}$$

Cualquier valor de $k$ nos permite encontrar un vector director para $L_2$. Adoptamos $k = 1$ y resulta: $\mathbf{d}_{\mathrm{L2}} = (-3,-4)$. Ahora expresamos la ecuación vectorial paramétrica de la recta $L_2$ y a partir de ella todas las demás.

$$\boldsymbol{OP} = (2,1) + \mathrm{k}\,(-3,-4)\ k \in \mathbb{R} \quad \textit{Ecuación vectorial paramétrica}$$

$$\begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 1 - 4k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \quad \textit{Ecuaciones cartesianas paramétricas}$$

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-4} \quad \textit{Ecuación cartesiana de la recta en } \mathbb{R}^2$$

$$-4x + 3y + 5 = 0 \quad \textit{Ecuación general de la recta en } \mathbb{R}^2 \textit{ o ecuación implícita}$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \quad \textit{Ecuación explícita}$$

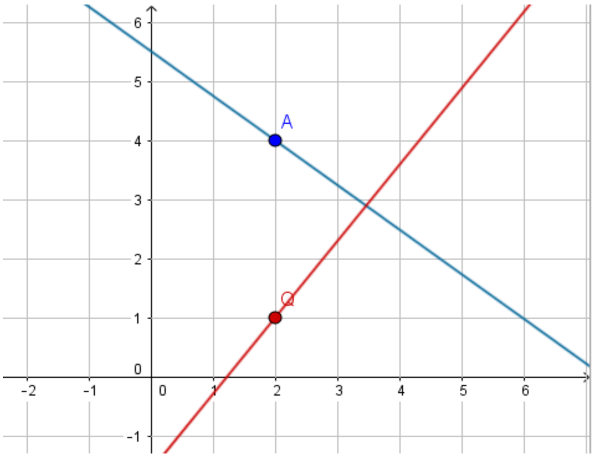



*Figura* 3.36. Representación gráfica del ejercicio 46 [GeoGebra]

## 47.

a) Llevamos las ecuaciones de las rectas a su forma *general*: $y-3=0$ ; $y+x=0$

Luego, escribimos la *ecuación de la familia de rectas* que pasan por la intersección de ambas rectas:

$y+x+k(y-3)=0\ ;\ k\in R$

Si el punto P(2,5) pertenece a la recta, sus coordenadas deben satisfacer su ecuación. Entonces, sustituimos las coordenadas del punto en la ecuación de la familia para determinar el valor de $k$ para el cual se satisface la ecuación:

$$5+2+k(5-3)=0 \quad \longrightarrow \quad k=-\frac{7}{2}$$

Sustituimos el valor de $k$ encontrado en la ecuación de la familia de rectas:

$$y+x+\left(-\frac{7}{2}\right)(y-3)=0$$

Desarrollando obtenemos la ecuación general de la recta buscada: $2x-5y+21=0$

b) Representación gráfica:

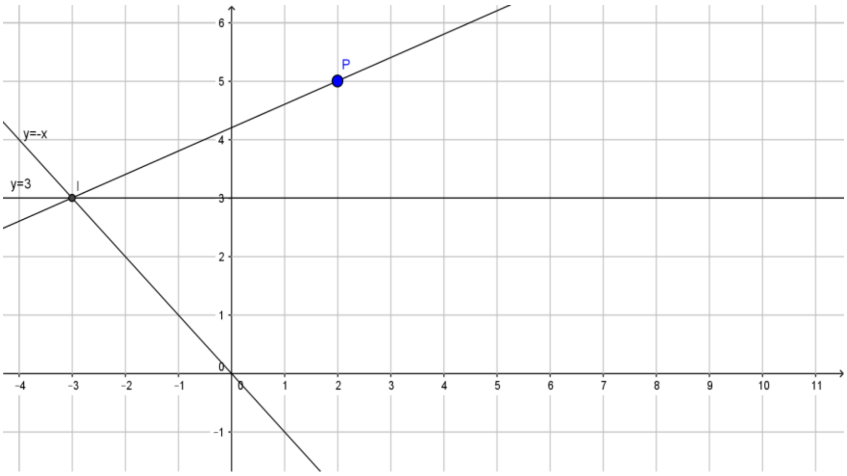



*Figura* 3.37. Representación gráfica del ejercicio 47 [GeoGebra]

## 48.

a) De las ecuaciones de las rectas podemos obtener los vectores directores $\boldsymbol{d}_{\mathrm{L}1} = (2,3,1)$ y $\boldsymbol{d}_{\mathrm{L}2} = (1,4,2)$. Vemos que ambos vectores son LI, por lo tanto se trata de rectas *no paralelas*. Sabemos que en $\mathbb{R}^3$, dos rectas *no paralelas* son secantes si y solo si el producto mixto entre los vectores directores de ambas rectas y el vector que tiene como extremos un punto de cada recta, es nulo.

$\boldsymbol{d}_{\mathrm{L}1} = (2,3,1)$ ; $\boldsymbol{d}_{\mathrm{L}2} = (1,4,2)$ ; $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (-2,-3,-1)$

Como dijimos, $\boldsymbol{d}_{\mathrm{L}1} = (2,3,1)$ y $\boldsymbol{d}_{\mathrm{L}2} = (1,4,2)$ no son paralelos, entonces evaluamos el producto mixto:

$$(\boldsymbol{d}_{\mathrm{L}1} \wedge \boldsymbol{d}_{\mathrm{L}2}).\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 9 + 5 = 0$$

El producto mixto nulo indica que las rectas son coplanares, y como no son paralelas, entonces deben cortarse en un punto.

*Para pensar:* ¿Por qué verificamos primero que las rectas no son paralelas? ¿Qué ocurre con el producto mixto en dicho caso? ¿Qué ocurre con la intersección entre ellas?

b) A partir de las ecuaciones vectoriales paramétricas de las dos rectas, determinamos las ecuaciones cartesianas paramétricas:

$$L_1: \begin{cases} x = 1 + 2t_1 \\ y = 1 + 3t_1 \\ z = -1 + t_1 \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = -1 + t_2 \\ y = -2 + 4t_2 \\ z = -2 + 2t_2 \end{cases}$$

Igualando las expresiones para las coordenadas $x$, e $y$ se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 1 + 2t_1 = -1 + t_2 \\ 1 + 3t_1 = -2 + 4t_2 \end{cases}$$

La resolución de dicho sistema conduce a los valores: $t_1 = -1$ y $t_2 = 0$, que verifican la igualdad para la tercera ecuación en $z$. Por lo tanto, el punto de intersección es $\mathrm{I}(-1,-2,-2)$.

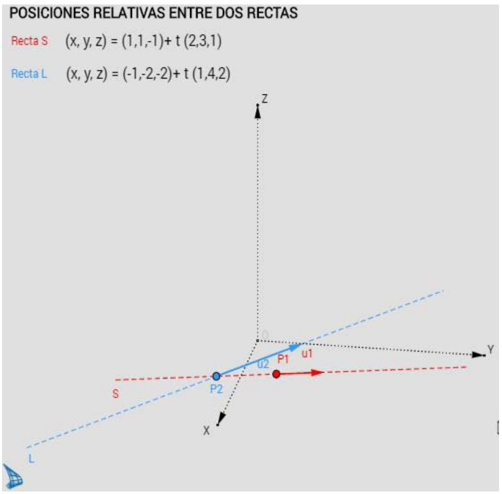



*Figura* 3.38. Representación gráfica del ejercicio 48. [Libro Interactivo Geometría Dinámica para Ciencias e Ingenierías: https://www.geogebra.org/m/zsvdbqju]

c) Escribimos la ecuación vectorial paramétrica del plano definido por las dos rectas dadas, a partir de los vectores directores de ambas rectas, y eligiendo un punto cualquiera de alguna de las dos rectas, o bien el punto de intersección:

$\boldsymbol{OP} = (-1,-2,-2) + k_1(2,3,1) + k_2(1,4,2)$ ; $k_1 \in \mathbb{R}$ $k_2 \in \mathbb{R}$

d) El ángulo entre dos rectas es el ángulo que forman sus vectores directores:

$$\frac{\boldsymbol{d}_{\mathrm{L1}}.\boldsymbol{d}_{\mathrm{L2}}}{\|\boldsymbol{d}_{\mathrm{L1}}\|\,.\,\|\boldsymbol{d}_{\mathrm{L2}}\|} = \cos\propto$$

$$\frac{16}{7.\sqrt{6}} = \cos\propto \quad ;\ \propto \sim 21°$$

## 49.

a) Desarrollo en el libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*.

b) Un punto de la recta es $\mathrm{P}_0(1,2,-1)$; Por lo tanto, el vector $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{Q}$ es:

$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{OQ} - \boldsymbol{OP_0} = (-2,3,5) - (1,2,-1) = (-3,1,6)$

El vector director de la recta es $\boldsymbol{d}_{\mathrm{L}} = (1,3,4)$

La distancia del punto Q a la recta L se calcula con la expresión

$$h = \frac{\|\boldsymbol{P_0Q} \wedge \boldsymbol{d_L}\|}{\|\boldsymbol{d_L}\|} = \frac{\sqrt{620}}{\sqrt{26}}$$

$h = 4{,}88$ unidades de longitud

## 50.

a) Siendo la recta $L_1$ perpendicular al plano $\pi_1$, su vector director es paralelo al vector normal al plano. Entonces:

$\pi_1: 2x - y + z + 3 = 0$ ; $\boldsymbol{n}_{\pi_1} = (2,-1,1)$ ; $\boldsymbol{d}_{L1} = (2,-1,1)$

Una ecuación vectorial paramétrica de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto Q es:

$L_1$: $\boldsymbol{OP} = (-1,3,6) + k(2,-1,1)$ , $k \in \mathbb{R}$

b) Calculamos el producto escalar entre el vector director de la recta y el vector normal al plano dado:

$\boldsymbol{d}_{\mathrm{L2}} = (-4,0,8)$ ; $\boldsymbol{n}_{\pi_1} = (2,-1,1)$ $\boldsymbol{d}_{\mathrm{L2}}.\boldsymbol{n}_{\pi_1} = 0$

El vector director de la recta y el vector normal al plano son perpendiculares. Por lo tanto, la recta y el plano son paralelos. Pueden ser paralelos no coincidentes o la recta puede estar contenida en el plano.

Para saber cuál de las situaciones tenemos, veamos si el punto (0,1,1) de la recta, pertenece o no al plano dado. Para ello, sustituimos las coordenadas del punto en la ecuación del plano:

$2(0) - 1 + 1 + 3 = 3 \neq 0$

Las coordenadas del punto no satisfacen la ecuación del plano, entonces, el punto de la recta dada no pertenece al plano. Concluimos así que la recta es paralela al plano, sin estar contenida en el mismo.

Es posible calcular a qué distancia del plano está, tomando como referencia el punto de la recta:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$h = 1{,}22 \text{ unidades de longitud}$$

## 51.

Tomamos como $L_1$ la recta que representa a la vía férrea, cuyo vector director calculamos de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{d}_{L1} = \boldsymbol{OQ}_2 - \boldsymbol{OQ}_1 = (-20, 25, 0.5)$$

La recta $L_2$ representa la línea de distribución de electricidad, y también calculamos su vector director:

$$\boldsymbol{d}_{L2} = \boldsymbol{OR}_2 - \boldsymbol{OR_1} = (200, 0, -5)$$

Por otra parte, tomamos un vector entre dos puntos de ambas rectas, por ejemplo:

$$\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{OR}_1 - \boldsymbol{OQ}_1 = (-20, 5, 5.5)$$

Podemos evaluar de manera directa el producto mixto entre los tres vectores, o bien, calcular primero el vector normal a ambas rectas y luego multiplicarlo escalarmente por $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1$.

Optamos por esta segunda alternativa, ya que en caso de ser alabeadas, necesitaremos el vector normal para calcular la distancia.

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{L}1} \wedge \boldsymbol{d}_{\mathrm{L}2} = (-125, 0, -5000) \quad ; \|\boldsymbol{d}_{\mathrm{L}1} \wedge \boldsymbol{d}_{\mathrm{L}2}\| = \sqrt{25015625}$$

$$|(\boldsymbol{d}_{\mathrm{L}1} \wedge \boldsymbol{d}_{\mathrm{L}2}).\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1| = -25000$$

Siendo no nulo el producto mixto, las dos rectas son alabeadas.

Calculamos la distancia entre ambas:

$$h = \frac{|(\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}).\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1|}{\|\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}\|} = \frac{25000}{\sqrt{25015625}}$$

Asumiendo que los datos están expresados en metros, la respuesta es:

$h \sim 5$ m

52.

a) En la traza común, sabemos que $z = 0$ por estar en el plano $xy$. Encontraremos las intersecciones de dicha traza con los ejes $x$ e $y$, para plantear la ecuación de la familia de planos con traza común, utilizando la ecuación segmentaria del plano (ver en el Texto *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías)*. Entonces:

- Intersección con el eje $x$:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad A(4,0,0)$$

- Intersección con el eje $y$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad B(0,8,0)$$

Entonces, la ecuación de la familia de planos con la traza común es:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{8} + \frac{z}{k} = 1 \qquad ,k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

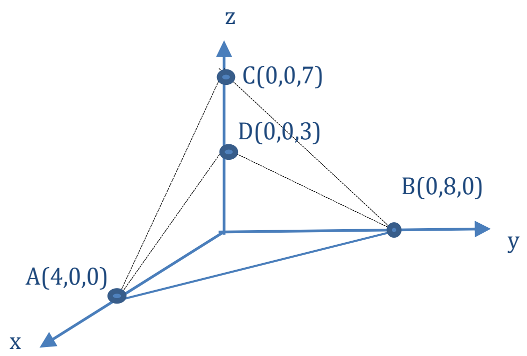



*Figura* 3.39. Representación gráfica del ejercicio 52.a.

b) Para escribir la ecuación vectorial paramétrica de la traza dada en el inciso(a), necesitamos encontrar su vector director y un punto: la recta pasa por el punto A(4,0,0) (o el punto B) y tiene como vector director al vector $\boldsymbol{BA}$ (o $\boldsymbol{AB}$). Es decir:

$L$: $(x, y, z) = (4,0,0) + t\ (4, -8,0) \quad t \in R$

c)

c.1. Plano paralelo al plano $xy$ que pasa por el punto Q(2,-3,5):

Un plano paralelo al plano $xy$ será de la forma $z - D = 0$, o bien: $z = k$. Para que el punto Q pertenezca a dicho plano, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación. Por lo tanto, el plano es $\pi_1$: $z = 5$

c.2. Plano perpendicular al plano $xy$ que pasa por los puntos A(4,0,0) y B(0,8,0):

La ecuación de la traza del inciso a) es:

$$\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ \qquad z = 0 \end{cases}$$

Si omitimos la restricción $z = 0$, obtenemos la ecuación del plano perpendicular al plano $xy$, y que, pasará por los puntos A y B, ya que las coordenadas de dichos puntos satisfacen la ecuación: $\pi_2 : 2x + y - 8 = 0$

Notamos que el vector normal de dicho plano es $\boldsymbol{n}_{\pi_2} = (2,1,0)$, que resulta perpendicular a $\hat{\boldsymbol{k}} = (0,0,1)$, el vector normal del plano $xy$.

*Observación*:

La variable $z$ no aparece en la ecuación de $\pi_2$. Esto significa que dicha variable puede tomar cualquier valor. El coeficiente que acompaña a z es nulo, entonces, para que un punto pertenezca a dicho plano, sólo hay condiciones sobre las coordenadas $x$ e $y$, mientras que la coordenada $z$ es libre. El plano es paralelo al eje z.

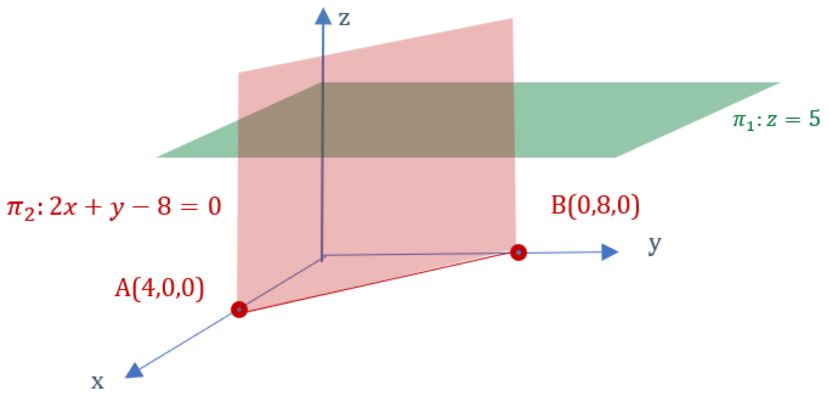



*Figura* 3.40. Representación gráfica del Ejercicio 52c) c.1 y c.2

c.3. Ecuación vectorial paramétrica de la recta intersección de ambos planos:

Consideremos los puntos E y F, que tienen iguales coordenadas $x$ e $y$ que los puntos A y B respectivamente, pero que están sobre el plano $z = 5$. Sus coordenadas serán, entonces, E(0,8,5) y F(4,0,5). La recta de intersección buscada pasa por esos puntos, entonces, un vector director es el vector $\boldsymbol{EF}$ = (4,-8,0), o cualquier vector paralelo. La ecuación de la recta es $L: (x, y, z) = (0,8,5) + t\,(-1,2,0) \;\; t \in R$

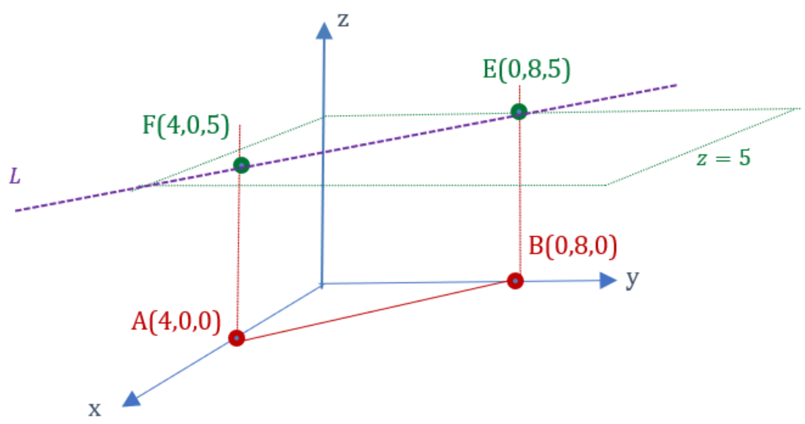



*Figura* 3.41. Representación gráfica del Ejercicio 52c) c.3.

## 53.

a) Consideramos el vector normal del plano y vector director del eje para analizar su posición relativa. Un vector normal al plano dado es $\boldsymbol{n}_{\pi_1} = (0{,}4{,}3)$. Un vector director del eje $x$ es: $\boldsymbol{d}_{\mathrm{Lx}} = (1{,}0{,}0)$. Vemos que ambos vectores son ortogonales ya que su producto escalar es igual a cero:

$$\boldsymbol{n}_{\pi_1} . \boldsymbol{d}_{\mathrm{Lx}} = 0$$

Si el vector normal al plano y el vector director de la recta son perpendiculares, la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. Para distinguir entre ambas situaciones, tomamos un punto cualquiera de la recta, por ejemplo (0,0,0) y vemos que dicho punto no pertenece al plano dado. Por lo tanto, el plano es paralelo al eje $x$.

Para representar gráficamente, es útil obtener los puntos de intersección entre el plano y los ejes coordenados. Si $x = z = 0$ se obtiene $y = 6$. Es decir, A(0,6,0). Si $x = y = 0$ se obtiene $z = 6$. Es decir, B(0,0,8). No hay intersección con el eje $x$ por ser paralelo al plano.

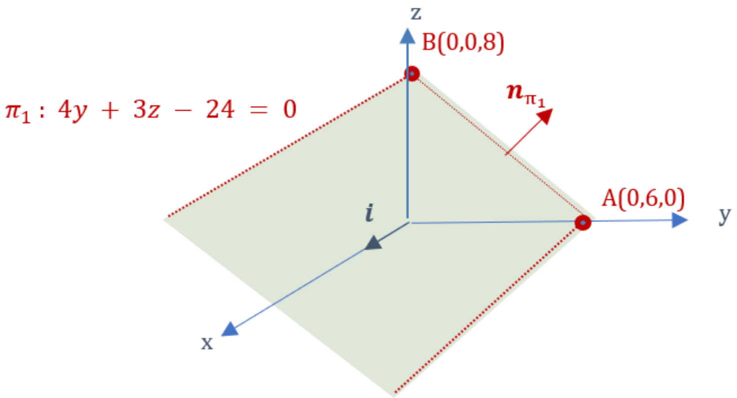



*Figura* 3.42. Representación gráfica del Ejercicio 53.

b) Calculamos la distancia del eje $x$ al plano dado, a partir de la expresión de distancia de un punto a un plano, tomando cualquier punto de la recta, por ejemplo (0,0,0):

$$h = \frac{|4y_0 + 3z_0 - 24|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2}} = 4{,}8 \text{ unidades de longitud}$$

c)

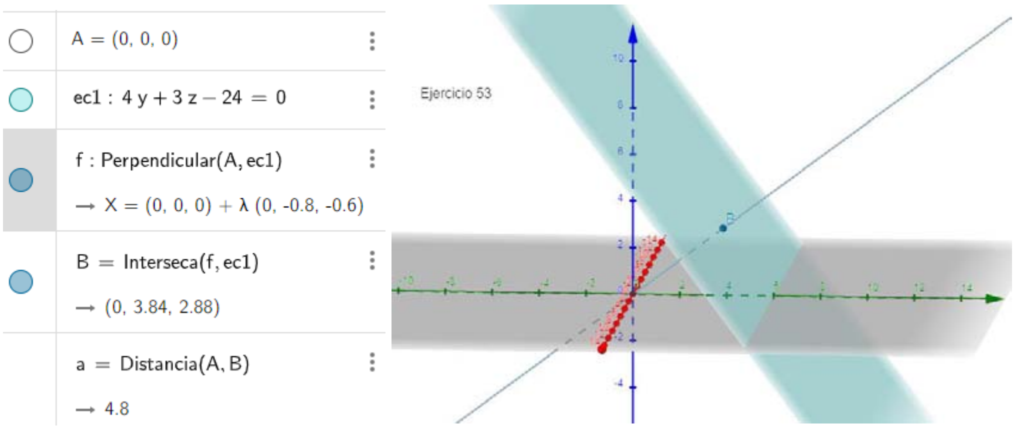



*Figura* 3.43. Representación gráfica del Ejercicio 53.c [GeoGebra]

# 3.6. CIRCUNFERENCIAS

## 54.

Considerando el Centro de la Circunferencia C (2,-1), podemos determinar la ecuación canónica de la Circunferencia:

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = r^2$

Se debe hallar el valor del radio $\mathbf{r}$, el cual se puede obtener utilizando el concepto de distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$. Para ello necesitamos determinar el vector normal a la recta dada, $\boldsymbol{nL}$ = (A,B) = (1,-1) y un punto de la recta, por ejemplo Po (0,1), para poder aplicar la ecuación:

$r = h = \frac{|\boldsymbol{CPo} \cdot \boldsymbol{nL}|}{\|\boldsymbol{nL}\|}$

o también $r = h = \frac{|A\,xo + B\,yo + C|}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$

$r = h = \frac{|(-2,2).(1,-1)|}{\sqrt{(1^2+(-1)^2}}$

o también $r = h = \frac{|1\,.\,2-1.(-1)+1|}{\sqrt{(1^2+(-1)^2}}$

$r = h = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\,.\sqrt{2}$

$r^2 = 8$

Entonces la ecuación canónica de la circunferencia queda:

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$

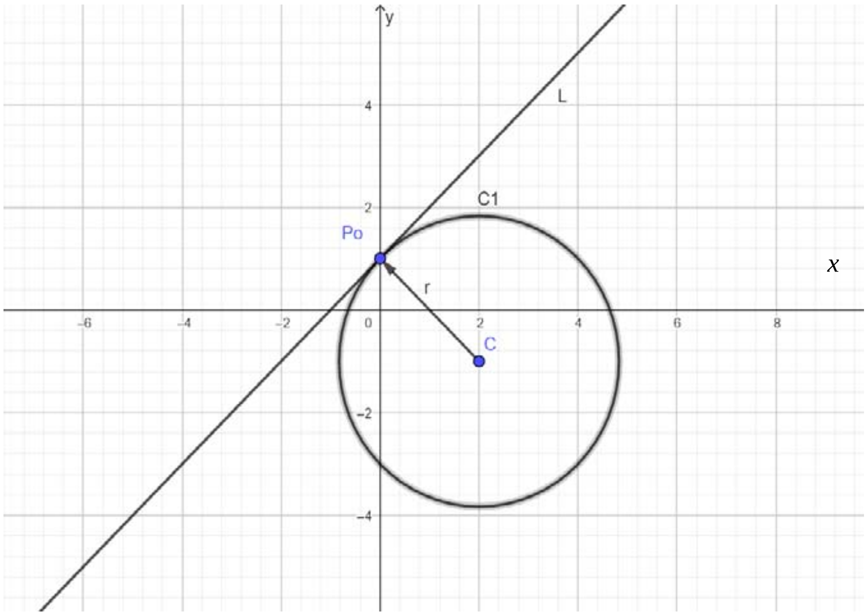



*Figura* 3.44. Representación gráfica del Ejercicio 54 [GeoGebra]

## 55.

La ecuación general de una circunferencia es:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Reemplazando las coordenadas de los puntos dados en dicha ecuación, podemos armar un sistema de ecuaciones:

Punto A: $0 + 0 + 0 + 0 + F = 0$ (1)

Punto B: $4 + 9 + 2D + 3E + F = 0$ (2)

Punto C: $25 + 1 + 5D + E + F = 0$ (3)

De la (1), se determina que F = 0

De la (2), $2D + 3E = -13$ (4)

De la (3), $5D + E = -26$ implica que $E = -26 - 5D$ (5)

Reemplazando (5) en (4) $2D + 3(-26 - 5D) = -13$

$2D - 78 - 15D + 13 = 0$

$-65 - 13D = 0$

implica que D = -5 y reemplazando D en (5), se obtiene E = -1

entonces la ecuación general de la circunferencia queda: $x^2 + y^2 - 5x - y = 0$

Para poder representar gráficamente, se debe determinar el centro y radio, para ello aplicamos:

C(h,k) y $h^2 + k^2 - F = r^2$

Siendo h = -D/2 = 5/2

Entonces el centro es C (5/2 , 1/2)

k = -E/2 = ½

y el radio resulta: $r = \sqrt{((\frac{5}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2)} = 2.55$

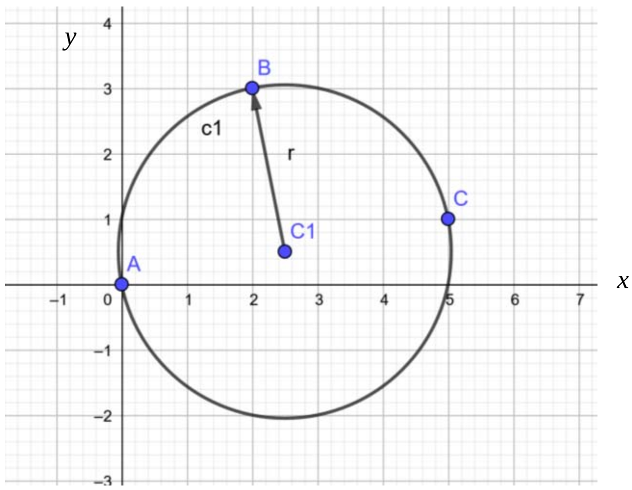



*Figura* 3.45. Representación gráfica del Ejercicio 55. [GeoGebra]

## 56.

A partir de la ecuación general de una cónica, $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, vemos que $A$=$C$=1; $B$=0. Cumple la condición $A$=$C$ para que sea una circunferencia. Verificamos que $h^2 + k^2 - F \geq 0$ por lo cual el radio es un número positivo. Por lo tanto, la ecuación dada corresponde a una circunferencia.

Los elementos fundamentales de la circunferencia, se pueden determinar como:

$h$ = -$D$/2 = -2 ; $k$ = -$E$/2 = 3

Entonces el centro es el punto C (-2 , 3)

Aplicando las ecuaciones de traslación:

$x = x' + h$ ; $x = x' - 2$

$y = y' + k$ ; $y = y' + 3$

Reemplazamos estas ecuaciones en la ecuación general de la circunferencia dada:

$(x' - 2)^2 + (y' + 3)^2 + 4(x' - 2) - 6(y' + 3) + 9 = 0$

$x'^2 - 4x' + 4 + y'^2 + 6y + 9 + 4x' - 8 - 6y' - 18 + 9 = 0$

$x'^2 + y'^2 = 4$

De esta ecuación se puede determinar que el radio es: r = 2

Otra forma de resolver este mismo ejercicio es completando cuadrados a partir de la ecuación dada $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$:

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

Determinamos que el centro es C(-2,3) y el radio r=2. En esta última ecuación reemplazamos $x' = x + 2$; $y' = y - 3$, y finalmente escribimos:

$x'^2 + y'^2 = 4$

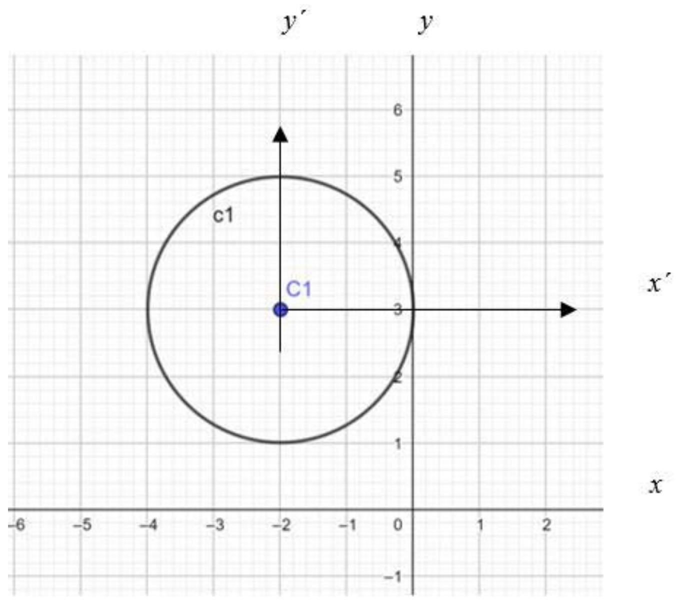



*Figura* 3.46. Representación gráfica del Ejercicio 56. [GeoGebra]

# 57.

Dividimos ambos miembros de la ecuación de la circunferencia C2, por 2:

C2: $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$

Aplicando el concepto de familia de circunferencias, la ecuación de la familia reducida de circunferencias que pasa por la intersección de las circunferencias dadas es:

$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 + \lambda(x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8) = 0 \; \lambda \in R$

$(1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + (-8-4\lambda)x + (-4+4\lambda)y + 11 - 8\,\lambda = 0$

Dividimos todo por $(1+\lambda)$

$$x^2 + y^2 + \frac{(-8-4\lambda)}{(1+\lambda)}x + \frac{(-4+4\lambda)}{(1+\lambda)}y + \frac{11-8\,\lambda}{(1+\lambda)} = 0$$

Como el centro de la circunferencia C3, está sobre la recta L, el centro C($h$,$k$) de dicha circunferencia satisface la ecuación de la recta L

L: 2x + y - 14 = 0, entonces $\quad 2h + k - 14 = 0 \quad$ (1)

$h = -D/2 = \frac{-(-8-4\lambda)}{2(1+\lambda)} = \frac{(4+2\lambda)}{(1+\lambda)}$ (2)

$k = -E/2 = \frac{-(-4+4\lambda)}{2(1+\lambda)} = \frac{(2-2\lambda)}{(1+\lambda)}$ (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1): $\quad 2\left[\frac{(4+2\lambda)}{(1+\lambda)}\right] + \frac{(2-2\lambda)}{(1+\lambda)} - 14\frac{(1+\lambda)}{(1+\lambda)} = 0$

$$\frac{8+4\lambda+2-2\lambda-14-14\lambda}{(1+\lambda)} = 0$$

$$\frac{-4-12\lambda}{(1+\lambda)} = 0$$

$-4 - 12\lambda = 0$

$\lambda = -1/3$

Reemplazando este valor en la siguiente ecuación

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)x^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)y^2 + \left(-8-4\left(-\frac{1}{3}\right)\right)x + \left(-4-4\left(-\frac{1}{3}\right)\right)y + 11 - 8\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 - \frac{20}{3}x - \frac{16}{3}y + \frac{41}{3} = 0$$

Dividimos por $\left(-\frac{2}{3}\right)$ y obtenemos la ecuación de la circunferencia:

C3: $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 20.5 = 0$

Para poder representarlas gráficamente, determinamos centros y radios:

C1: $\quad h = -D/2 = 4$ ; $k = -E/2 = 2$ ; $C_1(4,2)$ y r = 3

C2: $\quad h = -D/2 = 2$ ; $k = -E/2 = -2$ ; $C_2(2,-2)$ y r = 4

C3 $\quad h = -D/2 = 5$ ; $k = -E/2 = 4$ ; $C_3(5,4)$ y r = 4.53

Para la determinación de la longitud de la cuerda común, primero se debe determinar la ecuación del eje radical, esto es para cuando λ = -1:

$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 + (-1)(x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8) = 0$

$-4x - 8y + 19 = 0$

Ecuación del eje radical: $y = \frac{-1}{2}x + \frac{19}{8}$

Ahora se puede determinar los puntos de intersección de dicho eje radical con alguna de las circunferencias, por ejemplo, con la circunferencia C1:

$$x^2 + \left(\frac{-1}{2}x + \frac{19}{8}\right)^2 - 8x - 4\left(\frac{-1}{2}x + \frac{19}{8}\right) + 11 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{19}{8}x - 8x + 2x + \frac{361}{64} - \frac{19}{2} + 11 = 0$$

$$\frac{5}{4}x^2 - \frac{67}{8}x + \frac{457}{64} = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática en una variable, se determinan los puntos de intersección:

A (5.7,-0.47) y B (1,1.87)

Entonces la longitud de la cuerda común de las circunferencias dadas, se calcula como:

$\| AB \| = \sqrt{(5.7-1)^2 + ((-0.47-1.87)^2} = 5.25$

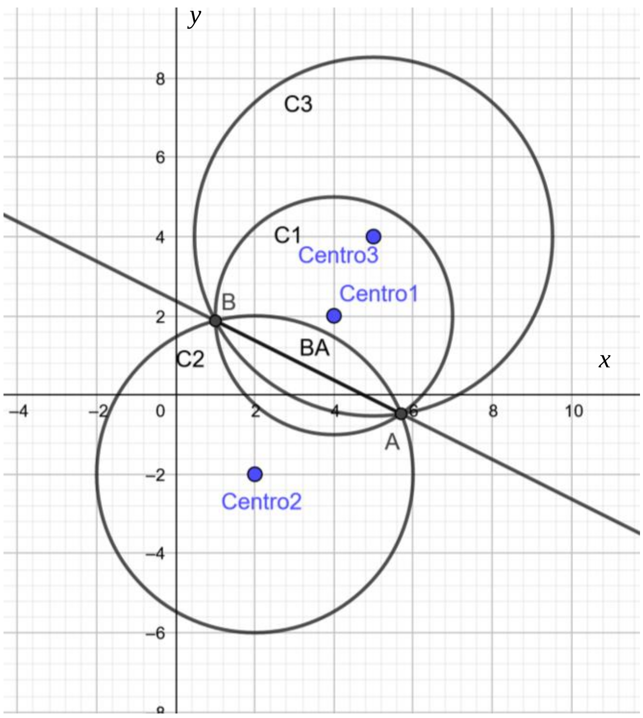



*Figura* 3.47. Representación gráfica del Ejercicio 57. [GeoGebra]

## 58.

Para determinar los puntos de intersección entre ambos lugares geométricos, se plantean el siguiente sistema de dos ecuaciones, una cuadrática y una lineal:

C: $(x+4)^2+y^2=9$

L1: y + x – 5 = 0, y = 5 - x

Resolvemos el sistema, despejando de la ecuación de la recta cualquiera de las dos variables y la sustituimos en la otra ecuación.

$(x+4)^2+(5-x)^2=9$

$x^2+8\text{x}+16+25-10x+x^2=9$

$2x^2-2\text{x}+32=0$

Obtenemos de este modo una ecuación de segundo grado en una única variable, de la forma $ax^2+\text{bx}+\text{c}=0$.

Para encontrar las raíces planteamos $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y estudiamos el valor del discriminante $\Delta = b^2-4ac$ (radicando), si es mayor, igual o menor a 0.

Para el caso de la recta L1: Δ = -252, implica que no hay intersección, ya que se obtienen raíces complejas conjugadas y por lo tanto no existe intersección en los reales entre la recta y la circunferencia dada. Se dice que la recta es *exterior* a la circunferencia.

Repetimos los mismos pasos para las otras dos rectas:

C: $(x+4)^2+y^2=9$

L2: y - $x$ – 1 = 0, $y = x + 1$

$(x+4)^2+(x+1)^2=9$

$x^2+8x+16+x^2+2x+1=9$

$2x^2+10x+8=0$

$\Delta = 36 > 0$

Obtenemos dos soluciones reales y distintas, que nos conducen a dos puntos de solución del sistema de ecuaciones lineales. Es así que la recta y la circunferencia tienen dos puntos en común. Por lo tanto, se dice que la recta es *secante* a la circunferencia.

Las raíces son: $x_1 = -4$ y $x_2 = -1$

Reemplazando en la ecuación de la recta, obtenemos $y_1 = -3$ e $y_2 = 0$.

Entonces los puntos de intersección son: I1(-4,-3) y I2(-1,0)

C: $(x+4)^2+y^2=9$

L3: $x + 7 = 0$, $x = -7$

$((-7)+4)^2+y^2=9$

$9+y^2=9$

$y=0$

Obtenemos un punto de intersección, I3(-7,-0), lo que nos conduce a un único punto solución del sistema de ecuaciones lineales. Es decir, la recta y la circunferencia tienen un único punto en común, o sea, la recta L3 es *tangente* a la circunferencia.

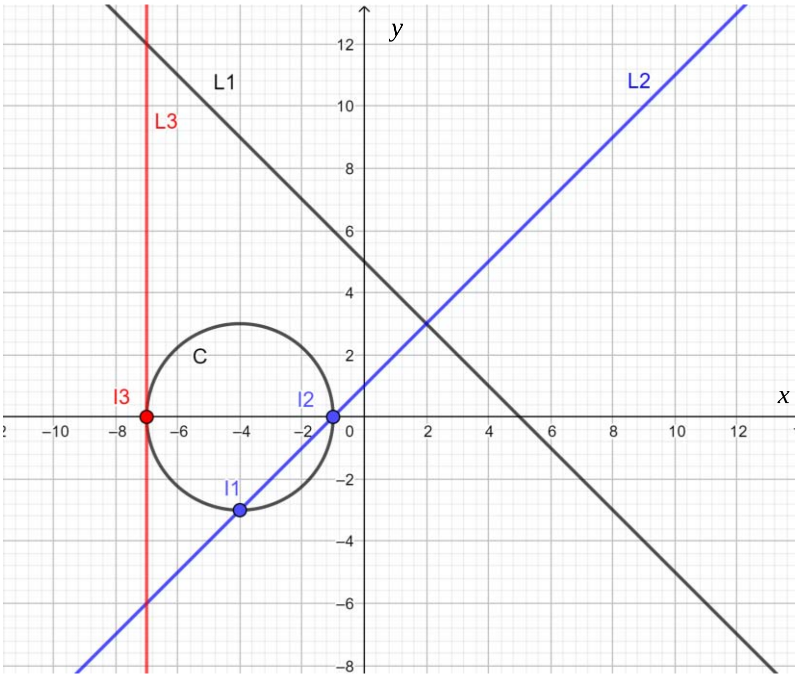



*Figura* 3.48. Representación gráfica del Ejercicio 58. [GeoGebra]

## 59.

Para obtener $A$=$C$=1, dividimos por 2, ambos miembros de la ecuación de la circunferencia:

C: $x^2 + y^2 + 2x + y - 11 = 0$

La ecuación de las rectas tangentes sería de la forma

L: $y$ = m $x$ + b,

Sabemos que m = -3/2 y por lo tanto:

$y$ = -3/2 $x$ + b

Como las rectas son tangentes, quiere decir, que cada una de ellas corta a la circunferencia en un único punto. Determinaremos el punto de intersección, ya que, teniendo un punto y la pendiente, podremos escribir la ecuación de la recta tangente. Para ello reemplazamos en la ecuación de la circunferencia, la variable y de la ecuación de la recta:

$$x^2 + \left(-\frac{3}{2}x + b\right)^2 + 2x + \left(-\frac{3}{2}x + b\right) - 11 = 0$$

$$x^2 + \frac{9}{4}x^2 - 3xb + b^2 + 2x - \frac{3}{2}x + b - 11 = 0$$

$$\frac{13}{4}x^2 - 3xb + b^2 + \frac{1}{2}x + b - 11 = 0$$
$$\frac{13}{4}x^2 + \left(-3b + \frac{1}{2}\right)x + (b^2 + b - 11) = 0$$

Obtenemos de este modo una ecuación de segundo grado en una única variable. Para que sea recta tangente, es decir que corte a la circunferencia en un único punto, el valor del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ debe ser nulo. Entonces:

$$\left(-3b + \frac{1}{2}\right)^2 - 4.\frac{13}{4}.(b^2 + b - 11) = 0$$
$$9b^2 - 3b + \frac{1}{4} - 13b^2 - 13b + 143 = 0$$
$$-4b^2 - 16b + 573/4 = 0$$

Multiplicamos miembro a miembro por (-4):

$$16b^2 + 64b - 573 = 0$$

Obtenemos de este modo otra ecuación de segundo grado, donde las raíces reales y distintas son:

b1 = 4.3 y b2 = -8.3

Reemplazando en la ecuación de la recta tangente, obtenemos las dos ecuaciones de recta tangentes paralelas y con distinta ordenada al origen:

$L_1$: y= -3/2 x + 4.3 y $L_2$: y = -3/2 x – 8.3

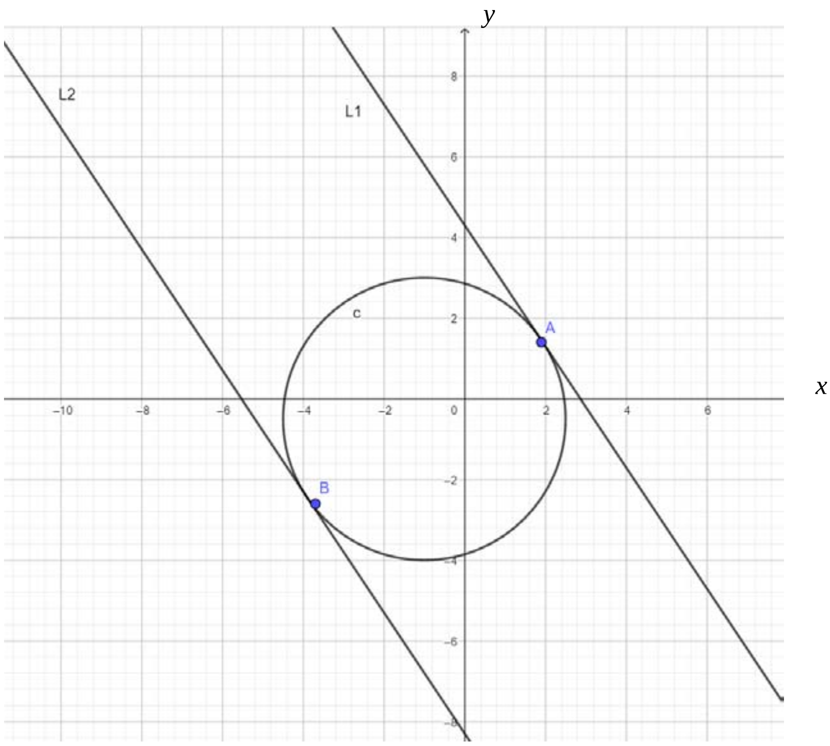



*Figura* 3.49. Representación gráfica del Ejercicio 59. [GeoGebra]

## 60.

La ecuación vectorial paramétrica de la circunferencia de centro C(h,k) y radio r es:

$(x,y) = (h,k) + (\text{r} \cos \alpha , \text{r} \operatorname{sen} \alpha) \quad \alpha \in [0; 2\pi)$

Reemplazando las coordenadas del centro C(-1,3) y radio 4 obtenemos:

$(x,y) = (-1,3) + (4 \cos \alpha , 4 \operatorname{sen} \alpha) \qquad \alpha \in [0; 2\pi)$

Dos vectores son iguales sí y sólo sí sus respectivas componentes lo son, entonces igualamos componente a componente y obtenemos las ecuaciones cartesianas paramétricas:

$\begin{cases} x = -1 + 4\cos\alpha \\ y = 3 + 4\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$ con $\alpha \in [0; 2\pi)$

## 61.

Considerando el centro de la circunferencia C (3,-2), y que pasa por el punto A (3,7), podemos determinar el módulo de $\boldsymbol{CA}$, para calcular el radio de dicha circunferencia:

$$\| \boldsymbol{CA} \| = \sqrt{(3-3)^2 + (7-(-2))^2} = 9$$

Entonces podemos escribir la ecuación cartesiana de la circunferencia como:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9^2$$

La ecuación vectorial paramétrica de la circunferencia con centro en C$(h,k)$ y radio r es:

$(x,y) = (h,k) + (\text{r} \cos \alpha , \text{r} \operatorname{sen} \alpha) \quad ; \quad 0 \leq \alpha < 2\pi$

Reemplazando las coordenadas del centro y radio obtenemos:

$(x,y) = (3,-2) + (9 \cos \alpha , 9 \operatorname{sen} \alpha) \;\; ; \;\; 0 \leq \alpha < 2\pi$

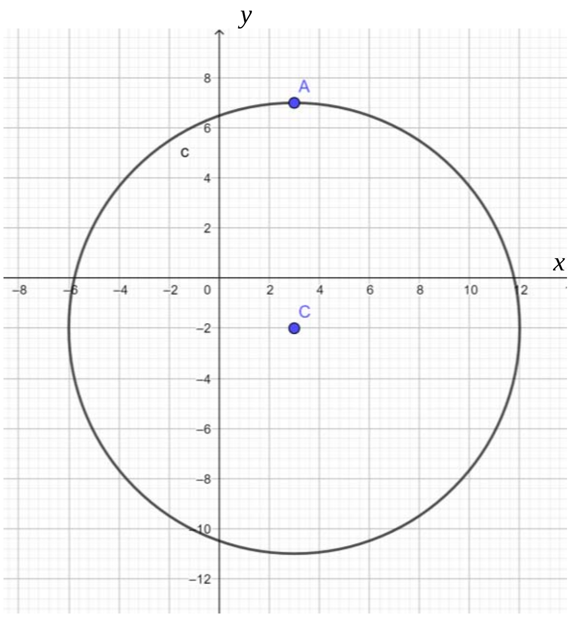



*Figura* 3.50. Representación gráfica del Ejercicio 61. [GeoGebra]

# 62.

Determinamos el centro de la circunferencia, en el punto de intersección de las dos rectas:

$L_1$: $3x - y + 15 = 0 \quad y = 3x + 15 \quad$ (I)

$L_2$: $4x + y + 13 = 0 \quad y = -4x - 13 \quad$ (II)

Igualando ambas ecuaciones:

$3x + 15 = -4x - 13$

$3x + 4x = -13 - 15$

$7x = -28$

$x = -4$

Reemplazando en (I), y = 3 (-4) + 15 = -12 + 15 = 3

Entonces las coordenadas del centro son C (-4,3)

Considerando el centro de la circunferencia C (-4,3), y que pasa por el punto Q (-3,2), podemos determinar el módulo de $\boldsymbol{CQ}$, para calcular el radio de dicha circunferencia:

$$\| \boldsymbol{CQ} \| = \sqrt{\left((-3) - (-4)\right)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$$

Entonces podemos escribir la ecuación cartesiana de la circunferencia como:

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 2$$

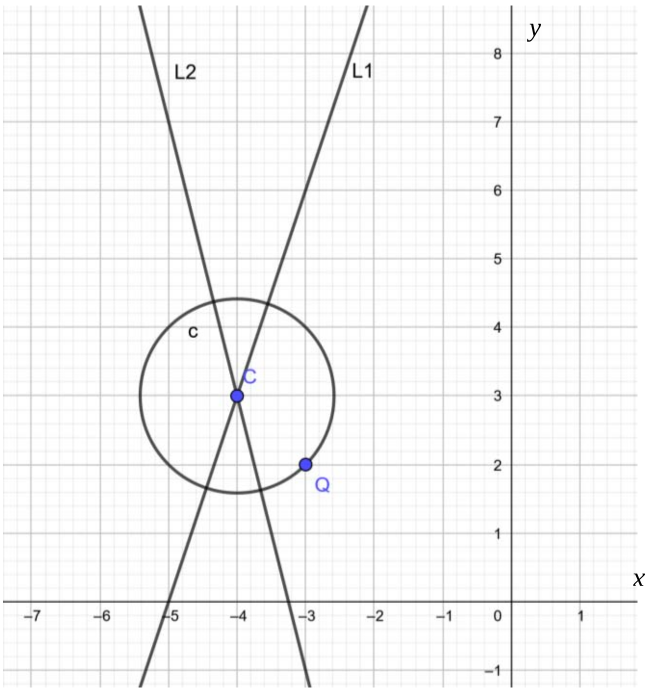



*Figura* 3.51. Representación gráfica del Ejercicio 62. [GeoGebra]

# 63.

El punto de tangencia $T(x_T, y_T)$ cumple la ecuación de la recta L, es decir:

$y_T = \frac{3}{2} x_T$ (I)

Sabemos que un vector director de la recta L puede ser $\boldsymbol{dL} = (B, -A)$ siendo la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$, por lo tanto: $\boldsymbol{dL} = (-2, -3)$ es un vector director de la recta tangente 3$x$-2$y$=0. Dicho vector director es perpendicular al vector $\boldsymbol{CT}$ que va del centro de la circunferencia al punto de tangencia.

$\boldsymbol{CT} = \boldsymbol{OT} - \boldsymbol{OC} = (x_T - 3\,, y_T + 2)$

Entonces:

$\mathbf{CT} \cdot \boldsymbol{dL} = 0$

$(x_T - 3\,, y_T + 2) \cdot (-2, -3) = 0$

$-2x_T + 6 - 3y_T - 6 = 0$ (II)

Reemplazando (I) en (II), obtenemos:

$-2x_T + 6 - 3\,\frac{3}{2} x_T - 6 = 0$

$-2x_T - \frac{9}{2} x_T = 0$

$x_T = 0$

Por lo tanto, $y_T = 0$

Es decir que la recta pasa por el punto T (0,0). Considerando el centro de la circunferencia C (3,-2), y que pasa por el punto T (0,0), podemos determinar el módulo del vector $\boldsymbol{CT}$, para calcular el radio de dicha circunferencia:

$$r = \| \boldsymbol{CT} \| = \sqrt{(0-3)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{13}$$

Podemos escribir la ecuación cartesiana de la circunferencia como:

$$\mathrm{C}: (\mathrm{x} - 3)^2 + (\,\mathrm{y} + 2)^2 = 13$$

Desarrollando los binomios en esta última expresión, se puede determinar la ecuación general de la circunferencia:

C: $x^2 - 6\mathrm{x} + 9 + \mathrm{y}^2 + 4y + 4 = 13$

C: $x^2 - 6\mathrm{x} + \mathrm{y}^2 + 4y = 0$

*Otra forma de resolver el ejercicio*:

Sabemos que la ecuación general de una circunferencia tiene la siguiente forma:

C: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Como conocemos el centro de la circunferencia $C(3, -2)$, podemos encontrar los valores de los coeficientes $D$ y $E$:

Como $D = -2h$, entonces $D = -6$.

Como $E = -2k$, entonces $E = 4$.

Podemos escribir la ecuación general de la circunferencia de la siguiente manera:

C: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + F = 0$

Como la recta L es tangente a la circunferencia, el siguiente sistema de ecuaciones tiene una única solución:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y + F = 0 \\ y = \dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

Al resolver el sistema llegamos a la siguiente ecuación cuadrática, cuyo discriminante debe ser nulo:

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 6x + 4\left(\frac{3}{2}x\right) + F = 0$$

$$\frac{13}{4}x^2 + F = 0$$

El discriminante está dado por $\Delta = 0^2 - 4\frac{13}{4}F = 0$, de donde podemos obtener el valor de F. Resulta $F = 0$.

Concluimos que la ecuación general de la circunferencia es:

C: $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$

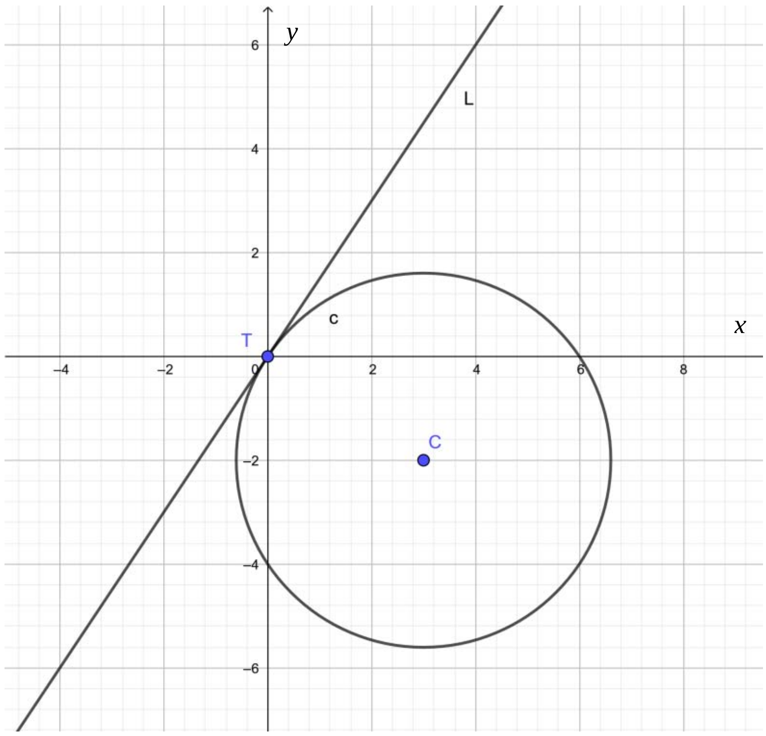



*Figura* 3.52. Representación gráfica del Ejercicio 63. [GeoGebra]

## 64.

Dividimos ambos miembros de la ecuación de la circunferencia $C_2$, por 4:

C2: $x^2 + y^2 - 8x - 3y + 37/4 = 0$

Aplicando el concepto de familias de circunferencias, la ecuación de la familia reducida de circunferencias que pasa por la intersección de las dos circunferencias dadas es:

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 8x - 3y + 37/4) = 0 \;\; ; \;\; \lambda \in R$

a) Para la determinación de la ecuación del eje radical, se debe hacer λ = -1

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 + (-1)(x^2 + y^2 - 8x - 3y + 37/4) = 0$$

$$x^2 - x^2 + y^2 - y^2 + (-2 + 8)x + (-10 + 3)y + (10 - \frac{37}{4}) = 0$$

$$6x - 7y + \frac{3}{4} = 0$$

$$y = \frac{6}{7}x + 3/28$$

b) Se deben determinar las coordenadas de los centros y radios de ambas circunferencias, y así determinar el vector $\boldsymbol{C_1C_2}$, para luego verificar que el producto escalar entre un vector director del eje radical ( $\boldsymbol{dLer}$ )y el vector que une los centros de ambas circunferencias es nulo.

Circunferencia C1 $\quad h = -D/2 = 1$ ; $\quad k = -E/2 = 5$ ;

$C_1(1,5)$ y r = 4

Circunferencia C2 $\quad h = -D/2 = 4$ ; $\quad k = -E/2 = \frac{3}{2}$;

$C_2$ (4,3/2) y r = 3

Entonces las componentes del vector $\boldsymbol{C_1C_2}$ son:

$\boldsymbol{C_1C_2}$= ( 4-1;3/2 -5) = (3,-7/2)

Las componentes de un vector director del eje radical están dadas por:

$\boldsymbol{dLer}$ = (-7, -6)

Calculamos el producto escalar entre ambos vectores:

$\boldsymbol{dLer} \,.\, \boldsymbol{C_1C_2}$ = 3 . (-7) + (-7/2) . (-6)

$\boldsymbol{dLer} \,.\, \boldsymbol{C_1C_2}$= -21 + 21 = 0

Como el producto escalar entre un vector director del eje radical y el vector $\boldsymbol{C_1C_2}$ es nulo, hemos probado que ambas rectas, eje radical y recta que pasa por los centros de ambas circunferencias dadas, son perpendiculares.

c) Gráfico

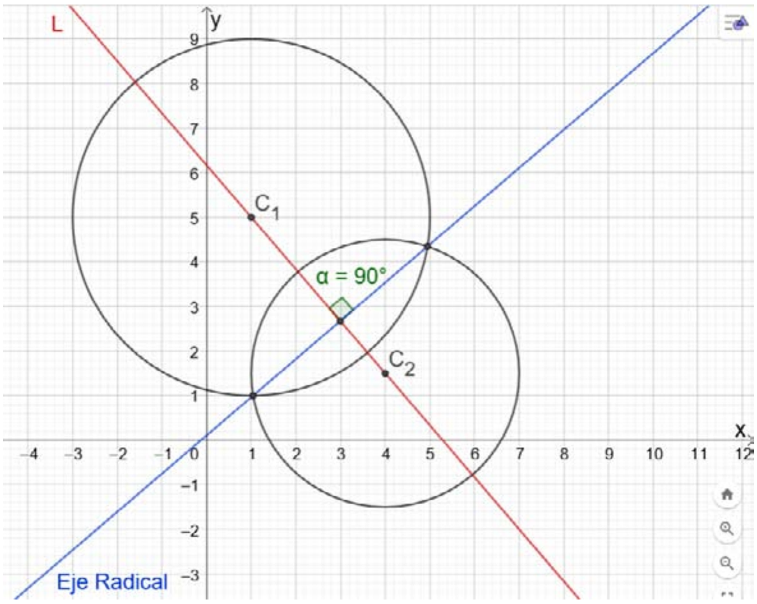



*Figura* 3.53. Representación gráfica del Ejercicio 64.c. [GeoGebra]

d) Aplicando el concepto de familias de circunferencias, la ecuación de la familia reducida de la familia de circunferencias que pasa por la intersección de las dos circunferencias dadas es:

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 8x - 3y + \frac{37}{4}\right) = 0\,;\;\; \lambda \in R$ (1)

$(1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + (-2-8\lambda)x + (-10-3\lambda)y + 10 + 37/4\,\lambda = 0$

Dividimos por $(1+\lambda)$:

La ecuación de la circunferencia C3 debe satisfacer la siguiente expresión:

C3: $x^2 + y^2 + \frac{(-2-8\lambda)}{(1+\lambda)}x + \frac{(-10-3\lambda)}{(1+\lambda)}y + \frac{10+37/4\,\lambda}{(1+\lambda)} = 0$

Como dato sabemos que la abscisa del centro de $C_3$ es $h$= 7, por lo tanto:

$h$ = -$D$/2 =$\frac{-(-2-8\lambda)}{2(1+\lambda)} = 7$ (2)

$D$ =$\frac{(-2-8\lambda)}{(1+\lambda)} = -14$

$(-2-8\lambda) = (-14)(1+\lambda)$

$(-2-8\lambda) = (-14-14\lambda)$

$-8\lambda + 14\lambda = -14 + 2$

$6\lambda = -12$

$\lambda = -2$ (3)

Reemplazando (3) en (1), se obtiene la ecuación de la circunferencia C3:

$C3: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 + (-2)(x^2 + y^2 - 8x - 3y + 37/4) = 0$

$C3: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 - 2x^2 - 2y^2 + 16x + 6y - 37/2 = 0$

$C3: -x^2 - y^2 + 14x - 4y - \frac{17}{2} = 0$

Multiplicando por (-1) ambos miembros y obtenemos una expresión para la ecuación general de la circunferencia:

$C3: x^2 + y^2 - 14x + 4y + 17/2 = 0$

e) Tenemos como datos que la recta tangente es la recta que une los centros $C_1$ y $C_2$, entonces $\boldsymbol{dLT} = \boldsymbol{C_1C_2}$ , y el centro de la circunferencia $C_4$ es $C_4(0{,}0)$.

Para la determinación de la ecuación de la recta que une los centros, se puede aplicar la ecuación de la recta, conocido dos puntos y la pendiente:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$(y - 5) = \frac{\frac{3}{2} - 5}{4 - 1}(x - 1)$

$(y - 5) = \frac{-\frac{7}{2}}{3}(x - 1)$

$(y - 5) = -7/6\,(x - 1)$

$(y - 5) = -7/6\,x + 7/6$

$y = -\frac{7}{6}(x - 1) + 5$

$7/6\,x + y - 37/6 = 0$

Como el punto de tangencia $T(x_T, y_T)$ pertenece a la recta, debe satisfacer la misma, entonces:

$y_T = -\frac{7}{6}(x_T - 1) + 5 (4)$

Entonces el $\boldsymbol{dLT}$ = (1, -7/6)

Y el vector determinado por $\boldsymbol{C_4T} = (x_T - 0, y_T - 0) = (x_T, y_T)$

Además $\boldsymbol{dLT}$ . $\boldsymbol{C_4T}$ = 0

$x_T - \frac{7}{6}y_T = 0$

$x_T = \frac{7}{6}y_T$

$y_T = 6/7x_T$ (5)

Reemplazando (5) en (4)

$6/7x_T = -\frac{7}{6}(x_T - 1) + 5$

$$\frac{6}{7}x_T = -\frac{7}{6}\,x_T + \frac{37}{6}$$

$$\frac{6}{7}x_T + \frac{7}{6}\,x_T = \frac{37}{6}$$

$$\frac{85}{42}x_T = \frac{37}{6}$$

$$x_T = \frac{259}{85} \qquad (6)$$

Reemplazando (6) en (4)

$$y_T = -\frac{7}{6}\left(\frac{259}{85} - 1\right) + 5$$

$$y_T = \frac{222}{85}$$

El punto de tangencia es el punto de coordenadas aproximadas T (3.047,2.612). Conocido dicho punto, podemos determinar el radio como:

$$r = \| \boldsymbol{C_4 T} \| = \sqrt{\left(\frac{259}{85} - 0\right)^2 + ((222/85 - 0)^2} = 4.01$$

A partir del radio y del centro, se puede obtener la ecuación de la circunferencia C4:

$C4: x^2 + y^2 = 4.01^2.$

Graficamos todos los lugares geométricos y podemos afirmar que la circunferencia C4 no pertenece a la familia de circunferencias que pasan por la intersección de C1 y C2.

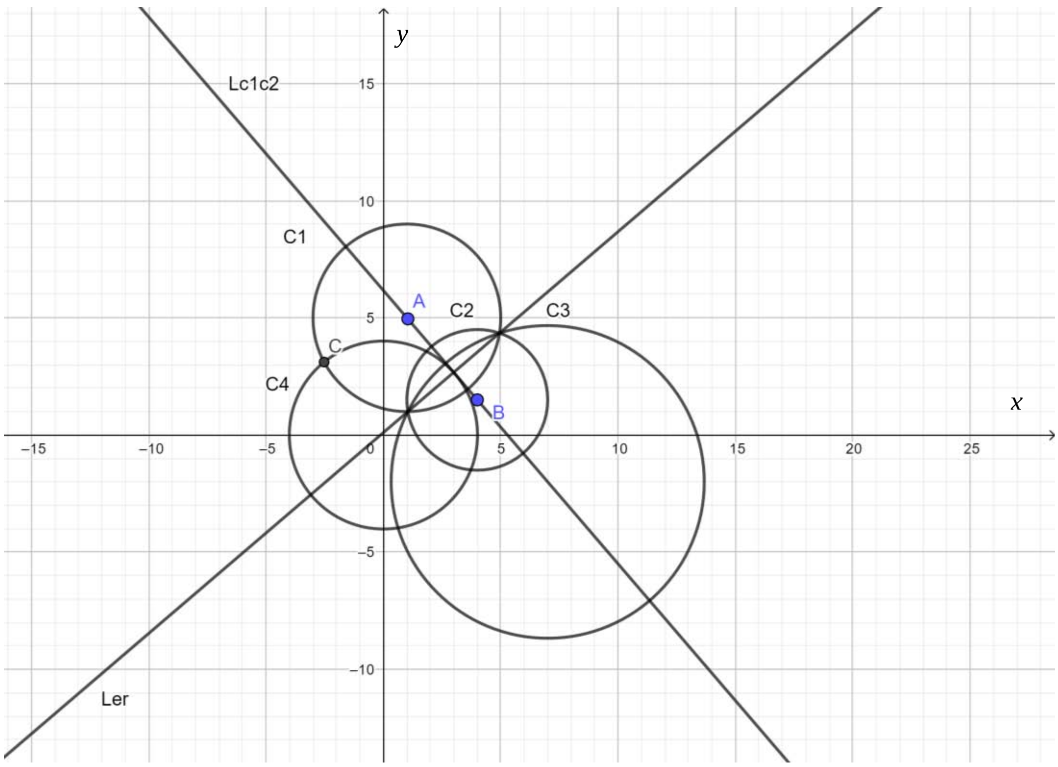



*Figura* 3.54. Representación gráfica del Ejercicio 64.e. [GeoGebra]

## 65.

La ecuación vectorial paramétrica de la circunferencia descentrada (C($h$,$k$)) y radio r es:

$(x, y) = (h, k) + (r\cos\alpha, r\,sen\,\alpha)$ ;  $0 \leq \alpha < 2\pi$

Reemplazando las coordenadas del centro y radio obtenemos:

$(x,y) = (-2,1) + (6\cos\alpha, 6\,\text{sen}\,\alpha)$  $0 \leq \alpha < 2\pi$

Para obtener dos puntos, podemos considerar dos ángulos, por ejemplo en $\alpha=\pi/2$ y $\alpha=\pi$:

$P_1 = (-2,1) + (6\cos\pi/2, 6\,\text{sen}\,\pi/2) = (-2,7)$

$P_2 = (-2,1) + (6\cos\pi, 6\,\text{sen}\,\pi) = (-8,1)$

Luego los puntos $P_1(-2{,}7)$ y $P_2(-8{,}1)$ son dos puntos de la circunferencia.

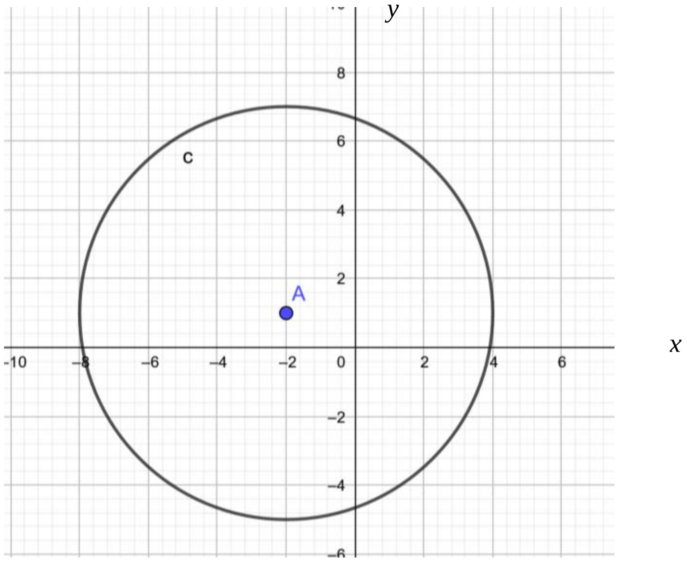



*Figura* 3.55. Representación gráfica del Ejercicio 65. [GeoGebra]

## 66.

a) Se conoce el centro C(-70, 0) y el radio r= D/2 = 30m, entonces la ecuación cartesiana, se puede escribir como:

$C\colon\ (x + 70)^2 + y^2 = 30^2$

Desarrollando el binomio y ordenando, se puede llegar a la ecuación general como:

$C\colon\ x^2 + 2\,x\,70 + 70^2 + y^2 - 30^2 = 0$

$C\colon\ x^2 + 140\,x + 4900 + y^2 - 900 = 0$

$C\colon\ x^2 + y^2 + 140x + 4000 = 0$

b) Sea $T(x_T, y_T)$ el punto de tangencia entre la circunferencia y la recta tangente a la misma que pasa por O (0,0).

La recta tangente es perpendicular al vector $\boldsymbol{CT}$, entonces:

$\boldsymbol{CT} \cdot \boldsymbol{OT} = 0$

$(x_T + 70\,, y_T) \cdot (x_T, y_T) = 0$

$x_T^2 + y_T^2 + 70x_T = 0$ (I)

Además, las coordenadas del punto $T(x_T, y_T)$ satisfacen la ecuación de la circunferencia ya que T pertenece a la misma, entonces:

$x_T^2 + y_T^2 + 140x_T + 4000 = 0$ (II)

Reemplazando (I) en (II):

$-70x_T + 140x_T + 4000 = 0 \quad \Rightarrow x_T = -57.1\,m$

$y_T = \pm\sqrt{-x_T^2 - 140x_T - 4000} = \pm 27.1\,m$

$T_1(-57.1\,, 27.1)m$
$T_2(-57.1\,, -27.1)m$

c) La ecuación general de la recta en R2 es:

$Ax + By + C = 0$, donde $\boldsymbol{n} = (A, B)$ es un vector normal a la recta.

Como las rectas pasan por el origen, entonces el término independiente es: C=0

El vector $\boldsymbol{CT_1} = (-57.1 + 70{,}27.1 - 0) = (12.9\,, 27.1)$

es normal a la recta $L_1$

El vector $\boldsymbol{CT_2} = (-57.1 + 70, -27.1 - 0) = (12.9\,, -27.1)$

es normal a la recta $L_2$

Entonces:

$L_1$: $12.9x + 27.1y = 0$ o bien $L_1: -27.1x - 57.1y = 0$ o bien $L_1$: $0.47x + y = 0$
$L_2$: $12.9x - 27.1y = 0$ $L_2$: $27.1x - 57.1y = 0$ $L_2: -0.47x + y = 0$

d) Gráfico:

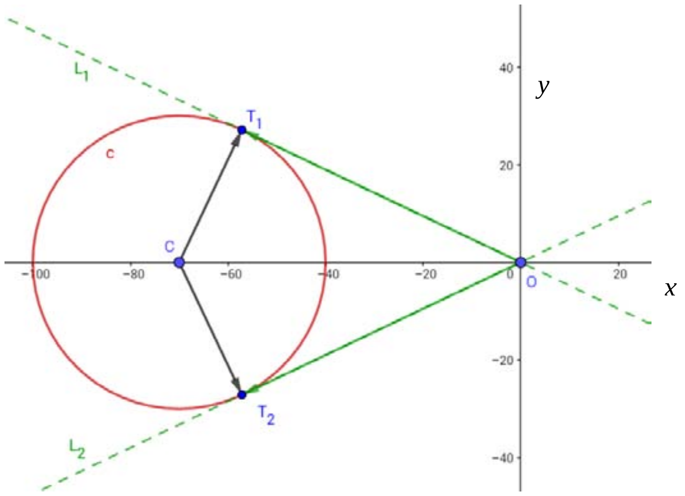



*Figura* 3.56. Representación gráfica del Ejercicio 66. [GeoGebra]

# 3.7. PARÁBOLAS

## 67.

Dada la ecuación general de la parábola $x^2 - 6x + 8y - 23 = 0$

Reunimos términos, completamos cuadrados y obtenemos la ecuación explícita

$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 8y - 23 = 0$

$(x - 3)^2 = -8(y - 4)$

Analizamos la última ecuación: vértice $V(3,4)$; 2$p$=-8 ($p$<0), ramas orientadas hacia abajo

$|LR| = 2p = 8$ , extremos de LR $\begin{cases} A1(-1,2) \\ A2(7,2) \end{cases}$

Las coordenadas del Foco de la parábola se obtienen de la siguiente manera:

$x_F=x_V$ ; $y_F=y_V-p/2$

F(3, 2)

La recta directriz de la parábola dada es:

$y=y_V+p/2$; y=6

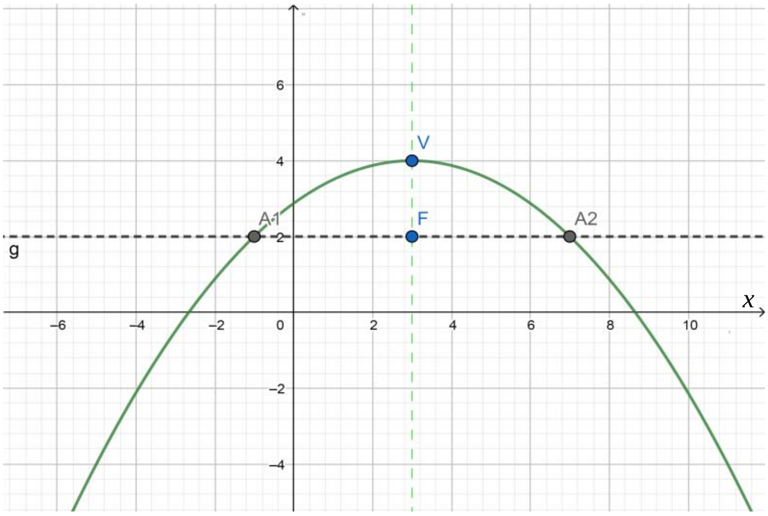



*Figura* 3.57. Representación gráfica del Ejercicio 67. [GeoGebra]

## 68.

Con los datos: $V(-4,3)$ ; $F(-1,3)$

Del análisis de coordenadas de los puntos dados, podemos deducir que: el eje focal es paralelo al eje x, las ramas se orientan hacia la derecha, lo que significa que el parámetro p es positivo.

Entonces la ecuación es:

$(y - 3)^2 = 2p(x + 4)$

Deberemos hallar el valor de $p$

*Procedimiento 1*:

Un modo para completar la ecuación es determinar el vector $\boldsymbol{VF}$

$\boldsymbol{VF} = (3,0)$ ; $\|\boldsymbol{VF}\| = 3 = \frac{p}{2}$ . Entonces $p = 6$ ; $2p = 12$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola, obtenemos: $(y-3)^2 = 12(x+4)$

Podemos establecer la longitud del lado recto $|LR| = 2p = 12$

De esa manera es posible hallar las coordenadas de los puntos extremos del lado recto

$$\begin{cases} A1(-1,9) \\ A2(-1,-3) \end{cases}$$

*Procedimiento 2*:

Otro modo de hallar la ecuación buscada es utilizar las coordenadas de un punto conocido de la parábola, sustituyendo las variables de la ecuación por dichos valores. Considerando para ello uno de los extremos del lado recto ya calculados:

$A1(-1,9)$

Sustituyendo las coordenadas de A1 en la ecuación de la parábola, obtenemos:

$(9-3)^2 = 2p(-1+4)$ ; $\frac{36}{3} = 2p$ , $2p = 12$

Por lo cual la ecuación buscada será:

$(y-3)^2 = 12(x+4)$

Se trata de la misma ecuación determinada a partir del Procedimiento 1.

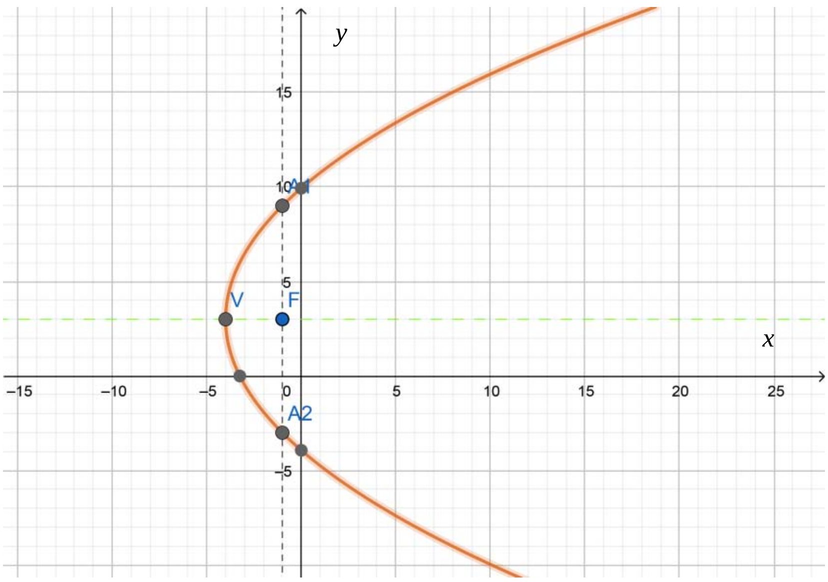



*Figura* 3.58. Representación gráfica del Ejercicio 68. [GeoGebra]

## 69.

Derivando implícitamente la ecuación general de la parábola obtenemos:

$2x + 4 + 12y' = 0$

Despejando y´, que representa la pendiente de la recta tangente a la parábola:

$$y\acute{} = -\frac{(x+2)}{6}$$

Existe otra condición para la ecuación de esta recta tangente, la cual debe ser paralela a la recta:

$L: y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{9}$

La condición de paralelismo se asegura comparando las pendientes, si las pendientes son iguales, las rectas son paralelas. Entonces: $-\frac{1}{3} = -\frac{(x+2)}{6}$

Despejando x de la expresión anterior, encontramos el valor de la abscisa del punto T de tangencia $x = 0$

El punto de tangencia pertenece tanto a la recta como a la parábola, por lo tanto, verifica sus ecuaciones, tenemos la ecuación de la parábola, sustituimos x por 0:

$0 + 0.4 + 12y - 8 = 0 \quad ; \quad y = \frac{2}{3}$ es la ordenada del punto T de tangencia. $T(0, \frac{2}{3})$

Ya conocemos la pendiente de la recta tangente y un punto de la misma $y = -\frac{1}{3}x + b$, siendo b la ordenada al origen.

Sustituimos las coordenadas del punto de tangencia:

$\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}0 + b \ ; b = \frac{2}{3}$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la parábola y paralela a la recta L es:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

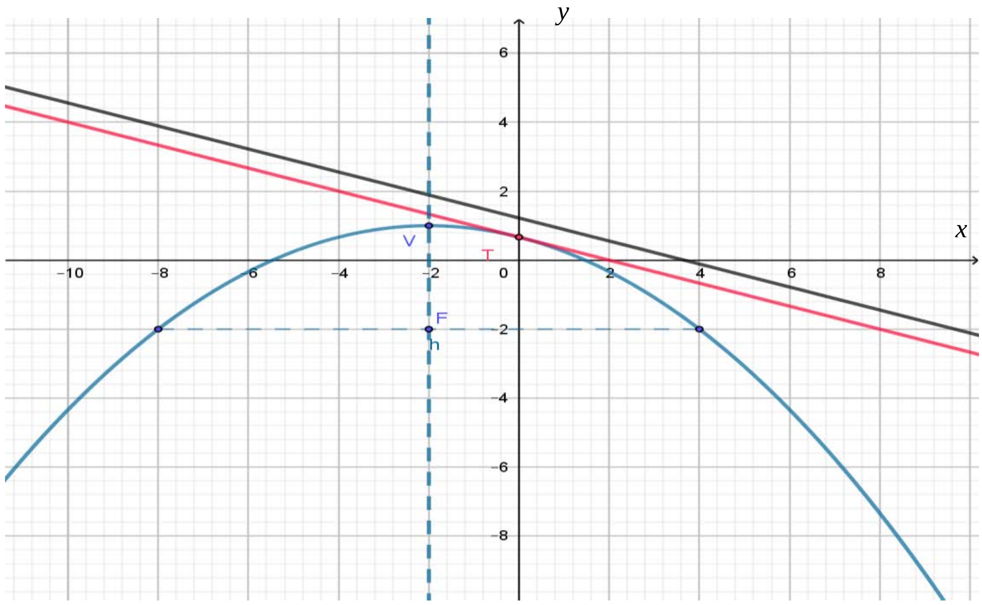



*Figura* 3.59. Representación gráfica del Ejercicio 69. [GeoGebra]

# 70.

Comenzamos con un esquema para interpretar los datos:

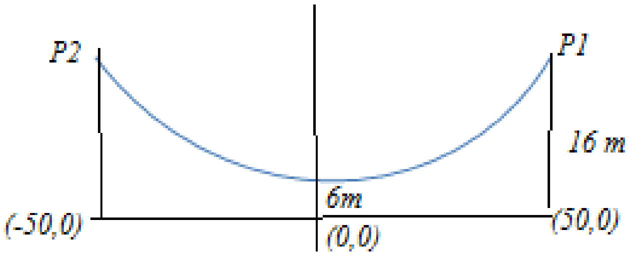



*Figura* 3.60. Esquema del Ejercicio 70.

A partir de ubicar convenientemente el sistema de referencia y analizando el esquema realizado, determinamos:

eje y coincidente con el eje focal $V(0,6)$ ; $P1(50,16)$ ; $P2(-50,16)$

Las ramas de la parábola se encuentran orientadas hacia arriba, por lo cual p>0.

La ecuación de la parábola es entonces:

$$x^2 = 2p(y-6)$$

Sustituyendo las coordenadas del punto P1 conocido, en la ecuación, averiguamos el valor de p:

$$2500 = 2p(16-6) \;\;;\;\; 250 = 2p \;\;; 125 = p$$

Por lo tanto, la ecuación de la parábola resulta:

$$x^2 = 250(y-6)$$

Estamos en condiciones de hallar las coordenadas del foco:

$$F(0;\ 6+\frac{125}{2})$$

La longitud del lado recto está dada por:

$$|LR| = 2p = 250$$

Las coordenadas de los extremos del lado recto son:

$$\begin{cases} A1(125; 6+\frac{125}{2}) \\ A2(-125; 6+\frac{125}{2}) \end{cases}$$

Las coordenadas de un punto que está a 20 m del vértice se obtienen sustituyendo la abscisa de dicho punto en la ecuación de la parábola:

$400 = 250(y-6)$

Luego, el valor de la ordenada será:

$$P3(20, \frac{38}{5})$$

La altura de un punto situado a 20 m del vértice es 7,6 m.

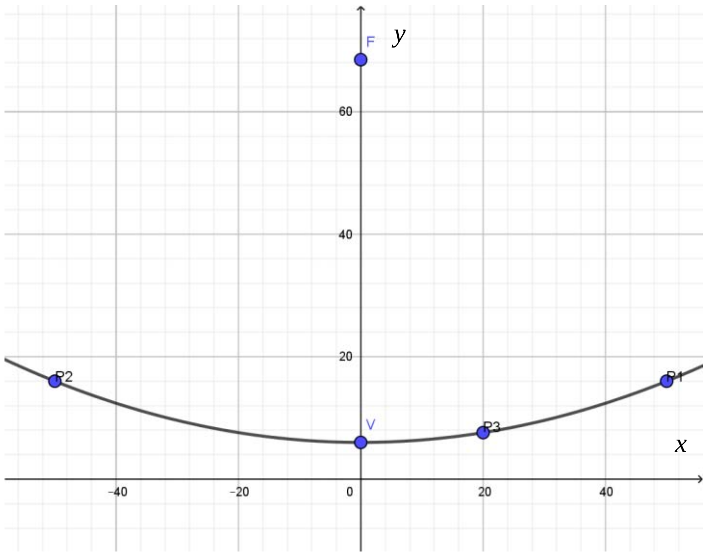



*Figura* 3.61. Representación gráfica del Ejercicio 70. [GeoGebra]

## 71.

La recta buscada debe ser tangente a la parábola $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ y perpendicular a la recta $L: 4x + 2y + 5 = 0$.

Derivando implícitamente la ecuación de la parábola y despejando y' obtenemos:

$2yy' - 2 + 2y' = 0$

$y' = \frac{1}{y+1}$ esta es la pendiente de la recta tangente en todo punto de la parábola.

Si las rectas son perpendiculares entre sí, las pendientes cumplen que el producto entre ellas da como resultado (-1)

$L: 4x + 2y + 5 = 0 \quad ; \quad L: y = -2x - \frac{5}{2}$

Como son perpendiculares $\left(\frac{1}{y+1}\right).(-2) = -1 \quad ; \ 1 = y$

De manera que la pendiente de la recta tangente buscada es $y' = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Con la ordenada del punto de tangencia, $y_T$=1, la abscisa se obtiene al sustituir la ordenada en la ecuación de la parábola (esto se realiza así porque el punto de tangencia es común a la recta y a la parábola, verifica las ecuaciones de ambas)

$1 - 2x + 2.1 + 3 = 0 \quad ; \ x = 3$

Ya tenemos las coordenadas del punto de tangencia $T(3,1)$. Si tenemos la pendiente de la recta y un punto conocido de la misma, podemos expresar la ecuación $y = \frac{1}{2}x + b$ , falta averiguar la ordenada al origen $b = -\frac{1}{2}$

Y la ecuación de la recta tangente a la parábola que es perpendicular a la recta L es:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

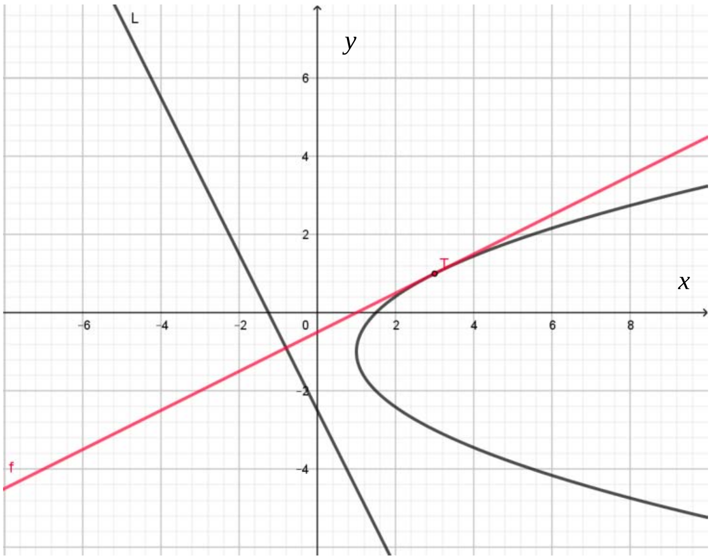



*Figura* 3.62. Representación gráfica del Ejercicio 71. [GeoGebra]

## 72.

a) De acuerdo a los datos la ecuación de la parábola es: $(y-1)^2 = 8(x-1)$

Despejamos la variable que no se encuentra elevada al cuadrado, $x = \frac{(y-1)^2}{8} + 1$

Consideramos la otra variable como parámetro de la ecuación: y=t [1]

o como dependiente de un parámetro y=t [2]

En este caso utilizaremos la ecuación [1]:

Las ecuaciones paramétricas de la parábola son entonces:

$$\begin{cases} y = t \\ x = \frac{(t-1)^2}{8} + 1 \end{cases} \quad t \in R$$

Hallaremos P1 para t=0

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{(0-1)^2}{8} + 1 = \frac{9}{8} \end{cases} \qquad P1(\frac{9}{8}, 0)$$

Hallaremos P2 para t=-1

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{(-1-1)^2}{8} + 1 = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad P2(\frac{3}{2}, -1)$$

Se ha realizado en Geogebra, considerando un deslizador para el parámetro, con el objeto de que se representen la rectas y=t y la dependencia de los valores de x. En azul se ubican los puntos P1 y P2 solicitados en el enunciado.

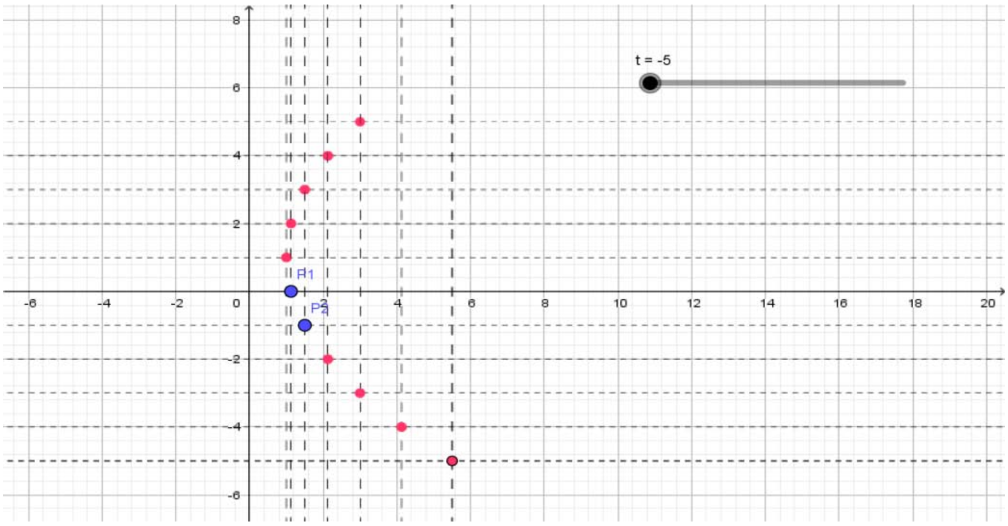


*Figura* 3.63. Representación gráfica del Ejercicio 72.a. [GeoGebra]

b) La ecuación de una familia de parábolas de vértice V(1,1) tiene como parámetro de la familia al parámetro de la parábola. De esta manera haciendo p=k y considerando una familia de eje focal paralelo al eje $x$, tendremos:

$(y-1)^2 = 2k(x-1) \qquad k \in R - \{0\}$

Dando valores al parámetro de la familia k, obtenemos tres integrantes de dicha familia:

k=1:

$(y-1)^2 = 2(x-1)$

k=2:

$(y-1)^2 = 4(x-1)$

k=-2

$(y-1)^2 = -4(x-1)$

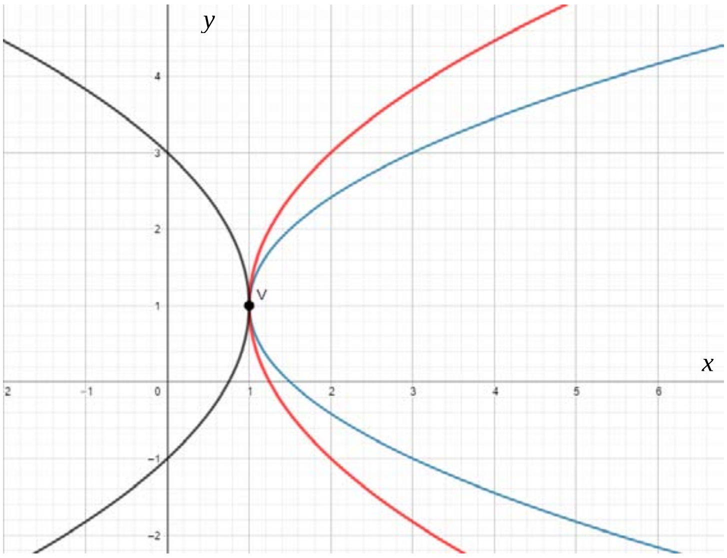


*Figura* 3.64. Representación gráfica del Ejercicio 72.b. [GeoGebra]

# 73.

Analizando la ecuación $x^2 - 6x + y + 4 = 0$, vemos que tiene una única variable elevada al cuadrado, y ambos términos lineales presentes. Recordando que la *condición necesaria* para que la ecuación $Ax^2$+$Cy^2$+$Dx$+$Ey$+$F$=0, (en la que $B$=0) represente una parábola, es que uno de los coeficientes de las variables cuadráticas sea nulo y el otro no. La *condición suficiente* es que el coeficiente de la variable lineal que corresponde al coeficiente de la variable cuadrática nula sea distinto de cero. Concluimos que dicha ecuación corresponde a una parábola. Se procede a encontrar sus elementos para poder graficar.

Una manera es completando cuadrados, y llevando la ecuación a su forma cartesiana, en la cual se ponen en evidencia el vértice $V(h, k)$ y el parámetro $p$:

$(x - h)^2 = 2p(y - k)$

Otra manera es comparando con la ecuación general desarrollada de una parábola con vértice en $V(h, k)$ y de parámetro $p$:

$x^2 - 2hx - 2py + h^2 + 2pk = 0$

Para nuestro caso, siguiendo el procedimiento indicado en b):

i) $\quad -2hx = -6x \qquad h = \frac{-6}{-2} = 3$

ii) $\quad -2py = y \qquad p = -\frac{1}{2}$

iii) $\quad h^2 + 2pk = 4$

$3^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) k = 4 \quad k = 9 - 4 = 5$

Luego, la dirección del eje focal de la parábola coincide con la dirección del eje de la variable que no se encuentra elevada al cuadrado (en nuestro caso la variable $y$).

EF//Eje $y$

El vértice resulta $V(3{,}5)$, y el parámetro $p = -\frac{1}{2}$ (el signo negativo indica que las ramas de la parábola se extienden hacia los negativos).

La otra ecuación $L: -y + x = 0$ representa una recta en el plano.

Se observa que la recta es secante a la parábola, y sus intersecciones resultan los puntos $A(4{,}4)$ y $B(1{,}1)$.

Determinación analítica de la intersección:

Para encontrar la intersección entre la recta y la parábola, debemos resolver el sistema de ecuaciones que incluye las ecuaciones de ambos lugares geométricos:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + y + 4 = 0 \\ -y + x = 0 \end{cases}$$

De la ecuación de la recta, $L: -y + x = 0$ se despeja una de las dos variables y se la sustituye en la ecuación de la parábola. Luego:

$y = x$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola, tenemos:

$x^2 - 6x + (x) + 4 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

Se resuelve la ecuación de segundo grado en una variable:

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{(-5)^2 - 4.1.4}}{2.1} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$x_1 = 4\,, y_1 = 4$

$x_2 = 1\,, y_2 = 1$

Se observa que la recta es secante a la parábola, y sus intersecciones resultan los puntos $A(4{,}4)$ y $B(1{,}1)$. Los resultados se verifican con los obtenidos a partir de la determinación gráfica.

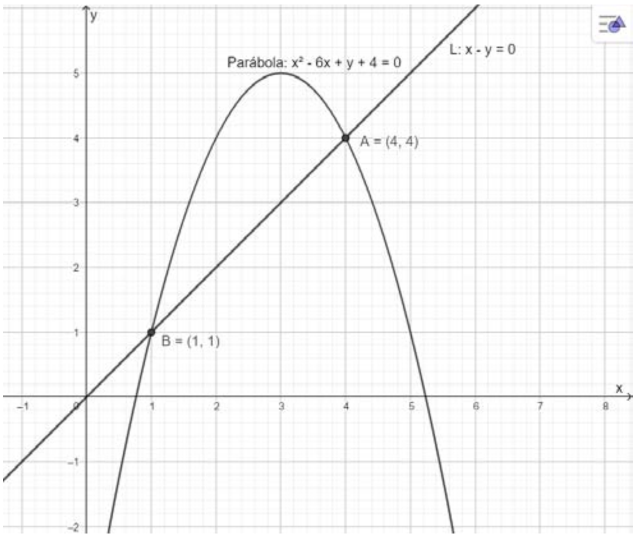



*Figura* 3.65. Representación gráfica del Ejercicio 73. [GeoGebra]

## 74.

a) Para encontrar las rectas que pasan por $Q(-1,-1)$ y son tangentes a la parábola $y^2 - x + 4y + 6 = 0$, se realiza el siguiente planteo:

Sabiendo que la recta pasa por el punto $Q(-1,-1)$, la familia de rectas que pasan por dicho punto queda definida por la expresión siguiente:

$(y + 1) = m(x + 1)$

Despejando la variable y:

$y = m(x + 1) - 1 = mx + m - 1$

Dicha expresión representa todas las rectas que pasan por el punto $Q$. Recordemos que solo estamos interesados en determinar dos de ellas, que a su vez sean tangentes a la parábola correspondiente.

Para encontrar estas rectas tangentes, se plantea un sistema de ecuaciones que incluye la ecuación de la familia de rectas que pasan por $Q$ y la ecuación de la parábola.

$$\begin{cases} y^2 - x + 4y + 6 = 0 \\ y = mx + m - 1 \end{cases}$$

La solución del sistema nos daría la intersección entre estos dos lugares geométricos. Al no conocer $m$ no es posible resolver dicho sistema, pero sí es posible dejar planteada la solución como una ecuación de segundo grado de variable única, con los coeficientes de la misma en función del parámetro $m$ de la familia de rectas. Luego, a partir de la condición de tangencia, sabemos que la solución de dicha ecuación, debería darnos por resultado dos raíces reales iguales (un único punto de intersección). Teniendo en cuenta esto último, para llegar a dicho resultado es necesario que el radiando o discriminante $b^2 - 4.a.c$ sea nulo, y de aquí surge una nueva ecuación que nos permitirá determinar los valores de $m$ que cumplen con la condición de tangencia requerida. A continuación, se procede de acuerdo a lo planteado:

Se sustituye en la ecuación de la parábola la ecuación de la familia de rectas:

$$(mx + m - 1)^2 - x + 4(mx + m - 1) + 6 = 0$$

$$m^2x^2 + m^2 + 1 + 2m^2x - 2mx - 2m - x + 4mx + 4m - 4 + 6 = 0$$

$$m^2x^2 + m^2 + 2m^2x - x + 2mx + 2m + 3 = 0$$

Agrupando y sacando factor común $x^2$ y $x$, se llega a la ecuación de segundo grado de variable única con los coeficientes de la misma en función del parámetro de la familia de rectas $m$, que nos daría la intersección entre estos dos lugares geométricos:

$$m^2x^2 + (2m^2 + 2m - 1)x + (m^2 + 2m + 3) = 0$$

Para que las rectas sean tangentes, se debe cumplir que el discriminante $b^2 - 4ac = 0$. De esta manera, la intersección de cada recta con la curva queda definida en un único punto (dos raíces reales iguales).

$$b^2 - 4ac = (2m^2 + 2m - 1)^2 - 4.m^2.(m^2 + 2m + 3) = 0$$

$$4m^4 + 4m^2 + 1 + 8m^3 - 4m^2 - 4m - 4m^4 - 8m^3 - 12m^2 = 0$$

$$1 - 4m - 12m^2 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.(-12).1}}{2.(-12)}$$

$$m_1 = \frac{1}{6}$$

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

Siendo $m_1 = \frac{1}{6}$ la pendiente de la recta $L_{T1}$ y $m_2 = -\frac{1}{2}$ a pendiente de la recta $L_{T2}$.

Luego:

$$L_{T1}: (y+1) = \frac{1}{6}(x+1)$$

$$L_{T2}: (y+1) = -\frac{1}{2}(x+1)$$

b) Para encontrar el ángulo entre las rectas, en primer lugar, se encuentran los vectores directores de las mismas y luego, mediante definición de producto escalar, se determina el ángulo entre ellos. Sus vectores directores resultan:

$$\boldsymbol{d}_{LT1} = (6,1)$$

$$\boldsymbol{d}_{LT2} = (2,-1)$$

Se determina el ángulo a partir de la definición de producto escalar:

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{d}_{L1}.\boldsymbol{d}_{L2}}{\|\boldsymbol{d}_{L1}\|.\|\boldsymbol{d}_{L2}\|} = \frac{(6,1).(2,-1)}{\sqrt{6^2+1^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$cos\theta = \frac{12-1}{\sqrt{37}.\sqrt{5}} = 0{,}808$$

$$\theta = arc\cos(0{,}808) = 36{,}03°$$

c) Verificación gráfica:

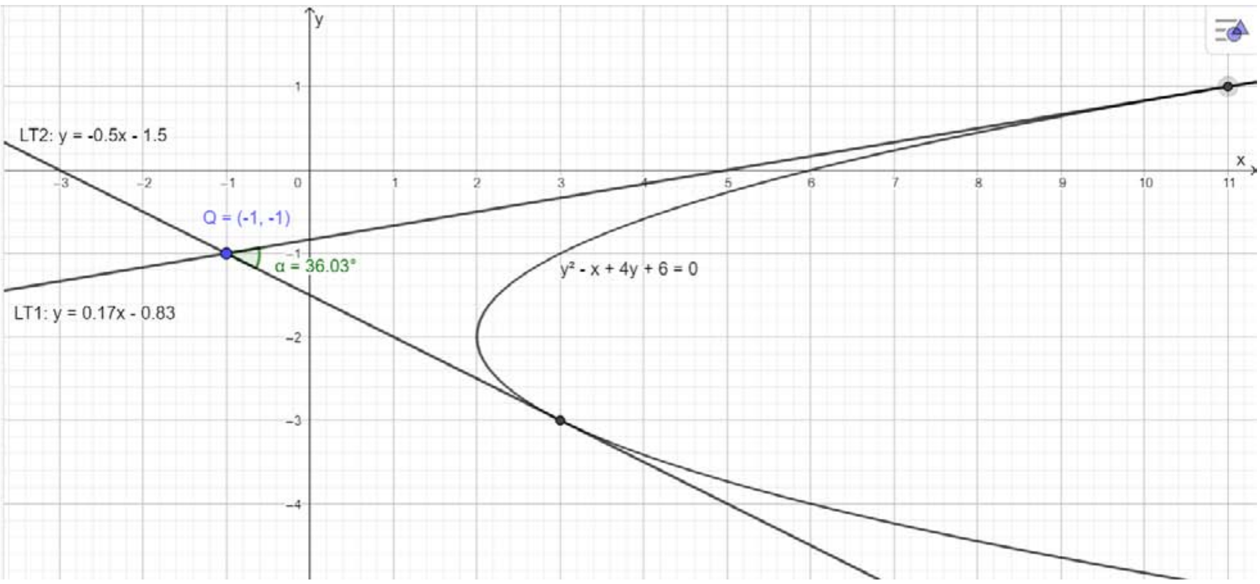



*Figura* 3.66. Representación gráfica del Ejercicio 74. [GeoGebra]

# 75.

Siendo el eje de abscisas la horizontal que define el puente, el eje de coordenadas el eje de simetría de la parábola y siendo que el punto más bajo del cable queda a una altura de 12 m sobre la calzada, podemos decir entonces que el vértice de la parábola buscada viene dado por el punto $V(0{,}12)$.

Otros dos puntos que pertenecen a la parábola son los anclajes del cable sobre las columnas (separadas 480 m y de 56 m de altura), de coordenadas $P_1(-240{,}56)$ y $P_2(240{,}56)$.

De acuerdo a como se dispone la posición de la parábola, decimos que su eje focal (o eje de simetría) es coincidente con el eje de coordenadas. Luego, una parábola de vértice $V(h,k)$, parámetro $p$ y eje focal coincidente con el eje y, queda definida por la siguiente ecuación:

$(x-h)^2 = 2p(y-k)$

Reemplazando los valores conocidos del vértice $V(0{,}12)$:

$x^2 = 2p(y-12)$

Para encontrar el parámetro $p$, se reemplaza cualquiera de los puntos conocidos $P_1(-240{,}56)$ o $P_2(240{,}56)$, pertenecientes a la curva:

$240^2 = 2p(56-12)$

$$p = \frac{240^2}{88} = \frac{57600}{88}$$

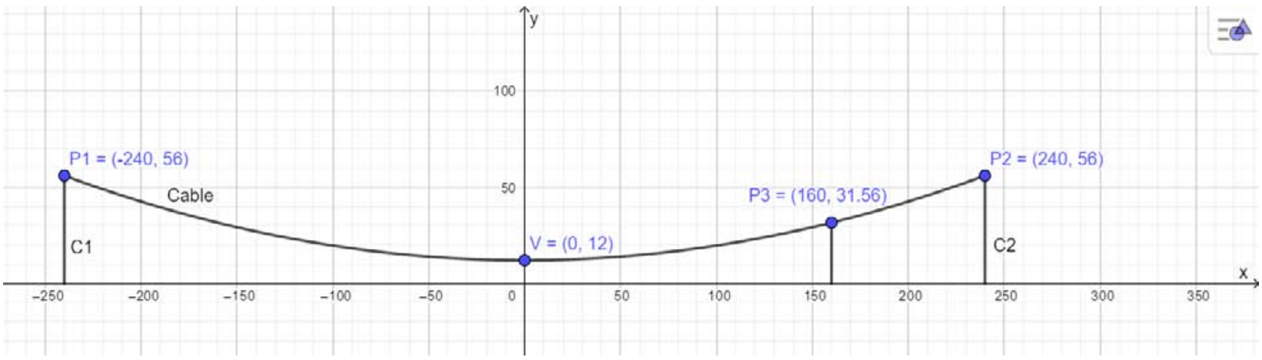



*Figura* 3.67. Representación gráfica del Ejercicio 75. [GeoGebra]

Finalmente, la ecuación de la parábola que describe la curva del cable resulta:

$$x^2 = 2.\frac{57600}{88}(y-12) = \frac{57600}{44}(y-12)$$

La altura a una distancia de 80 m de las columnas (160 m del origen de coordenadas), se obtiene reemplazando la variable $x = 160$ en la ecuación y determinando su ordenada correspondiente:

$160^2 = \frac{57600}{44}(y-12)$

$160^2.\frac{44}{57600} + 12 = y$

$31{,}56 = y$

La altura del cable a 80 m de las columnas es de 31,56 m desde el nivel de calzada.

## 76.

a) Ambas curvas comparten el vértice $V(0{,}0)$ y tienen el eje focal en coincidencia con el eje y.

Para este tipo de curva, ecuación correspondiente resulta:

$x^2 = 2py$

El parámetro de forma será distinto para cada parábola. Para determinar dicho parámetro, se sustituye un punto conocido de la curva en la ecuación previa.

Para la parábola del individuo a la izquierda, se consideran los puntos $P1(-5; 3{,}5)$ y $P2(5; 3{,}5)$ que pertenecen a la misma. Luego:

$5^2 = 2p3{,}5 = 7p$

$p = 25/7$

La ecuación cartesiana de la parábola asociada al individuo de la izquierda resulta:

$x^2 = \frac{50}{7}y$

De manera análoga para la parábola del individuo a la derecha, se consideran los puntos $P1(-6; 3{,}5)$ y $P2(6; 3{,}5)$ que pertenecen a la misma. Luego:

$6^2 = 2p3{,}5 = 7p$

$p = 36/7$

La ecuación cartesiana de la parábola asociada al individuo de la izquierda resulta:

$x^2 = \frac{72}{7}y$

b) Como se mencionó, de acuerdo a la figura, las parábolas comparten vértice y dirección del eje focal. Luego, el parámetro que cambia es el parámetro geométrico $p$ que determina la forma del mentón. Dicho parámetro resulta adecuado para utilizar en la familia, como se expresa a continuación:

$p = k\,; k \in \mathbb{R}^+$

$x^2 = 2ky$

c) La ecuación cartesiana de la parábola asociada al individuo de la izquierda resulta:

$x^2 = \frac{50}{7}y$

Vértice $V(0{,}0)$, parámetro $p = \frac{25}{7}$ y eje focal coincidente con el eje y.

Para encontrar las coordenadas del foco nos movemos una distancia $p/2$ desde el vértice en dirección del eje focal en el sentido de apertura de las ramas (el parámetro positivo indica que las ramas se desarrollan hacia el sentido positivo de los ejes coordenados):

$$F\left(0; 0 + \frac{p}{2}\right) \rightarrow F\left(0; 0 + \frac{25}{14}\right) \rightarrow F\left(0; \frac{25}{14}\right)$$

Para determinar las coordenadas de los extremos del lado recto, nos movemos desde el foco en dirección perpendicular al eje focal una distancia $p$ a un lado y al otro:

$$A\left(0 - p; \frac{25}{14}\right) \rightarrow A\left(0 - \frac{25}{7}; \frac{25}{14}\right) \rightarrow A\left(-\frac{25}{7}; \frac{25}{14}\right)$$

$$B\left(0 + p; \frac{25}{14}\right) \rightarrow B\left(0 + \frac{25}{7}; \frac{25}{14}\right) \rightarrow B\left(\frac{25}{7}; \frac{25}{14}\right)$$

Y la longitud del lado recto es:

$$LR = |2p| = \frac{50}{7}$$

Por último, la ecuación de la directriz se obtiene considerando que la misma tiene dirección perpendicular al eje focal (eje y en nuestro caso), y que pasa a una distancia $p/2$ del vértice en sentido opuesto al foco. Luego:

$$y = -\frac{p}{2} = -\frac{25}{14}$$

Graficamos:

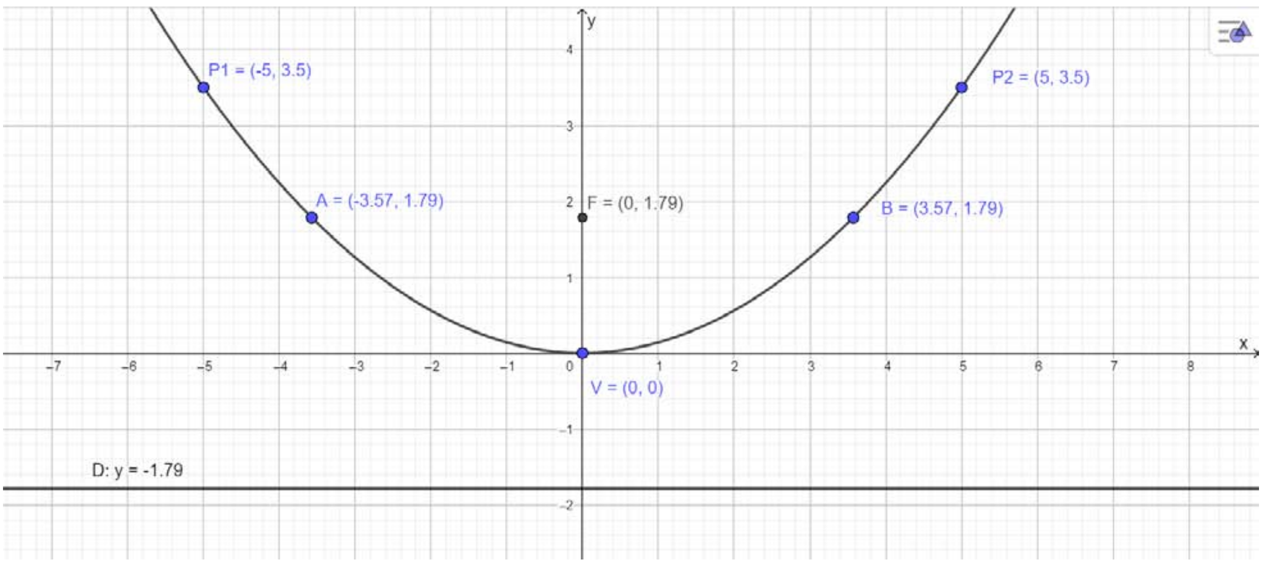



*Figura* 3.68. Representación gráfica del Ejercicio 76.b. [GeoGebra]

De la misma manera procedemos para la parábola asociada al individuo de la derecha. La ecuación cartesiana resulta:

$$x^2 = \frac{72}{7}y$$

Vértice $V(0{,}0)$, parámetro $p = \frac{36}{7}$ y eje focal coincidente con el eje y.

Para encontrar las coordenadas del foco nos movemos una distancia $p/2$ desde el vértice en dirección del eje focal en el sentido de apertura de las ramas (el parámetro positivo indica que las ramas se desarrollan hacia el sentido positivo de los ejes coordenados):

$$F\left(0; 0 + \frac{p}{2}\right) \rightarrow F\left(0; 0 + \frac{1}{2}.\frac{36}{7}\right) \rightarrow F\left(0; \frac{18}{7}\right)$$

Para determinar las coordenadas de los extremos del lado recto, nos movemos desde el foco en dirección perpendicular al eje focal una distancia $p$ a un lado y al otro:

$$A\left(0 - p; \frac{18}{7}\right) \rightarrow A\left(0 - \frac{36}{7}; \frac{18}{7}\right) \rightarrow A\left(-\frac{36}{7}; \frac{18}{7}\right)$$

$$B\left(0 + p; \frac{18}{7}\right) \rightarrow B\left(0 + \frac{36}{7}; \frac{18}{7}\right) \rightarrow B\left(\frac{36}{7}; \frac{18}{7}\right)$$

Y la longitud del lado recto es $LR = |2p| = \frac{72}{7}$

Por último, la ecuación de la directriz se obtiene considerando que la misma tiene dirección perpendicular al eje focal (eje y en nuestro caso), y que pasa a una distancia $p/2$ del vértice en sentido opuesto al foco. Luego:

$$y = -\frac{p}{2} = -\frac{18}{7}$$

En la *Figura* 3.68 se indica la representación gráfica del problema planteado.

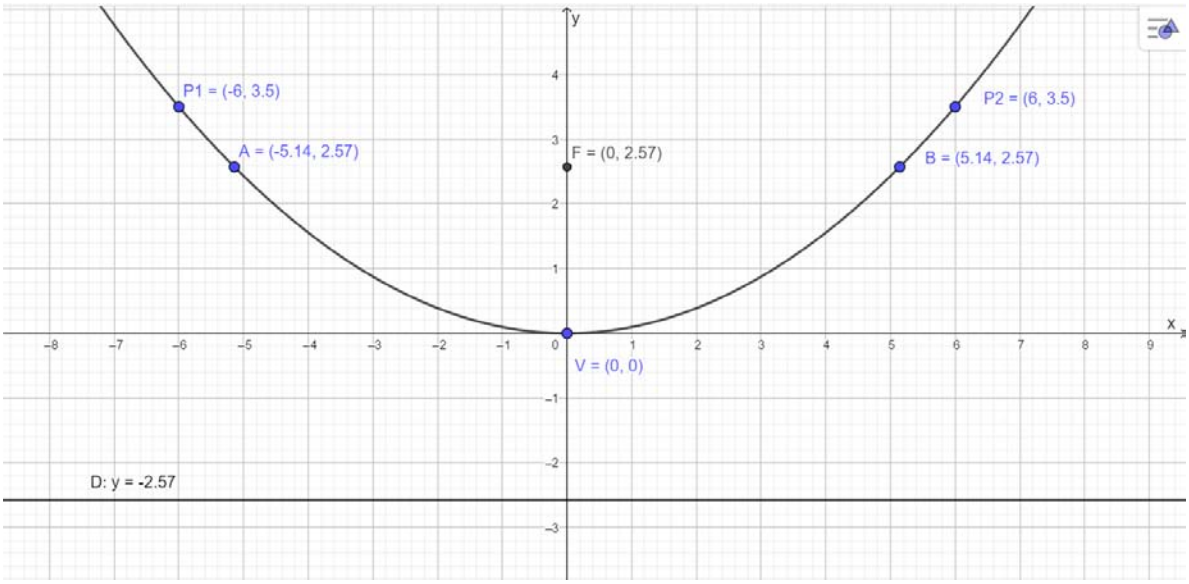



*Figura* 3.69. Representación gráfica del Ejercicio 76.c. [GeoGebra]

d) Recordando la ecuación de la familia $x^2 = 2py$, dado que el valor de la ordenada es reincidente en todos los casos, se determina la abscisa correspondiente a dicho valor sabiendo que $p = 4{,}11$:

$x = \sqrt{2p3{,}5} = \sqrt{2.4{,}11.3{,}5} = 5{,}36$

Luego, parámetro $p = 4{,}11$ corresponde al individuo "C".

## 77.

a) Ecuación cartesiana de la parábola con vértice en $V(2,-2)$, parámetro $p = 3$ y eje focal paralelo al eje y:

$(x-2)^2 = 2*3*(y+2) = 6(y+2)$

$(x-2)^2 = 6(y+2)$

Se adopta la variable $x$ como parámetro (es decir, la variable que está al cuadrado):

$x = t$

$y = \frac{1}{6}(x-2)^2 - 2 = \frac{1}{6}(t-2)^2 - 2\ , t \in \mathbb{R}$

Dos puntos de la curva surgen dándole valores al parámetro $t$:

Para $t = 8$:

$x = 8$

$$y = \frac{1}{6}(8-2)^2 - 2 = 4$$

$Q(8{,}4)$

Para $t = -4$:

$x = 2$

$$y = \frac{1}{6}(-4-2)^2 - 2 = 4$$

$R(-4{,}4)$

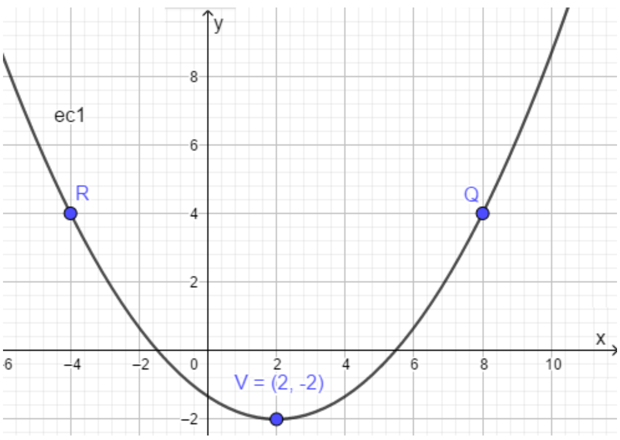



*Figura* 3.70. Representación gráfica del Ejercicio 77.a. [GeoGebra]

b) Tomando como parámetro de la familia al parámetro de forma $p$:

$p = k\, ; k \in \mathbb{R} - \{0\}$

$(x-2)^2 = 2k(y+2)\, ; k \in \mathbb{R} - \{0\}$

Tanto el vértice como el eje focal permanecen fijos. En la Figura 3.70 se indican tres curvas de dicha familia:

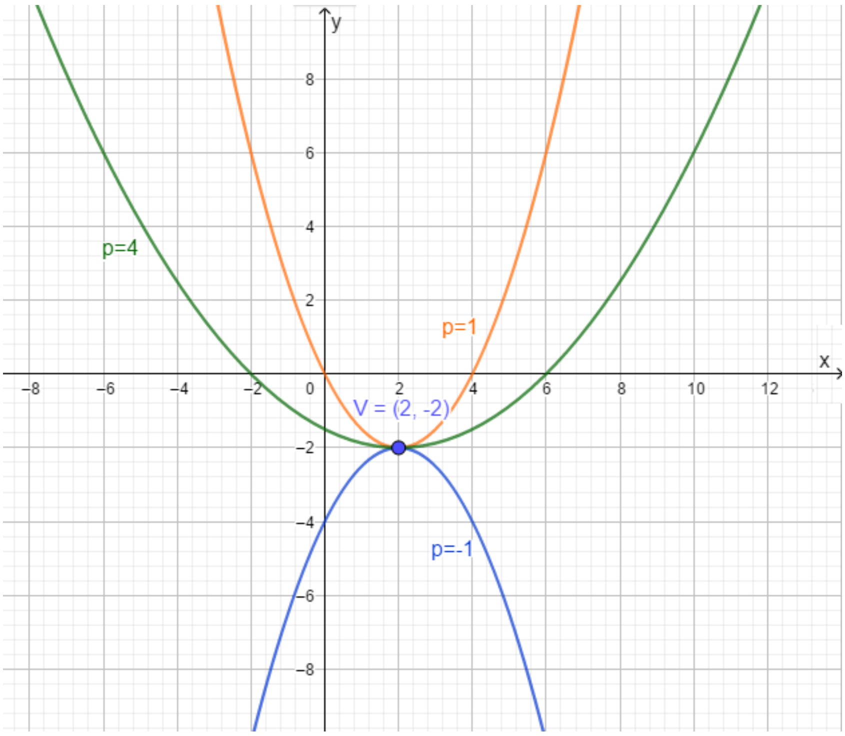



*Figura* 3.71. Representación gráfica del Ejercicio 77.b. [GeoGebra]

# 78.

La propiedad de reflexión de la parábola enuncia lo siguiente: sea $L_T$ la recta tangente a la parábola en un punto $P_0(x_0, y_0)$ de la misma. Los ángulos $\alpha$ y $\beta$ que dicha recta determina con el segmento que se extiende desde el foco $F$ hasta el punto $P_0$, y con la recta paralela al eje de simetría de la parábola que pasa por $P_0$, respectivamente, son congruentes.

Se procederá a verificar dicha propiedad en un punto extremo del lado recto. Para ello se buscará determinar los ángulos $\alpha$ y $\beta$ a partir de datos conocidos. En primer lugar, se encontrará la ecuación de la parábola y su derivada. La derivada, que representa la pendiente de la recta tangente en cada punto de la curva, será evaluada en un extremo del lado recto. Esto nos dará el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. A partir de dicho valor, se determinará un vector director a la recta. También se encontrarán un vector paralelo al eje focal y otro vector desde el foco hasta el punto del extremo del lado recto. Con estos tres vectores nos será posible determinar los ángulos buscados.

En la Figura 3.71 se muestra el planteo geométrico del problema a resolver analíticamente.

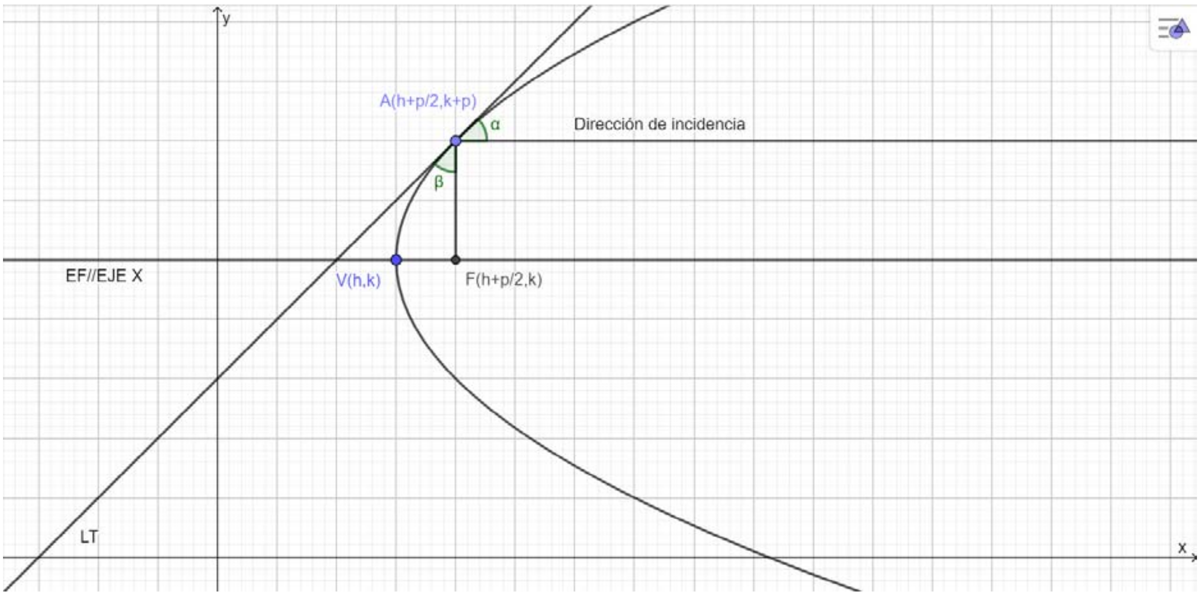



*Figura* 3.72. Representación gráfica del Ejercicio 78. [GeoGebra]

Se procede a la resolución:

Ecuación cartesiana de la parábola con vértice en $V(h,k)$, parámetro $p$ y eje focal paralelo al eje $x$:

$$(y-k)^2 = 2p(x-h)$$

La derivada de la ecuación de la parábola, nos da la función pendiente de la curva:

$$2(y-k)y' = 2p$$

$$y' = \frac{p}{y-k}$$

Evaluada en un extremo del lado recto: $A(h+\frac{p}{2}, k+p)$

$$y'_A = \frac{p}{k+p-k} = 1$$

Es decir que un vector con dirección paralela a la de la recta tangente $L_T$ resulta el vector:

$$\boldsymbol{d}_{LT} = (1,1)$$

Un vector con dirección paralela a la dirección del eje focal:

$$\boldsymbol{d}_{EF} = (p,0) \; // \; Eje\ x$$

Y el vector asociado al punto del extremo del lado recto evaluado:

$\boldsymbol{FA} = (0, p)$

Determinado estos vectores evaluamos los ángulos que nos interesan $\alpha$ y $\beta$ usando producto escalar:

El ángulo $\alpha$ se asocia a los vectores $\boldsymbol{d}_{LT}$ y $\boldsymbol{d}_{EF}$:

$$cos\alpha = \frac{\boldsymbol{d}_{LT}.\boldsymbol{d}_{EF}}{\|\boldsymbol{d}_{LT}\|.\|\boldsymbol{d}_{EF}\|} = \frac{(1,1).(p,0)}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{p^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Y el ángulo $\beta$ se asocia a los vectores $\boldsymbol{d}_{LT}$ y $\boldsymbol{FA}$:

$$cos\beta = \frac{\boldsymbol{d}_{LT}.\boldsymbol{FA}}{\|\boldsymbol{d}_{LT}\|.\|\boldsymbol{FA}\|} = \frac{(1,1).(0,p)}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{0^2+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego, los cosenos son iguales, por lo tanto, los argumentos también lo son:

$\alpha = \beta$

La propiedad de reflexión de la parábola en un extremo de su lado recto queda demostrada.

## 3.8. ELIPSES E HIPÉRBOLAS

### 79.

Sabemos por definición de elipse, que es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos es igual a una constante. Por lo tanto, los puntos dados son los focos de la misma y la suma de las distancias es $2a$, es decir el doble de la medida del semieje mayor.

Entonces, sabemos que:

$2a = 10$

$F_1(-2, 3)$

$F_2(4, 3)$

Por lo que podemos deducir que al ser las ordenadas de ambos focos iguales (3) el eje focal será paralelo al eje $x$, y además $a = 5$.

Podemos encontrar el centro de la elipse como el punto medio entre los focos:

$\boldsymbol{OF_1} = (-2, 3)$

$\boldsymbol{OF_2} = (4, 3)$

$$\boldsymbol{F_1C} = \frac{\boldsymbol{OF_2} - \boldsymbol{OF_1}}{2} = \frac{(4,3) - (-2,3)}{2} = (3, 0)$$

$\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OF_1} + \boldsymbol{F_1C} = (1, 3)$

$c = \|\boldsymbol{F_1C}\| = 3$

Conocemos que la relación entre la distancia focal y las medidas de los semiejes mayor y menor es $a^2 = b^2 + c^2$. Entonces:

$5^2 = b^2 + 3^2$

$b = 4$

Teniendo en cuenta que el eje focal es $y = 3$ (paralelo al eje $x$) y el centro $C(1,3)$. Podemos escribir la ecuación cartesiana de la elipse como:

$$\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1$$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR| = \frac{2b^2}{a}$, es decir:

$$|LR| = 2\,.\frac{16}{5} = \frac{32}{5} = 6{,}4$$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica, indicados en la *Tabla* 3.1 que aportan la información requerida para la representación gráfica.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Centro** | $C(1,3)$ | | | |
| **Eje focal** | Paralelo al eje $x$: $y=3$ | | | |
| **Focos** | $F_1(-2,3)$ | | $F_2(4,3)$ | |
| **Vértices** | $V_1(-4,3)$ | $V_2(6,3)$ | $V_3(1,-1)$ | $V_4(1,7)$ |
| **Lado recto** | $\lvert LR\rvert = 6{,}4$ | | | |
| **Extremos del lado recto** | $A(-2,-0{,}2)$ | $A'(-2,6{,}2)$ | $B(4,-0{,}2)$ | $B'(4,6{,}2)$ |

*Tabla* 3.1. Elementos de la cónica del Ejercicio 79.

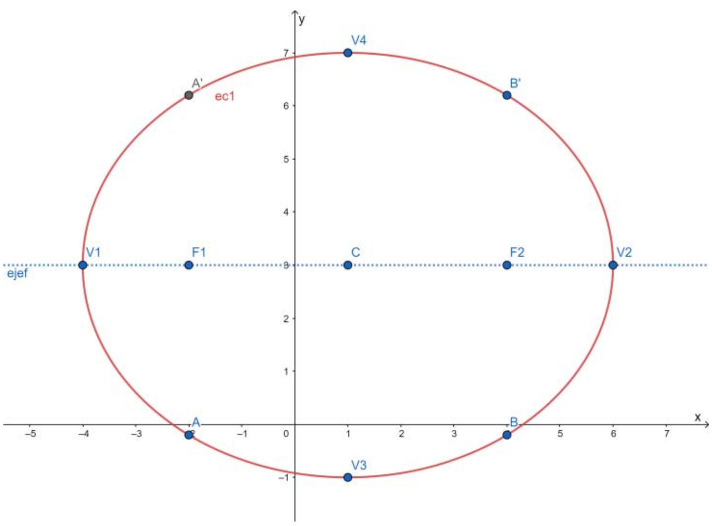



*Figura* 3.73. Representación gráfica del Ejercicio 79. [GeoGebra]

## 80.

La resolución de este ejercicio está dividida en 2 partes, en la primera trabajamos para hallar las rectas tangentes perpendiculares a la recta dada y en la segunda parte encontraremos la ecuación cartesiana de la elipse y todos sus elementos para poder graficarla.

Empezamos hallando las rectas tangentes, para ello derivamos implícitamente la ecuación de la elipse ($3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$) y determinamos la expresión de la pendiente de la recta tangente a la elipse en cualquier punto $P(x, y)$:

$$3.2\,x + 2y.y' + 4 - 2y' = 0$$

Despejamos y´:

$$2y.y' - 2y' = -(6x + 4)$$

$$y' = \frac{-(6x + 4)}{2y - 2}$$

$$y' = \frac{-(3x + 2)}{y - 1}$$

Sabemos que las rectas tangentes deberán ser perpendiculares a la recta L: $y = -x + 5$, si la pendiente de la recta L es $m_L = -1$, entonces, la pendiente de las rectas tangentes deberá ser:

$$m_T = -\frac{1}{m_L}$$

$$m_T = 1$$

Igualamos este resultado a la pendiente de la recta tangente para cada punto $P(x, y)$ que pertenece a la elipse:

$$\frac{-(3x + 2)}{y - 1} = 1$$

$$-(3x + 2) = y - 1$$

$$y = -3x - 1$$

Esta última ecuación nos da la relación que deben cumplir los puntos $P(x, y)$ de la elipse para que la pendiente sea $m_T = 1$.

Para hallar cuales son esos puntos, remplazamos esta condición en la ecuación de la elipse:

$$3x^2 + (-3x - 1)^2 + 4x - 2(-3x - 1) - 3 = 0$$

Resolvemos el cuadrado de un binomio y asociamos términos semejantes:

$$3x^2 + 9x^2 + 6x + 1 + 4x + 6x + 2 - 3 = 0$$

$$12x^2 + 16x = 0$$

Resolvemos la ecuación:

$4x\ (3x+4)\ =\ 0$

Tenemos 2 soluciones posibles: $x_1 = 0$ y $x_2 = -\frac{4}{3}$

Remplazamos $x_1$ en la ecuación que establece la condición que deben cumplir los puntos de la elipse para que la pendiente de la curva en ellos sea $m_T = 1$:

$y_1 = -\ 3(x_1) - 1$

$y_1 = -\ 3\ .\ (0) - 1\ \ ;\ \ y_1 = -1$

Por lo que hemos encontrado el primer punto donde la pendiente es $m_T = 1$: $T_1(0, -1)$

Luego la ecuación de la recta de pendiente $m_T = 1$ que pasa por dicho punto es:

$L_{T1}:\ y =\ x - 1$

Realizamos el mismo procedimiento para $x_2 = -\frac{4}{3}$:

$y_2 = -\ 3x_2 - 1$

$y_2 = -\ 3\ .\left(-\frac{4}{3}\right) - 1$

$y_2 =\ 3$

Por lo que hemos encontrado el segundo punto donde la pendiente es $m_T = 1$:

$T_2\left(-\frac{4}{3}, 3\right)$

Buscamos la ecuación de la recta que pasa por dicho punto:

$L_{T2}:\ y =\ \left(x + \frac{4}{3}\right) + 3$

$L_{T2}:\ y =\ x + \frac{13}{3}$

Hemos concluido que las rectas tangentes a la elipse y que son perpendiculares a L son:

$L_{T1}:\ y =\ x - 1$ y $L_{T2}:\ y =\ x + \frac{13}{3}$.

Para la segunda parte del ejercicio que es graficar la cónica, partimos de la ecuación general de la elipse $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$, y completamos cuadrados para determinar sus semiejes y centro:

Asociamos términos con variables iguales*:* $(3x^2 + 4x) + (\ y^2\ - 2y) - 3\ =\ 0$

Extraemos como factor común el coeficiente principal de cada binomio:

$3\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) + (\ y^2\ - 2y)\ - 3\ =\ 0$

Completamos cuadrados dentro de cada paréntesis:

$3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + (\ y^2\ - 2y + 1 - 1)\ - 3\ =\ 0$

Aplicamos propiedad distributiva del producto respecto la suma y asociamos los términos independientes:

$$3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{3}+(\,y^2\;-\;2y+1)-1\;\;-3=\;0$$

Expresamos cada trinomio cuadrado perfecto como su binomio correspondiente:

$$3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y-1)^2-\frac{16}{3}\;=\;0$$

$$3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y-1)^2=\frac{16}{3}$$

Dividimos toda la expresión por el término independiente y obtenemos la ecuación cartesiana de la cónica:

$$\frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}+\frac{(y-1)^2}{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1$$

$$\frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}+\frac{(y-1)^2}{(2{,}31)^2}=1$$

A partir de la ecuación de cartesiana de la elipse, sabemos que $a=4\sqrt{3}/3$ y $b=4/3$, sabiendo que $a^2=b^2+c^2$ determinamos el valor de c:

$$c=\sqrt{\frac{16}{3}-\frac{16}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR|=\frac{2b^2}{a}$, es decir:

$$|LR|=2\,.\frac{16/9}{4\sqrt{3}/3}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\approx 1{,}54$$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica, indicados en la $Tabla$ 3.2. necesarios para la representación gráfica.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Centro** | $C\left(-\frac{2}{3},1\right)$ | | | |
| **Eje focal** | Paralelo al eje $y$: $x=-\frac{2}{3}$ | | | |
| **Focos** | $F_1\left(-\frac{2}{3},-0{,}8856\right)$ | | $F_2\left(-\frac{2}{3},2{,}8856\right)$ | |
| **Vértices** | $V_1\left(-\frac{2}{3},-1{,}31\right)$ | $V_2\left(-\frac{2}{3},3{,}31\right)$ | $V_3(-2,1)$ | $V_4\left(\frac{2}{3},1\right)$ |
| **Lado recto** | $\|LR\|=\frac{8\sqrt{3}}{9}\approx 1{,}54$ | | | |
| **Extremos del lado recto** | $A(-1{,}44,-0{,}8856)$ | $A'(0{,}103,-0{,}8856)$ | $B(-1{,}44,2{,}8856)$ | $B'(0{,}103,2{,}8856)$ |

$Tabla$ 3.2. Elementos de la cónica del Ejercicio 80.

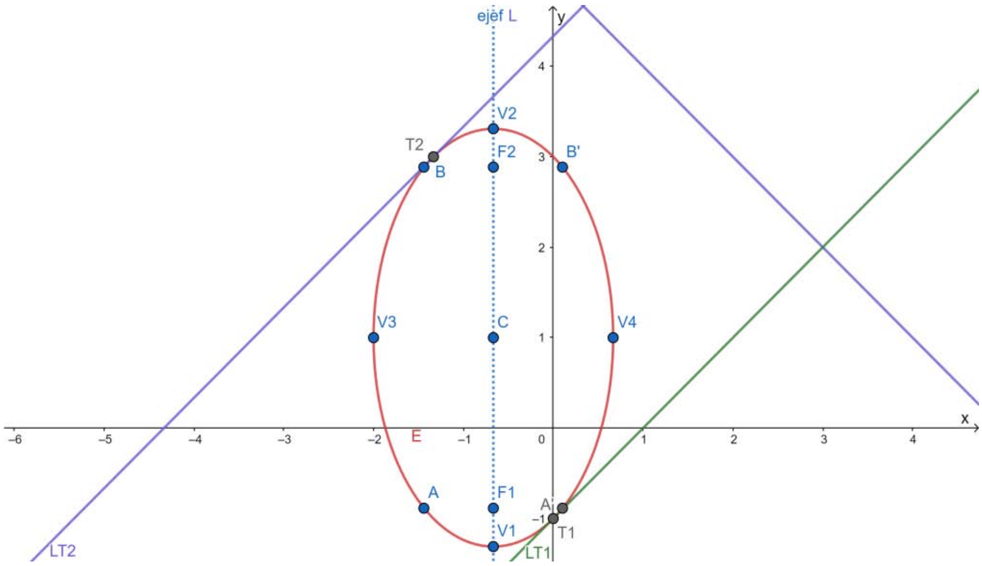



*Figura* 3.74. Representación gráfica del Ejercicio 80. [GeoGebra]

## 81.

a) Del enunciado podemos obtener la información que $2a = 50$, debido a que el ancho del arco elíptico tiene esa medida. También podemos deducir que $b = 20$, debido a que es la altura del arco. Por lo tanto, $a = 25$ y $b = 20$.

Debemos proponer un sistema de referencia respecto al cuál referenciaremos nuestros datos y plantearemos la ecuación de la elipse. Las alternativas más convenientes son situar el origen del sistema en el vértice izquierdo del semieje mayor o situarlo en el centro. Optaremos por la segunda opción, es decir lo situaremos en el centro del arco elíptico. En este sistema de referencia seleccionado, la ecuación cartesiana del arco semielíptico será:

$$\frac{(x)^2}{25^2} + \frac{(y)^2}{20^2} = 1 \quad ; \quad y \geq 0$$

b) Para calcular la altura del arco a una distancia de 5 m de los pilares debemos remplazar en la ecuación el valor de x=20 o x= -20.

$$\frac{(20)^2}{25^2} + \frac{(y)^2}{20^2} = 1$$

$$(y)^2 = 20^2\left(1 - \frac{(20)^2}{25^2}\right)$$

$$y = +\sqrt{20^2\left(1 - \frac{(20)^2}{25^2}\right)}$$

$$y = 12$$

(Se descarta la solución negativa por tratarse un arco semielíptico con $y \geq 0$)

Entonces la altura del arco en correspondencia con las estructuras de protección que se sitúan a 5m de los pilares es 12m.

c) Para graficar la elipse que describe al puente debemos terminar de hallar los elementos de la misma. Sabiendo que $a^2 = b^2 + c^2$ determinamos el valor de c:

$c = \sqrt{625 - 400} = 15$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR| = \frac{2b^2}{a}$, es decir: $|LR| = 2 \,.\, \frac{400}{25} = 32$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica que se indican en la *Tabla* 3.3. La *Figura* 3.74 muestra la representación gráfica de este problema.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Centro** | $C(0,0)$ | | |
| **Eje focal** | Coincidente con el eje x | | |
| **Focos** | $F_1(15, 0)$ | $F_2(-15, 0)$ | |
| **Vértices** | $V_1(-25, 0)$ | $V_2(25, 0)$ | $V_3(0, 20)$ |
| **Lado recto** | $\|LR\| = 32$ | | |
| **Extremos del lado recto** | $A(-15, 16)$ | $B(15, 16)$ | |

*Tabla* 3.3. Elementos de la cónica del Ejercicio 81.

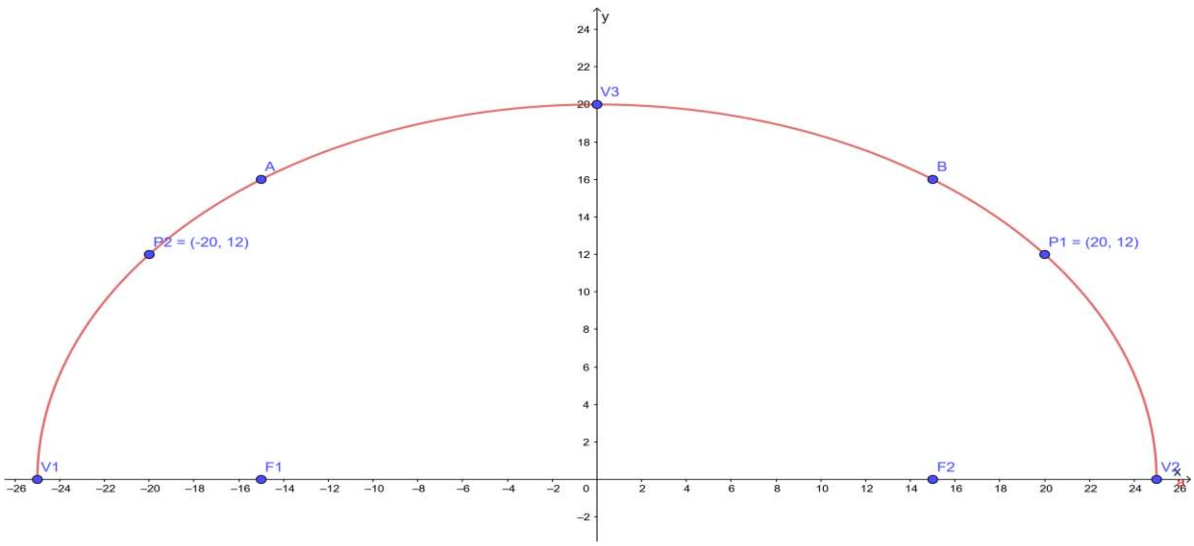



*Figura* 3.75. Representación gráfica del Ejercicio 82. [GeoGebra]

## 82.

Con los datos del enunciado podemos decir que la ecuación cartesiana de la elipse es:

$$\frac{(x+2)^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

Pero se pide las ecuaciones paramétricas de la cónica por lo que siguiendo el procedimiento desarrollado en la sección *Ecuaciones paramétricas de una elipse,* del Libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías,* tenemos que la parametrización para la elipse del enunciado es:

$$\begin{cases} x=-2+5\,cos\,\theta \\ y=4\,sen\,\theta \end{cases} \qquad \theta\,\epsilon\,[0\,,2\pi)$$

<u>*Observación:*</u>

Vamos a demostrar que las ecuaciones paramétricas de la elipse describen el mismo lugar geométrico que la ecuación de la elipse indicada al inicio, asociada a los datos del problema.

Despejaremos las funciones trigonométricas y luego las elevaremos al cuadrado y las sumaremos buscando la identidad trigonométrica fundamental.

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)}{5}=\ cos\,\theta \\ \dfrac{y}{4}=sen\,\theta \end{cases} \qquad \theta\,\epsilon\,[0\,,2\pi)$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos miembros

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{5^2}=\ cos^2\,\theta \\ \dfrac{y^2}{4^2}=sen^2\,\theta \end{cases} \qquad \theta\,\epsilon\,[0\,,2\pi)$$

Luego sumamos a ambos miembros:

$$\frac{(x+2)^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=cos^2\,\theta+sen^2\,\theta$$

Remplazamos por la identidad trigonométrica fundamental y llegamos finalmente a la ecuación cartesiana de la elipse:

$$\frac{(x+2)^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

## 83.

a) Empezaremos planteando la ecuación cartesiana de la hipérbola. Para ello necesitamos conocer los valores de los semiejes de $a$ y $b$. Tenemos como dato el centro y un foco de la hipérbola, entonces podemos calcular la distancia focal $\boldsymbol{c}$:

$\boldsymbol{OF_1} = (-6, 2)$

$\boldsymbol{OC} = (4, 2)$

$\boldsymbol{F_1C} = \boldsymbol{OC} - \boldsymbol{OF_1} = (10, 0)$

$c = \|\boldsymbol{F_1C}\| = 10$

A partir de la excentricidad podemos conocer el valor del semieje real, ya que, siendo:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

Despejamos $a$:

$$a = \frac{c}{5/4} = \frac{10}{5/4} = 8$$

A partir de la relación entre la distancia focal, y las medidas de los semiejes real e imaginario, $c^2 = b^2 + a^2$, Obtenemos:

$$10^2 = b^2 + 8^2$$

$$b = 6$$

Como el centro y el foco tienen la misma ordenada, sabemos que el eje focal es paralelo al eje $x$ cuya ecuación es:

$$y = 2.$$

Planteamos entonces la ecuación cartesiana de la hipérbola:

$$\frac{(x-4)^2}{8^2} - \frac{(y-2)^2}{6^2} = 1$$

Para llegar a la ecuación general, comenzamos desarrollando los cuadrados de los binomios:

$$\frac{(x^2 - 8x + 16)}{8^2} - \frac{(y^2 - 4y + 4)}{6^2} = 1$$

Luego sacamos denominador común y despejamos el mismo:

$$\frac{9(x^2 - 8x + 16) - 16(y^2 - 4y + 4)}{576} = 1$$

$$(9x^2 - 72x + 144) - (16y^2 - 64y + 64) = 576$$

$$9x^2 - 72x + 144 - 16y^2 + 64y - 64 - 576 = 0$$

Así llegamos finalmente a la ecuación general de la hipérbola:

$$9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y - 496 = 0$$

b) Encontramos los elementos de la cónica para poder representar gráficamente. Los mismos se detallan en la $Tabla$ 3.4. En la Figura 3.75 se muestra la representación gráfica asociada a este problema.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Centro** | $C(4,2)$ | | | |
| **Eje focal** | Paralelo al el eje $x$: $y$=2 | | | |
| **Focos** | $F_1(-6,2)$ | | $F_2(14,2)$ | |
| **Vértices** | $V_1(-4,2)$ | $V_2(12,2)$ | $V_3(4,-4)$ | $V_4(4,8)$ |
| **Lado recto** | $\lvert LR\rvert = 2\dfrac{6^2}{8} = 9$ | | | |
| **Extremos del lado recto** | $A(-6,-2{,}5)$ | $A'(-6,6{,}5)$ | $B(14,-2{,}5)$ | $B'(14{,}6{,}5)$ |
| **Asíntotas** | $y = \dfrac{3}{4}x - 1$ | | $y = -\dfrac{3}{4}x + 5$ | |
| **Excentricidad** | $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$ | | | |

*Tabla* 3.4. Elementos de la cónica del Ejercicio 82.

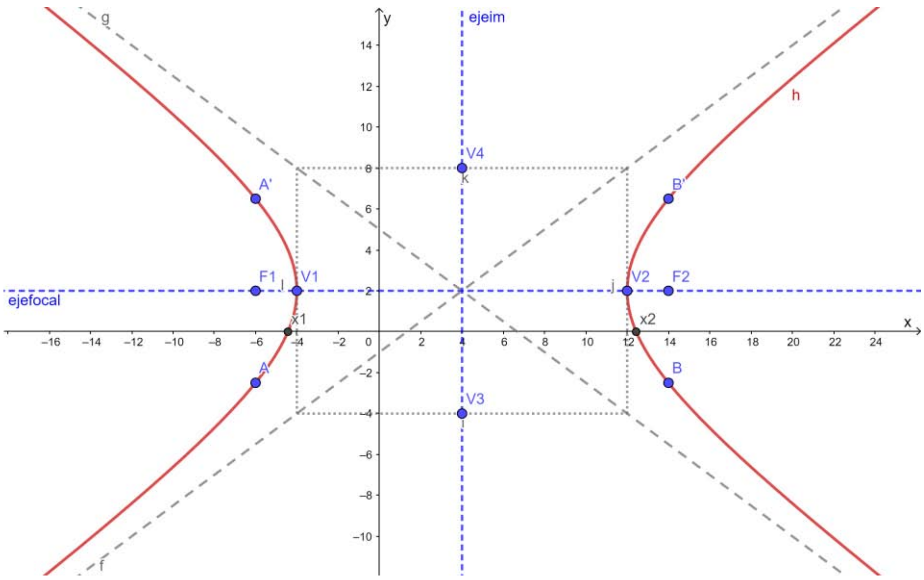



*Figura* 3.76. Representación gráfica del Ejercicio 83. [GeoGebra]

c) Para obtener los puntos de intersección con el eje $x$ resolvemos un sistema de ecuaciones con las ecuaciones de ambos lugares geométricos:

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y - 496 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Reemplazamos $y = 0$ en la ecuación general de la hipérbola y resolvemos la ecuación cuadrática:

$$9x^2 - 72x - 496 = 0$$

Encontramos entonces que las intersecciones con el eje $x$ (o raíces) son:

$x_1 = 12{,}43$

$x_2 = -4{,}43$

Luego los puntos de intersección con el eje $x$ son $X_1(-4.43\ ,0)$ y $X_2(12.43\ ,0)$.

## 84.

Comenzamos derivando implícitamente la ecuación general de la hipérbola para encontrar una expresión para la pendiente de la recta tangente a la cónica:

$6x - 8\,y\,y' - 18 - 40y' = 0$

Luego despejamos $y'$:

$$y' = \frac{6x\ - 18}{8\,y + 40}$$

Para determinar el punto específico donde pasa la recta que buscamos, reemplazamos y=-2 en la ecuación de la hipérbola y calculamos las abscisas de los puntos que se corresponden con esta ordenada:

$3x^2 - 4(-2)^2 - 18x - 40\ (-2) - \ 85 = 0$

$3x^2 - 16 - 18x + 80\ -\ 85 = 0$

$3x^2 - 16 - 18x + 80\ -\ 85 = 0$

$3x^2 - 18x - \ 21 = 0$

Encontramos dos valores de $x$ que satisfacen la ecuación:

$x_1 = 7$

$x_2 = -1$

Descartamos $x_1$ ya que se nos solicita que tenga abscisa negativa. Por lo tanto, la recta normal que buscamos pasa por $T(-1,-2)$. Calculamos la pendiente reemplazando $T$ en la expresión de $y'$obtenida al inicio del desarrollo:

$$y' = \frac{6\,(-1) - 18}{8\,(-2) + 40}$$

$y' = -1$

Entonces la recta normal tendrá pendiente $m_N = - \frac{1}{y'} = 1$. Por lo tanto, la ecuación de la recta normal a la hipérbola que pasa por el punto $T(-1,-2)$ es:

$L_N\!:\ \ y = x - 1$

Para representar gráficamente debemos calcular los elementos de la hipérbola, para ello comenzamos conociendo su ecuación cartesiana.

Completamos cuadrados en la ecuación general:

$3x^2 - 4y^2 - 18x - 40\,y - \ 85 = 0$

$3(x^2 - 6x) - 4(y^2 + 10\ y) - \ 85 = 0$

$3(x^2 - 6x + 9 - 9) - 4(y^2 + 10y + 25 - 25) = \ 85$

Extraemos los términos que agregamos para completar cuadrados y despejamos:

$3(x^2 - 6x + 9) - 27 - 4(y^2 + 10y + 25) + 100 = \ 85$

$3(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 10y + 25) = \ 85 + 27 - 100$

Expresamos los cuadrados que representan los trinomios cuadrados perfectos:

$3(x - 3)^2 - 4(y + 5)^2 = \ 12$

Dividimos ambos miembros por el termino independiente:

$$\frac{3(x - 3)^2}{12} - \frac{4(y + 5)^2}{12} = \ 1$$

Dividimos ambos denominadores por los coeficientes que acompañan a los paréntesis para llegar finalmente a la ecuación cartesiana de la hipérbola:

$$\frac{(x - 3)^2}{(2)^2} - \frac{(y + 5)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \ 1$$

Conocemos que la relación entre la distancia focal, y las medidas de los semiejes real e imaginario es:

$c^2 = b^2 + a^2$

Entonces:

$c = \sqrt{7} \approx 2{,}646$

Los elementos de la cónica se indican en la Tabla 3.5, los cuales permiten una apropiada representación gráfica (Figura 3.77).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Centro** | $C(3, -5)$ | | | |
| **Eje focal** | Paralelo al eje x*:* $y$=$-5$ | | | |
| **Focos** | $F_1(\ 0{,}354, -5)$ | | $F_2(5{,}646\ , -5)$ | |
| **Vértices** | $V_1(1, -5)$ | $V_2(5\ , -5)$ | $V_3(3, -6{,}73)$ | $V_4(3, -3{,}27)$ |
| **Lado recto** | $\lvert LR\rvert = 2\frac{3}{2} = 3$ | | | |
| **Extremos del lado recto** | $A(0{,}354, -3{,}5)$ | $A'(0{,}354, -6{,}5)$ | $B(5{,}646, -3{,}5)$ | $B'(5{,}646, -6{,}5)$ |
| **Asíntotas** | $y = 0{,}866\ x - 7{,}6$ | | $y = -0{,}866x - 2{,}4$ | |
| **Excentricidad** | $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1{,}32$ | | | |

*Tabla* 3.5. Elementos de la cónica del Ejercicio 84.

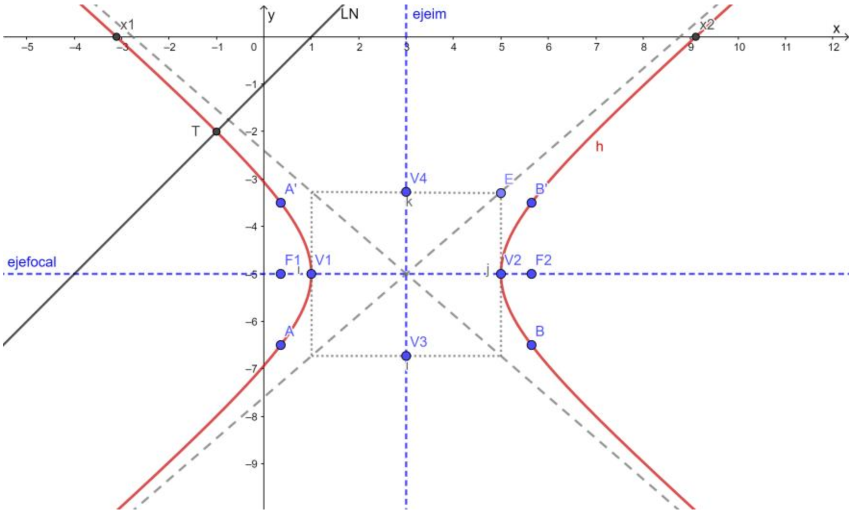



*Figura* 3.77. Representación gráfica del Ejercicio 84. [GeoGebra]

## 85.

Sabemos que una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la diferencia entre las distancias a dos puntos fijos es una constante. En la situación dada, los puntos fijos son los focos (Q y R) y la diferencia de las distancias es $2a$, es decir el doble de la medida del semieje real. Entonces, $2a = 258$.

$2c = \|\boldsymbol{QR}\| = 354$

A partir de la relación entre la distancia focal, y las medidas de los semiejes real e imaginario, $c^2 = a^2 + b^2$, obtenemos:

$177^2 = 129^2 + b^2$

$b = 12\sqrt{102} \approx 121{,}194$

Plantearemos un sistema de referencia donde el origen es el centro entre los dos focos, Q y R, y el eje $x$ es la línea costera donde se sitúan los mismos. Realizamos la siguiente figura de análisis para comprender mejor el problema, siendo $P$ la ubicación de la embarcación:

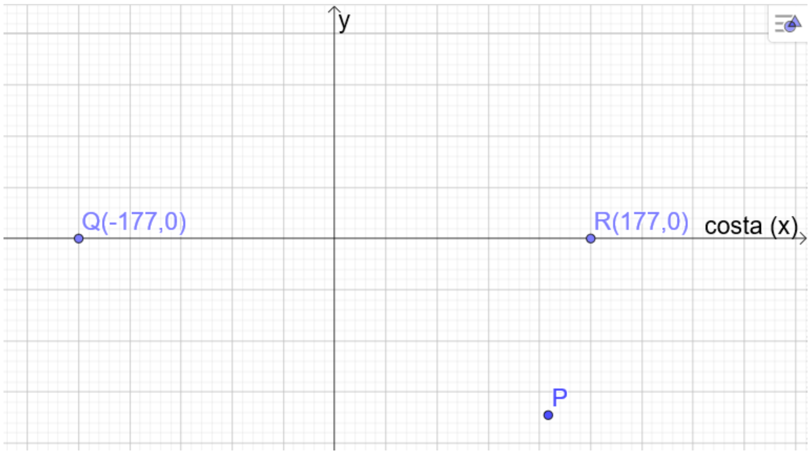



*Figura* 3.78. Representación gráfica del Ejercicio 85. [GeoGebra]

Entonces según el sistema de referencia elegido las coordenadas de los puntos Q y R son:

$Q(-177, 0)$ ; $R(177, 0)$

Podemos escribir la ecuación cartesiana de la hipérbola:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{129^2} - \dfrac{y^2}{(121{,}194)^2} = 1 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

Esta ecuación nos da todas las posibles posiciones que puede tener la embarcación estando 354 km más cerca de alguna de las 2 estaciones costeras que de la otra. Para conocer la posición de la embarcación, debemos introducir en la ecuación la distancia de la misma a la línea costera, que es de 194 km, por lo que en nuestro sistema de referencia corresponde a una ordenada (-194). Remplazamos este valor en la ecuación de la hipérbola para obtener la abscisa:

$$\frac{x^2}{129^2} - \frac{(-194)^2}{(121{,}194)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{129^2} - 2{,}56 = 1$$

$$x = \pm 129\sqrt{3{,}56}$$

Encontramos dos valores de $x$ que satisfacen la ecuación:

$x_1 = 243{,}5$ y $x_2 = -243{,}5$

La posición que satisface el enunciado es el valor positivo de los encontrados debido a que los puntos con abscisa positiva corresponden a la rama que está más cerca del foco R que del foco Q. Entonces la posición del barco en el momento que mandó la señal es $P(243{,}5, -194)km$.

Para representar gráficamente la cónica necesitamos calcular el resto de los elementos, los cuales se indican en la *Tabla* 3.6.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Centro** | $C(0, 0)$ | | | |
| **Eje focal** | Coincidente con el eje $x$ | | | |
| **Focos** | $Q(-177, 0)$ | | $R(177, 0)$ | |
| **Vértices** | $V_1(-129, 0)$ | $V_2(129, 0)$ | $V_3(0, -121{,}19)$ | $V_4(0, 121{,}19)$ |
| **Lado recto** | $\lvert LR\rvert = 2 \,.\, \dfrac{(121{,}194)^2}{129} = 2 \,.\, 113{,}86 = 227{,}72$ | | | |
| **Extremos del lado recto** | $A(-177, -113{,}86)$ | $A'(-177, 113{,}86)$ | $B(177, -113{,}86)$ | $B'(177, 113{,}86)$ |
| **Asíntotas** | $y = 0{,}94\,x$ | | $y = -0{,}94x$ | |
| **Excentricidad** | $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{177}{129} = 1{,}372$ | | | |

*Tabla* 3.6. Elementos de la cónica del Ejercicio 85.

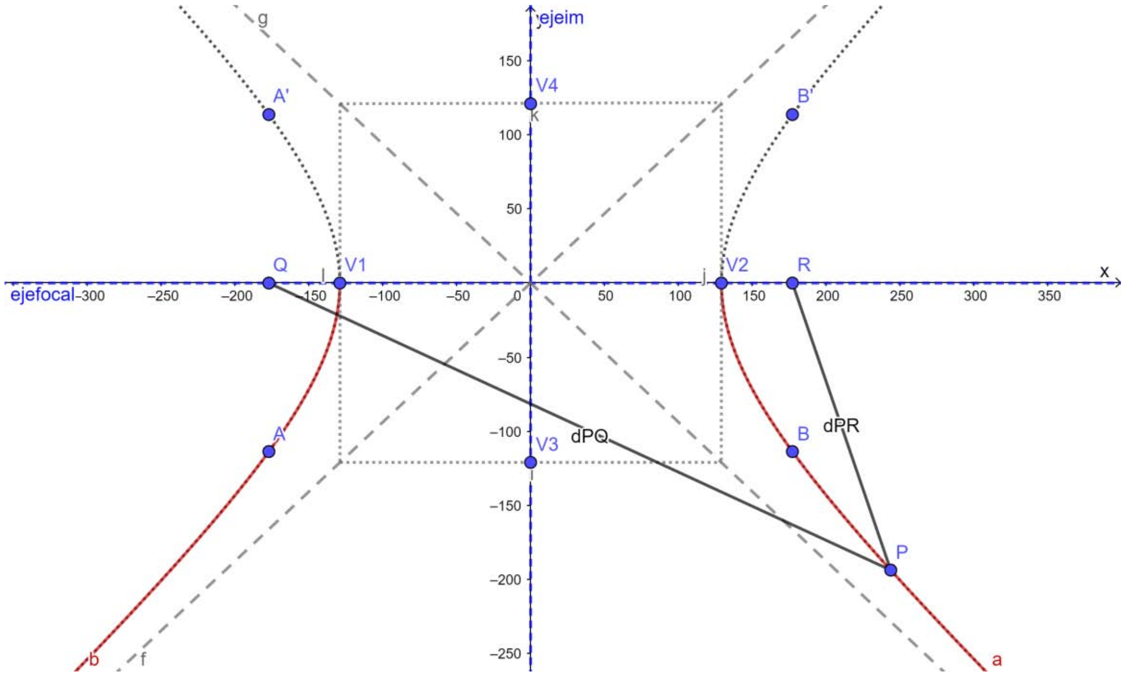



*Figura* 3.79. Representación gráfica del Ejercicio 85. [GeoGebra]

## 86.

Despejaremos las funciones trigonométricas y luego las elevaremos al cuadrado y las restaremos buscando llegar a una identidad trigonométrica.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{cos\ (t)} \\ \dfrac{y}{b} = \dfrac{sen\ (t)}{cos\ (t)} \end{cases} \qquad t\ \epsilon\ \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos miembros

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 = \dfrac{1}{cos^2\ (t)} \\ \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = \dfrac{sen^2\ (t)}{cos^2\ (t)} \end{cases} \qquad t\ \epsilon\ \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$$

Luego restamos ambos miembros:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{cos^2\ (t)} - \frac{sen^2\ (t)}{cos^2\ (t)}$$

Restamos las fracciones del segundo miembro:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1 - sen^2\ (t)}{cos^2\ (t)}$$

Sabemos por la identidad trigonométrica que $cos^2\ \theta + sen^2\ \theta = 1$, de donde despejamos:

$cos^2\,\theta = 1 - sen^2\,\theta$, remplazamos y llegamos finalmente a la ecuación cartesiana de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{cos^2\,(t)}{cos^2\,(t)} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

## 87.

a) A partir de la ecuación cartesiana de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, sabemos que $a = 5$ y $b = 3$. Siendo $a^2 = b^2 + c^2$ determinamos el valor de c:

$$c = \sqrt{25 - 9} = 4$$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR| = \frac{2b^2}{a}$, es decir,

$$|LR| = 2\,.\frac{9}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica (*Tabla* 3.7).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Centro** | $C(0{,}0)$ | | | |
| **Eje focal** | Coincidente con el eje $y$ | | | |
| **Focos** | $F_1(0{,}4)$ | | $F_2(0,-4)$ | |
| **Vértices** | $V_1(0{,}5)$ | $V_2(0,-5)$ | $V_3(3{,}0)$ | $V_4(-3{,}0)$ |
| **Lado recto** | $\|LR\| = 3.6$ | | | |
| **Extremos del lado recto** | $A(1.8, 4)$ | $A'(-1.8, 4)$ | $B(1.8, -4)$ | $B'(-1.8, -4)$ |

*Tabla* 3.7. Elementos de la cónica del Ejercicio 87.a.

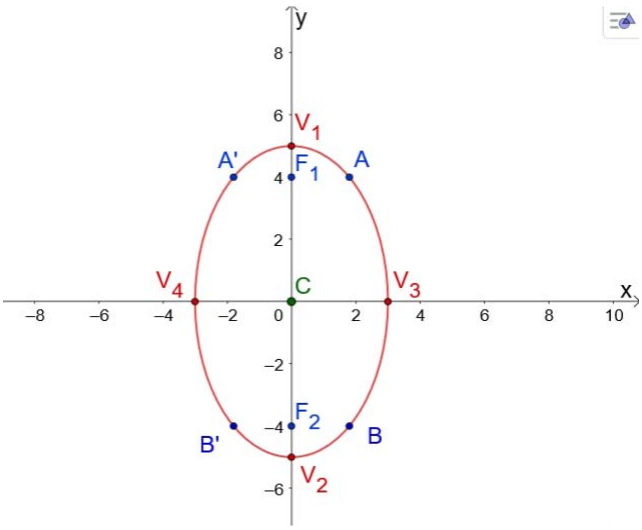



*Figura* 3.80. Representación gráfica del Ejercicio 87.a. [GeoGebra]

b) A partir de la ecuación de cartesiana de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, sabemos que $a=5$ y $b=2$, como $a^2=b^2+c^2$ determinamos el valor de c:

$c=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

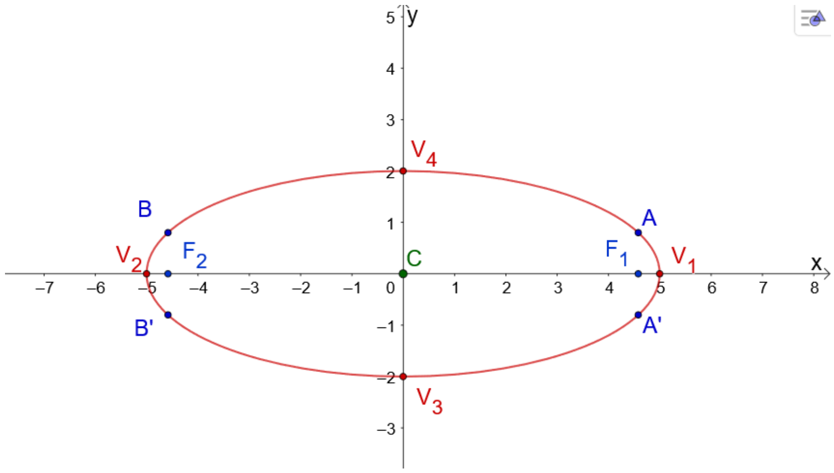
Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR|=\frac{2b^2}{a}$, es decir:

$$|LR|=2\,.\frac{4}{5}=\frac{8}{5}=1.6$$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica ($Tabla$ 3.8)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Centro** | $C(0,0)$ | | | |
| **Eje focal** | Coincidente con el eje $x$ | | | |
| **Focos** | $F_1(\sqrt{21},0)$ | | $F_2(-\sqrt{21},0)$ | |
| **Vértices** | $V_1(5,0)$ | $V_2(-5,0)$ | $V_3(0,-2)$ | $V_4(0,2)$ |
| **Lado recto** | $\lvert LR\rvert=1.6$ | | | |
| **Extremos del lado recto** | $A(\sqrt{21},0.8)$ | $A'(\sqrt{21},-0.8)$ | $B(-\sqrt{21},0.8)$ | $B'(-\sqrt{21},-0.8)$ |

$Tabla$ 3.8. Elementos de la cónica del Ejercicio 87.b.




$Figura$ 3.81. Representación gráfica del Ejercicio 87.b. [GeoGebra]

c) Tenemos la ecuación general de la elipse $4x^2+2y^2-8x-12y+14=0$, completaremos cuadrados para determinar sus semiejes y centro.

Asociamos términos de iguales variables: $(4x^2-8x)+(2y^2-12y)+14=0$

Extraemos como factor común el coeficiente principal de cada binomio:

$4(x^2-2x)+2(y^2-6y)+14=0$

Completamos cuadrados dentro de cada paréntesis:

$4(x^2-2x+1-1)+2(y^2-6y+9-9)+14=0$

Aplicamos propiedad distributiva del producto respecto la suma y asociamos los términos independientes:

$4(x^2-2x+1)-4+2(y^2-6y+9)-18+14=0$

$4(x-1)^2+2(y-3)^2-8=0$

Expresamos cada trinomio cuadrado perfecto como su binomio correspondiente:

$4(x-1)^2+2(y-3)^2=8$

Dividimos toda la expresión por el término independiente y obtenemos la ecuación cartesiana de la cónica: $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y-3)^2}{4}=1.$

A partir de la ecuación de cartesiana de la elipse, sabemos que $a=2$ y $b=\sqrt{2}$, sabiendo que $a^2=b^2+c^2$ determinamos el valor de c:

$c=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR|=\frac{2b^2}{a}$, es decir: $|LR|=2.\frac{2}{2}=2$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica (T*abla* 3.9)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Centro** | $C(1,3)$ | | | |
| **Eje focal** | Paralelo al el eje $y:\ x=1$ | | | |
| **Focos** | $F_1(1,3+\sqrt{2})$ | | $F_2(1,3-\sqrt{2})$ | |
| **Vértices** | $V_1(1,5)$ | $V_2(1,1)$ | $V_3(1+\sqrt{2},3)$ | $V_4(1-\sqrt{2},3)$ |
| **Lado recto** | $\|LR\|=2$ | | | |
| **Extremos del lado recto** | $A(2,3+\sqrt{2})$ | $A'(0,3+\sqrt{2})$ | $B(2,3-\sqrt{2})$ | $B'(0,3-\sqrt{2})$ |

*Tabla* 3.9. Elementos de la cónica del Ejercicio 87.c.

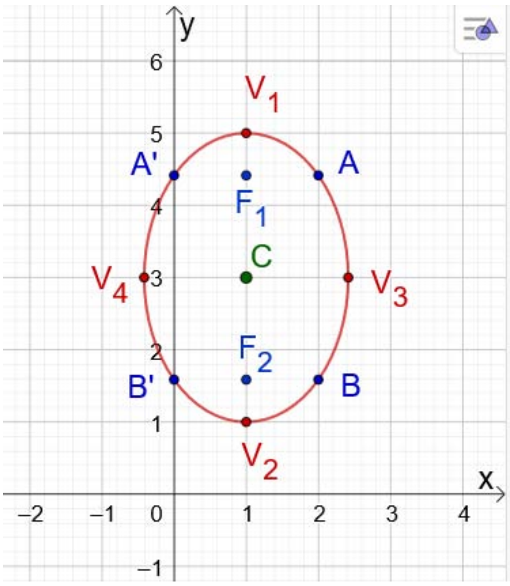



*Figura* 3.82. Representación gráfica del Ejercicio 87.c. [GeoGebra]

d) A partir de la ecuación general de la elipse, asociamos términos de iguales variables: $(4x^2 - 48x) + (9y^2 + 72y) + 144 = 0$. Extraemos como factor común el coeficiente principal de cada binomio:

$4(x^2 - 12x) + 9(y^2 + 8y) + 144 = 0$

Completamos cuadrados dentro de cada paréntesis:

$4(x^2 - 12x + 36 - 36) + 9(y^2 + 8y + 16 - 16) + 144 = 0$

Aplicamos propiedad distributiva del producto respecto la suma y asociamos los términos independientes*:*

$4(x^2 - 12x + 36) - 144 + 9(y^2 + 8y + 16) - 144 + 144 = 0$

Expresamos cada trinomio cuadrado perfecto como su binomio correspondiente:

$4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144$

Dividimos toda la expresión por el término independiente y obtenemos la ecuación cartesiana de la cónica: $\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$.

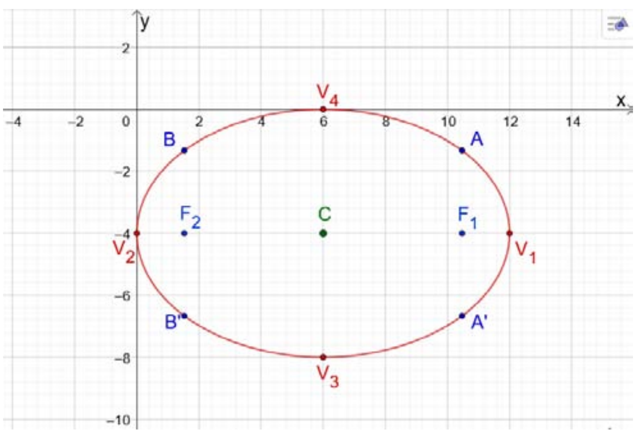
A partir de la ecuación de cartesiana de la elipse, sabemos que $a = 6$ y $b = 4$, sabiendo que $a^2 = b^2 + c^2$ determinamos el valor de la semidistancia focal: $c = \sqrt{36-16} = \sqrt{20}$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR| = \frac{2b^2}{a}$, es decir: $|LR| = 2\frac{.16}{6} = \frac{16}{3}$.

Con todos los datos anteriores determinamos los elementos de la cónica ($Tabla$ 3.10):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Centro** | $C(6,-4)$ | | | |
| **Eje focal** | Paralelo al el eje $x$ : $y = -4$ | | | |
| **Focos** | $F_1(6+\sqrt{20},-4)$ | | $F_2(6-\sqrt{20},-4)$ | |
| **Vértices** | $V_1(12,-4)$ | $V_2(0,-4)$ | $V_3(6,-8)$ | $V_4(6,0)$ |
| **Lado recto** | $\|LR\| = 16/3$ | | | |
| **Extremos del lado recto** | $A(6+\sqrt{20},-\frac{4}{3})$ | $A'(6+\sqrt{20},-\frac{20}{3})$ | $B(6-\sqrt{20},-\frac{4}{3})$ | $B'(6-\sqrt{20},-20/3)$ |

$Tabla$ 3.10. Elementos de la cónica del Ejercicio 87.d.




$Figura$ 3.83. Representación gráfica del Ejercicio 87.d. [GeoGebra]

## 88.

Comenzamos determinando los puntos de intersección de la elipse con la recta L, para ello resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Despejamos $y$ de la ecuación de la recta L ,

$y = \frac{1+2x}{3}$

Luego reemplazamos en la ecuación de la elipse $y$ despejamos $x$:

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{\left(\frac{1+2x}{3}+1\right)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{\left(\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right)^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{2x}{9} + \frac{1}{9} + \frac{x^2}{9} + \frac{4}{9}x + \frac{4}{9} = 1$$

$$\frac{2x^2}{9} + \frac{2}{9}x - \frac{4}{9} = 0$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática son $x_1 = 1$ $y$ $x_2 = -2$, esto nos indica que la recta es *secante* a la elipse.

Si $x_1 = 1$, entonces $y_1 = 1$

Si $x_2 = -2$, entonces $y_2 = -1$

Por lo tanto los puntos de intersección son $P_1(1{,}1) y\ P_2(-2,-1)$.

Ahora determinamos las ecuaciones de las rectas tangentes a la cónica en los puntos de intersección. Para ello derivamos implícitamente la ecuación de la elipse:

$$\frac{2(x-1)}{9} + \frac{2(y+1)}{4}.y' = 0$$

$$\frac{2x}{9} - \frac{2}{9} + \left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right)y' = 0$$

$$y' = \frac{\frac{2}{9} - \frac{2}{9}x}{\frac{y}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{4-4x}{9y+9}$$

Al evaluar la derivada en $P_1 y\ P_2$ obtendremos las pendientes de las rectas tangentes.

En $P_1$: $y' = \frac{4-4}{18} = 0$ luego la recta tangente a la elipse que pasa por $P_1$ es horizontal cuya ecuación es:

$L_1: y = 1.$

En $P_2$: $y' = \frac{4-4(-2)}{9(-1)+9}$ pero esto es un absurdo, ya que la recta tangente a la elipse que pasa por $P_2$ es una recta vertical cuya ecuación es: $L_2: x = -2$

Calcularemos el ángulo comprendido entre las rectas L y $L_1$, recordamos que la ecuación explícita de L es $y = \frac{1+2x}{3}$, conociendo su pendiente podemos considerar como vector director al vector: $\boldsymbol{d_L} = (3,2)$.

Como $L_1$ es una recta horizontal un vector director de la misma puede ser el versor $\boldsymbol{\breve{\imath}}$. Calculamos el ángulo entre ambos vectores directores:

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{\breve{\imath}.d_L}}{\|\boldsymbol{d_L}\|}$$

$$cos\theta = \frac{(1,0)(3,2)}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\theta \approx 33.69°$$

Procedemos de igual modo para calcular el ángulo entre las rectas L y $L_2$ ,pero ahora el vector director de $L_2$ es el versor $\boldsymbol{\breve{\jmath}}$. Entonces:

$$cos\beta = \frac{\boldsymbol{\breve{\jmath}.d_L}}{\|\boldsymbol{d_L}\|}$$

$$cos\beta = \frac{(0,1)(3,2)}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\beta \approx 56.31°$$

La *Figura* 3.84 muestra la representación gráfica de este problema.

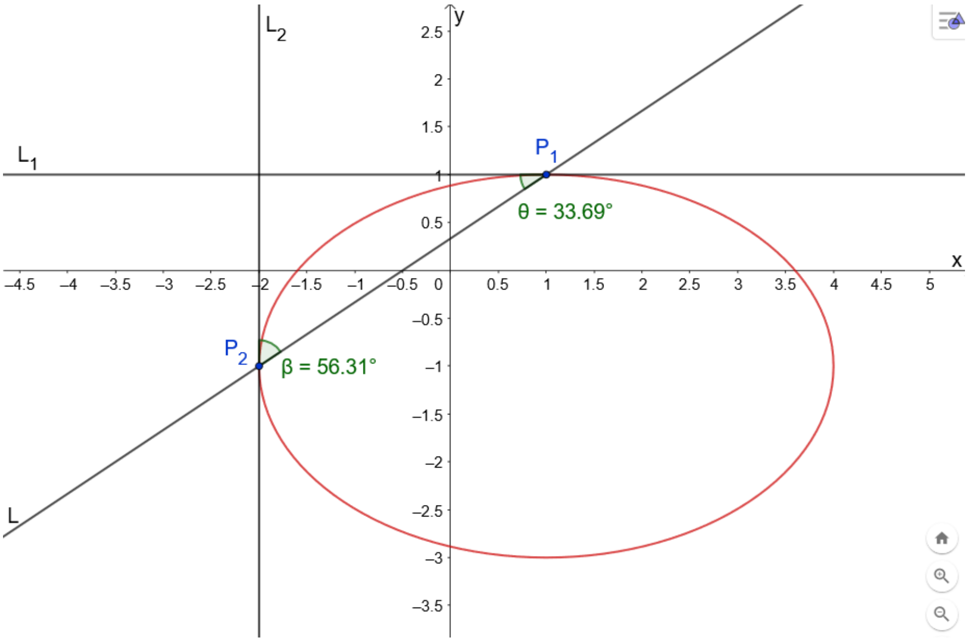



*Figura* 3.84. Representación gráfica del Ejercicio 88. [GeoGebra]

## 89.

Situamos el origen del sistema de coordenadas en el centro del arco semielíptico, con el eje x horizontal, tal como se indica en la *Figura* 3.85:

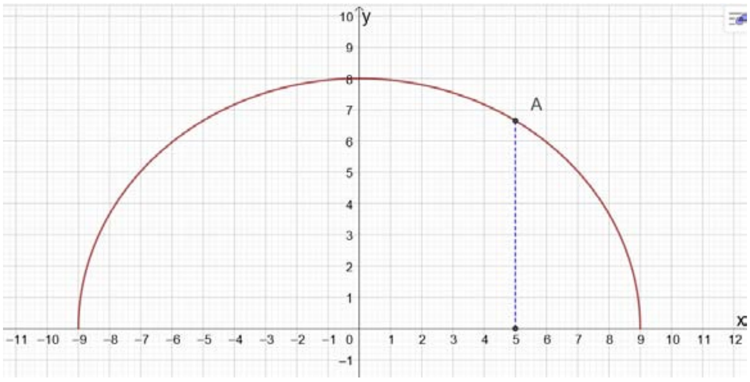



*Figura* 3.85. Representación gráfica del Ejercicio 89. [GeoGebra]

A partir de los datos del problema tenemos que

$$a = \frac{18}{2} = 9\ m$$

$$b = 8\ m$$

Luego la ecuación que describe el puente *semielíptico* es:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

A $4m$ de los extremos $x = 5$, por lo tanto reemplazamos en (I) y encontramos la altura del puente: $\frac{5^2}{9^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1$

$$y^2 = \left(1 - \frac{25}{81}\right).64$$

$$y \approx 6.65$$

Si bien la ecuación tiene dos soluciones, sólo dejamos la que cumple la condición $y \geq 0$. Por lo tanto la altura del puente a $4m$ de los extremos es de $6.65m$ aproximadamente.

## 90.

Obtenemos la ecuación de la elipse con los datos del enunciado. Como $F_1$ (-4,0) y $F_2$ (4,0) podemos determinar que el centro de la elipse es C(0,0) y $c = 4$.

Sabemos por definición de elipse que es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias a sus focos es igual a $2a$. Por lo tanto, teniendo $P_0$ (2,3) podemos calcular el valor del semieje mayor:

$$\|\boldsymbol{P_0F_1}\| + \|\boldsymbol{P_0F_2}\| = \boldsymbol{2a}$$

$$\|(-6,-3)\| + \|(2,-3)\| = 2a$$

$$\sqrt{45} + \sqrt{13} = 2a$$
$$\frac{\sqrt{45} + \sqrt{13}}{2} = a$$
$$5.16 \approx a$$

Teniendo en cuenta que el eje focal es el eje $y$ y el centro C(0, 0) tenemos $\frac{x^2}{5.16^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Sabiendo que $P_0(2,3)$ pertenece a la elipse, sabemos que satisface la ecuación anterior:

$$\frac{2^2}{5.16^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$$

Por lo tanto , $b \cong 3.25$. Hemos hallado la ecuación de la elipse con la que vamos a trabajar:

$\frac{x^2}{5.16^2} + \frac{y^2}{3.25^2} = 1$ (I)

Para encontrar las tangentes por el punto exterior Q(10,0), plantearemos un sistema de ecuaciones con la ecuación de la elipse y la ecuación de una familia de rectas que pasen por Q:

$$\begin{cases} y = m(x-10) \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Reemplazamos $y$ de la primera ecuación, luego sustituimos en la segunda:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx - 10m)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2}{b^2} - \frac{20m^2x}{b^2} + \frac{100m^2}{b^2} - 1 = 0$$
$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) x^2 - \frac{20m^2}{b^2} x + \left(\frac{100m^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

Como buscamos la recta tangente a la elipse que pasa por Q, sabemos que el sistema de ecuaciones deberá tener una única solución. Por lo tanto, el discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) de la ecuación cuadrática que anterior es nulo:

$$\left(-\frac{20m^2}{b^2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{100m^2}{b^2} - 1\right) = 0$$
$$\frac{400m^4}{b^4} - \left(\frac{4}{a^2} + \frac{4m^2}{b^2}\right)\left(\frac{100m^2}{b^2} - 1\right) = 0$$
$$\frac{400m^4}{b^4} - \left(\frac{400m^2}{a^2\,b^2} - \frac{4}{a^2} + \frac{400m^4}{b^4} - \frac{4m^2}{b^2}\right) = 0$$
$$\frac{400m^4}{b^4} - \frac{400m^2}{a^2\,b^2} + \frac{4}{a^2} - \frac{400m^4}{b^4} + \frac{4m^2}{b^2} = 0$$
$$\left(-\frac{400}{a^2\,b^2} + \frac{4}{b^2}\right) m^2 + \frac{4}{a^2} = 0$$

Si sustituímos los valores $a$ y $b$ , y resolvemos la ecuación cuadrática encontramos dos valores posibles de $m$:

$m_1 \approx 0.38 \; y \; m_2 \approx -0.38$

Hemos encontrado las pendientes de las rectas tangentes a la elipse que pasan por el punto exterior $Q(10,0)$, concluyendo que ecuaciones de las mismas son:

$\mathrm{L_1: y = -0.38(x-10)}$

$\mathrm{L_2: y = 0.38(x-10)}$

(Al trabajar con valores aproximados de $a$ y $b$, los resultados que encontramos arrastran la aproximación)

## 91.

Siguiendo el análisis desarrollado en la sección 3.*5.6 Ecuaciones paramétricas de una elipse*, del Libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*, tenemos:

$$\begin{cases} x = -1 + 4\cos\theta \\ y = 1 + 6\,sen\,\theta \end{cases} con\ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

$Verificamos$:

$$\frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{6^2} = cos^2\theta + sen^2\theta$$

$$\frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{6^2} = 1$$

## 92.

a) A partir de la ecuación de cartesiana de la hipérbola $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, sabemos que $a = 4$ y $b = 2$. A partir de la relación $c^2 = b^2 + a^2$ , determinamos el valor de $c$:

$c = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR| = \frac{2b^2}{a}$, es decir:

$$|LR| = 2 \,.\frac{4}{4} = 2$$

Para determinar las asíntotas sabemos que la pendiente de ellas será $\pm\frac{b}{a}$ , es decir $\pm\frac{1}{2}$ . Como ambas pasan por el centro de la hipérbola $C(2,-1)$ podemos determinar sus ecuaciones:

$$L_1: y + 1 = \frac{1}{2}(x-2)$$

$$L_2: y + 1 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

Con todos los datos anteriores determinamos los elementos de la cónica ($Tabla$ 3.11).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Centro** | $C(2,-1)$ | | | |
| **Eje focal** | Paralelo eje $x$ : $y=-1$ | | | |
| **Focos** | $F_1(2+\sqrt{20},-1)$ | | $F_2(2-\sqrt{20},-1)$ | |
| **Vértices** | $V_1(6,-1)$ | $V_2(-2,-1)$ | $V_3(2,1)$ | $V_4(2,-3)$ |
| **Lado recto** | $\|LR\|=2$ | | | |
| **Extremos del lado recto** | $A(2-\sqrt{20},0)$ | $A'(2-\sqrt{20},-2)$ | $B(2+\sqrt{20},0)$ | $B'(2+\sqrt{20},-2)$ |
| **Asíntotas** | $y+1=1/2(x-2)$ | | $y+1=-1/2(x-2)$ | |

*Tabla* 3.11. Elementos de la cónica del Ejercicio 92.

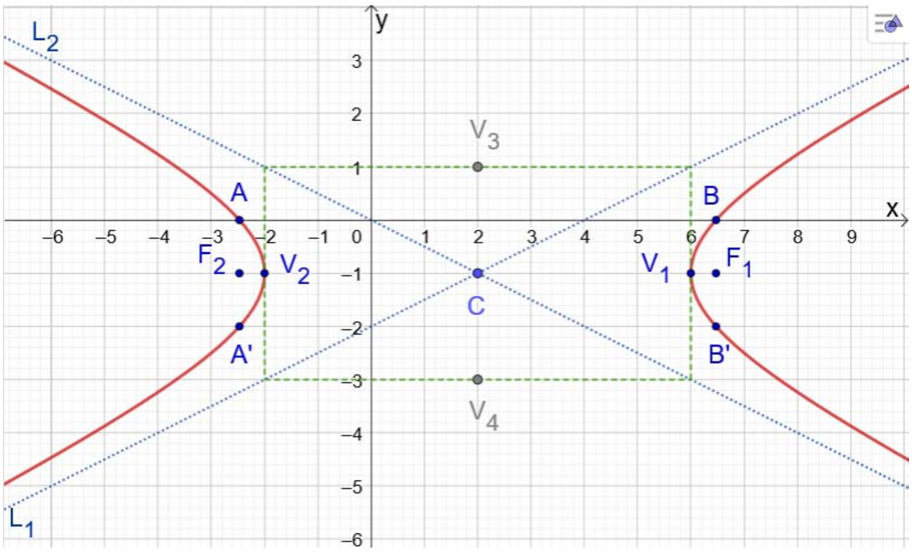



*Figura* 3.86. Representación gráfica del Ejercicio 92.a. [GeoGebra]

b) Para determinar la intersección de la hipérbola con la recta $L_1$: $y - x + 8 = 0$ planteamos un sistema de ecuaciones con ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1 \\ y - x + 8 = 0 \end{cases}$$

Para resolver el sistema despejamos la variable $y$ de la ecuación de la recta L1: $y = x - 8$ ahora reemplazamos en la ecuación de la hipérbola para hallar las soluciones del sistema:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(x-8+1)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(x-7)^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{4x}{16} + \frac{4}{16} - \frac{x^2}{4} + \frac{14x}{4} - \frac{49}{4} - 1 = 0$$

$$-\frac{3}{16}x^2+\frac{13x}{4}-13=0$$

Las soluciones aproximadas de la ecuación cuadrática son: $x_1 \approx 6.26$ y $x_2 \approx 11.07$. Por lo tanto, la recta L1 es *secante* a la cónica. Evaluamos las ordenadas de los puntos de intersección:

Si $x_1=6.26$, entonces $y_1=-1.7$ por lo tanto un punto de intersección es: $P_1(6.26;\ -1.74)$

Si $x_2=11.07$, entonces $y_2=3.07$ por lo tanto un punto de intersección es: $P_2(11.07;\ 3.07)$.

Ahora procedemos de igual modo para calcular los puntos de intersección de la hipérbola con la recta L2: $2y-x+4=0$. Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{(y+1)^2}{4}=1\\ 2y-x+4=0\end{cases}$$

Para resolver el sistema despejamos la variable $y$ de la ecuación de la recta L2: $y=\frac{x}{2}-2$ y reemplazamos en la ecuación de la hipérbola para hallar las soluciones del sistema:

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{4x}{16}+\frac{4}{16}-\frac{x^2}{16}+\frac{1x}{4}-1-1=0$$

$$-\frac{7}{4}=0$$

Hemos obtenido un absurdo y esto nos indica que no existen puntos de intersección entre la recta L2 y la cónica.

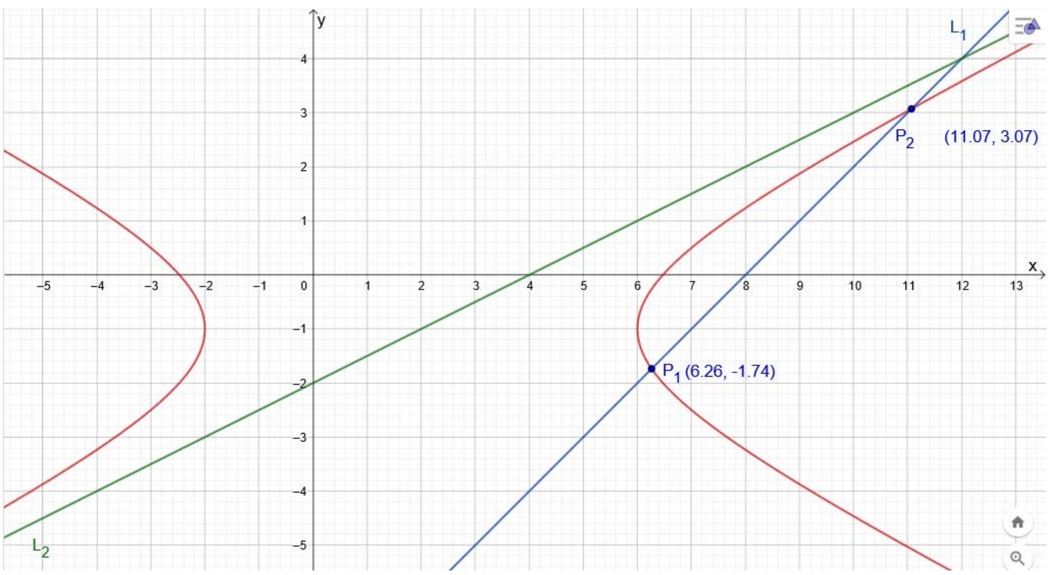



*Figura* 3.87. Representación gráfica del Ejercicio 92.b. [GeoGebra]

## 93.

a) A partir de la ecuación general de la hipérbola, asociamos términos de iguales variables:
$(9x^2 - 18x) + (-4y^2 - 16y) + 29 = 0$
Extraemos como factor común el coeficiente principal de cada binomio:
$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) + 29 = 0$
Completamos cuadrados dentro de cada paréntesis:
$9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 4(y^2 + 4y + 4 - 4) + 29 = 0$
Aplicamos propiedad distributiva del producto respecto la suma y asociamos los términos independientes:
$9(x^2 - 2x + 1) - 9 - 4(y^2 + 4y + 4) + 16 + 29 = 0$
$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 + 36 = 0$
Expresamos cada trinomio cuadrado perfecto como su binomio correspondiente:
$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = -36$
Dividimos toda la expresión por el término independiente y obtenemos la ecuación cartesiana de la cónica: $-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$
A partir de la ecuación de cartesiana de la elipse, sabemos que $a = 3$ y $b = 2$, sabiendo que $c^2 = b^2 + a^2$ determinamos el valor de c:
$c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR| = \frac{2b^2}{a}$, es decir: $|LR| = 2\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$
Para determinar las asíntotas sabemos que la pendiente de ellas será $\pm\frac{a}{b}$, es decir $\pm\frac{3}{2}$ como ambas pasan por el centro de la hipérbola $C(1,-2)$ podemos determinar sus ecuaciones:
$L_1: y + 2 = 3/2(x-1)$
$L_2: y + 2 = -3/2(x-1)$
Determinamos los elementos de la cónica indicados en la *Tabla* 3.12.:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Centro** | $C(1,-2)$ | | | |
| **Eje focal** | Coincidente con el eje $y$ | | | |
| **Focos** | $F_1(1,-2+\sqrt{13})$ | | $F_2(1,-2-\sqrt{13})$ | |
| **Vértices** | $V_1(1,1)$ | $V_2(1,-5)$ | $V_3(-1,-2)$ | $V_4(3,-2)$ |
| **Lado recto** | $\|LR\| = 8/3$ | | | |
| **Extremos del lado recto** | $A(\frac{7}{3},-2+\sqrt{13})$ | $A'(-1/3,-2+\sqrt{13})$ | $B(\frac{7}{3},-2-\sqrt{13})$ | $B'(-\frac{1}{3},-2-\sqrt{13})$ |
| **Asíntotas** | $y+2 = 3/2(x-1)$ | | $y+2 = -3/2(x-1)$ | |

*Tabla* 3.12. Elementos de la cónica del Ejercicio 93.

b) Determinaremos los puntos dónde la hipérbola interseca el eje $y$, tomando a $x = 0$:

$-4y^2 - 16y + 29 = 0$

Las soluciones aproximadas de la ecuación cuadrática son: $y_1 \approx -5.35$ y $y_2 \approx 1.35$. Entonces los puntos de intersección son: $P_1(0, -5.35)$ y $P_2(0, 1.35)$. Para determinar las rectas tangentes a la cónica en $P_1$ y $P_2$, derivamos implícitamente la ecuación de la hipérbola y calculamos las pendientes de las rectas tangentes en dichos puntos: $18x - 18 - 8y\,y' - 16y' = 0$

$$y` = \frac{-18x + 18}{-8y - 16}$$

En el punto $P_1(0, -5.35)$ obtenemos que $y' = \frac{45}{67}$, por lo tanto la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en $P_1$ *es* $T_1: y = \frac{45}{67}x - 5.35$ . En el punto $P_2(0, 1.35)$ obtenemos que $y' = -\frac{45}{67}$, por lo tanto la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en dicho punto es $T_2: y = \frac{45}{67}x + 1.35$ . Conociendo las pendientes de las rectas tangentes podemos determinar vectores directores de ambas rectas $\boldsymbol{d_1} = (67, 45)$ y $\boldsymbol{d_2} = (-67, 45)$ correspondientes a las rectas $\boldsymbol{T_1}$ y $\boldsymbol{T_2}$ respectivamente. Ahora determinamos el ángulo comprendido entre ellas:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{d_1}.\boldsymbol{d_2}}{\|\boldsymbol{d_1}\|\|\boldsymbol{d_2}\|}$$

$$\cos\theta = \frac{(67, 45).(-67, 45)}{6514} = \frac{-4489 + 2025}{6514} = -\frac{2464}{6514}$$

$\theta \approx 112.29°$

c)

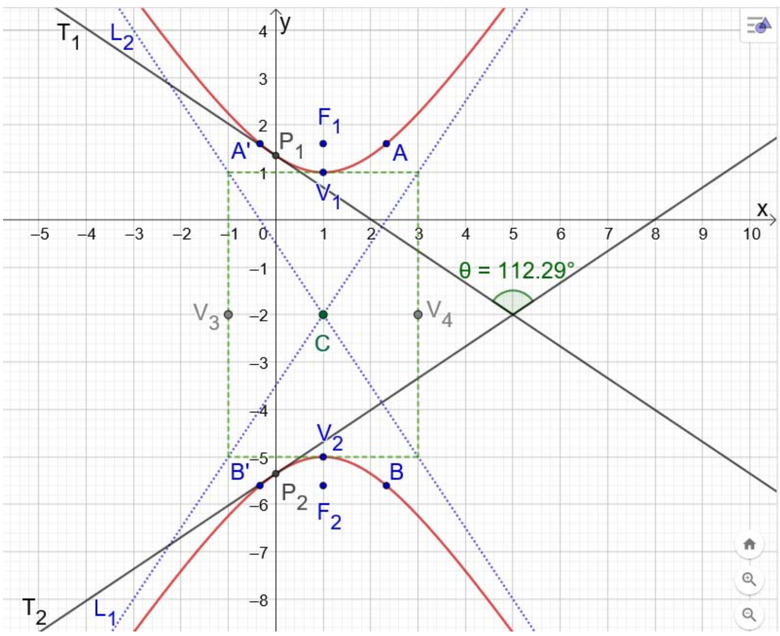



*Figura* 3.88. Representación gráfica del Ejercicio 93. [GeoGebra]

## 94.

Siguiendo el análisis desarrollado en la sección *Ecuaciones paramétricas de la hipérbola*, del Libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*, tenemos:

$$\begin{cases} x = 2\,\mathrm{tg}(\theta) \\ y = 1 + 5\,sec\,(\theta) \end{cases} \quad con\ \theta\ \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) U \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

$Verificamos:$

$$\frac{(y-1)^2}{5^2} - \frac{x^2}{2^2} = sec^2\theta - tg^2\theta$$

$$\frac{(y-1)^2}{5^2} - \frac{x^2}{2^2} = \frac{1}{cos^2\theta} - \frac{sen^2\theta}{cos^2\theta}$$

$$\frac{(y-1)^2}{5^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$$

## 95.

Consideramos que los vértices dados son los vértices reales, entonces determinamos el semieje real de las hipérbolas como la semidistancia entre los vértices:

$$\boldsymbol{OV_1} = (1, 1)$$

$$\boldsymbol{OV_2} = (1, 5)$$

$$a = \frac{\|\boldsymbol{V_1V_2}\|}{2} = \frac{\|\boldsymbol{OV_2} - \boldsymbol{OV_1}\|}{2} = 2$$

El centro de las hipérbolas se encuentra en el punto medio entre $V_1(1,1)$ y $V_2(1,5)$, entonces es $C(1,3)$, además el eje focal es paralelo al eje $y$.

A partir de la relación pitagórica ($c^2 = b^2 + a^2$), tenemos que $c^2 - 4 = b^2$. Por lo tanto la familia de hipérbolas queda expresada por la siguiente ecuación:

$$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{c^2-4} = 1 \quad , \qquad c > 2$$

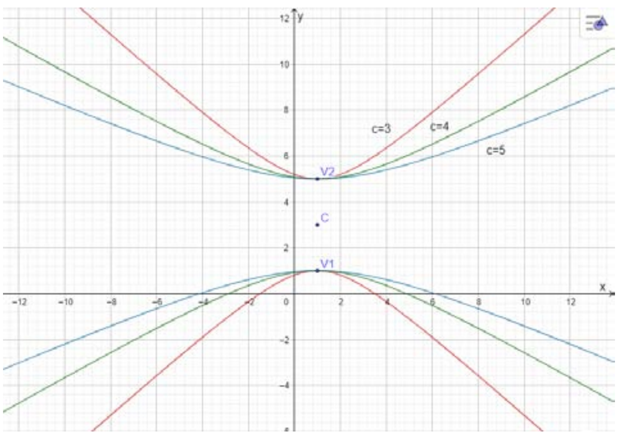



*Figura* 3.89. Representación gráfica del Ejercicio 94. [GeoGebra]

# 3.9. SUPERFICIES

## 96.

a) La superficie esférica buscada responde a la siguiente ecuación cartesiana:

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2 \qquad [96.1]$$

Las coordenadas del centro $C$(3, 0, 4), permiten obtener los valores $h$=3, $k$=0, $l$=4, los cuales se reemplazan en la ecuación [96.1] para obtener:

$$(x-3)^2+(y-0)^2+(z-4)^2=r^2 \qquad [96.2]$$

El radio de la superficie esférica debe ser hallado a partir de la utilización de un punto conocido de la misma. En este caso, a partir de la lectura de los datos del problema sabemos que el origen de coordenadas es un punto de la superficie buscada, por lo cual sus coordenadas deben satisfacer la ecuación [96.2].

$$(0-3)^2+(0-0)^2+(0-4)^2=r^2 \qquad [96.3]$$

$$9+16=r^2 \qquad [96.4]$$

$$r=5 \qquad [96.5]$$

Con lo cual la superficie esférica buscada responde a la siguiente ecuación:

$$(x-3)^2+y^2+(z-4)^2=25 \qquad [96.6]$$

b) En primer lugar, verificamos que el punto Q pertenezca a la esfera, sustituyendo sus coordenadas en la ecuación [96.6]:

$$(8-3)^2+0^2+(4-4)^2=25$$

El plano tangente a una esfera en un punto de la misma, tal como el punto Q, posee un vector normal cuya dirección coincide con la dirección de un vector con origen en el centro de la esfera y extremo en el punto de tangencia. Por esto, para el punto de tangencia dado $Q$(8, 0, 4), tendremos:

$$\boldsymbol{n_\pi}=\boldsymbol{CQ}=(8-3,0-0,4-4)=(5,0,0) \qquad [96.7]$$

A partir de dicho vector normal, es posible escribir la ecuación general del plano buscado y reemplazar luego el punto conocido, que en este caso coincide con el punto de tangencia, a los efectos de hallar el coeficiente D. Es decir:

$$Ax+By+Cz+D=0 \text{ queda:} \qquad 5x+D=0 \qquad [96.8]$$

$$5.8+D=0 \qquad [96.9]$$

$$D=-40 \qquad [96.10]$$

Con lo cual la ecuación del plano tangente buscado es:

$$x-8=0 \qquad [96.11]$$

La *Figura* 3.90 muestra dos vistas de la representación gráfica de la superficie esférica y del plano tangente hallados.

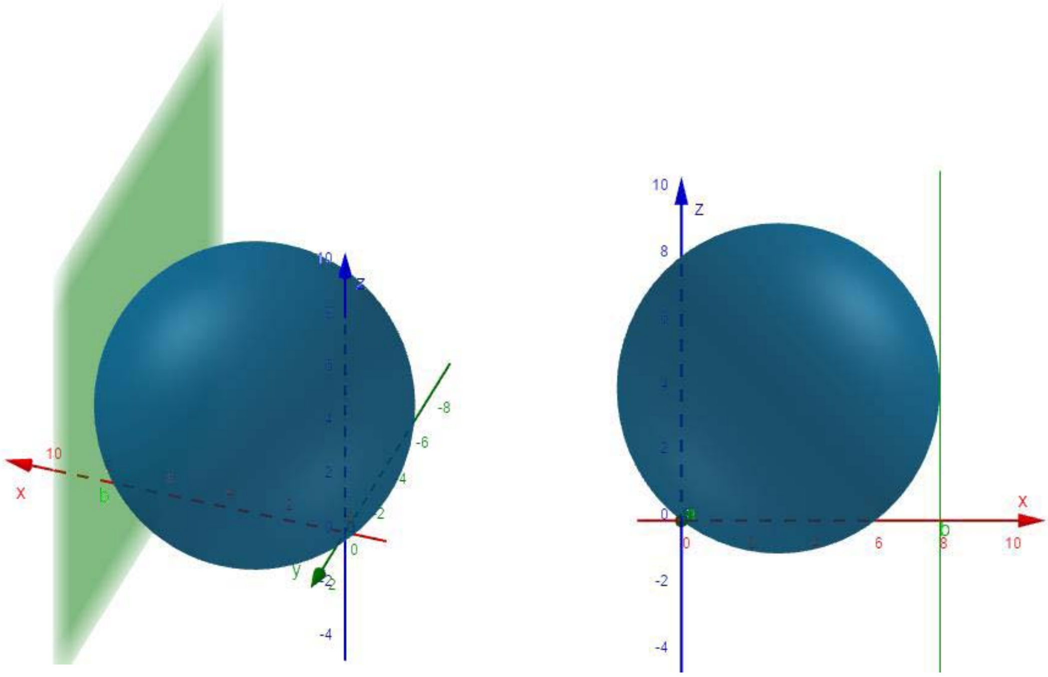


*Figura* 3.90. Superficie esférica y plano tangente

## 97.

a) Obtenemos la intersección entre ambas superficies (superficie esférica y plano), analizando la solución del sistema de ecuaciones que comprende las ecuaciones de ambos lugares geométricos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \quad [97.1]$$

Despejamos la variable z de la segunda ecuación, $\boldsymbol{z} = -x + 2$ , y reemplazamos dicha expresión en la primera ecuación:

$$x^2 + y^2 + (-x + 2)^2 = 4 \quad [97.2]$$

$$x^2 + y^2 + x^2 - 4x + 4 = 4 \quad [97.3]$$

$$2x^2 + y^2 - 4x = 0 \quad [97.4]$$

Llevamos la ecuación a la forma cartesiana para identificar sus elementos:

$$2(x^2 - 2x + 1 - 1) + y^2 = 0 \quad [97.5]$$

$$2(x-1)^2 - 2 + y^2 = 0 \quad [97.6]$$

$$2(x-1)^2 + y^2 = 2 \quad [97.7]$$

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \quad [97.8]$$

Observamos que la expresión corresponde a un cilindro elíptico cuya intersección con el plano dado es la misma curva de intersección entre la esfera y el plano. Las coordenadas en $x$ e $y$ del centro ($h$ y $k$) de dicha curva se obtienen por observación de la ecuación: $h$=1 y $k$=0. Teniendo en cuenta que la curva intersección buscada está contenida en el plano $x + z - 2 = 0$, la coordenada en $z$ del centro ($l$) se obtiene de la expresión $z = -x + 2$, dando a la variable $x$ el valor $h = 1$. Las coordenadas del centro son: C(1,0,1).

Ahora podemos parametrizar a la curva solución, obteniendo expresiones para $x$, $y$ y $z$ en función de un parámetro. Para las variables $x$ e $y$, utilizamos la parametrización ya estudiada en términos del parámetro $\theta$. Para parametrizar la componente en $z$, usamos la expresión $z = -x + 2$, ya que la curva está contenida en dicho plano. En esta expresión para la variable $z$ reemplazamos la expresión parametrizada de $x$. Es decir:

$$\begin{cases} x = cos\theta \ + 1 \\ y = \sqrt{2} sen\theta \\ z = 1 - cos\theta \end{cases} \quad ; \ \theta \epsilon [0,2\pi) \quad [97.9]$$

Por último, llevamos las ecuaciones cartesianas paramétricas a la forma vectorial paramétrica:

$$(x, y, z) = \left( cos\theta \ + 1 \ , \sqrt{2} sen\theta \, , 1 - cos\theta \right) ; \ \theta \epsilon [0,2\pi) \quad [97.10]$$

$$(x, y, z) = (\ 1,0,1) + (cos\theta \, , \sqrt{2} sen\theta \ , - cos\theta \ ) \ ; \theta \epsilon [0,2\pi) \quad [97.11]$$

La Figura 97.1 muestra la superficie esférica y el plano analizados, junto con el lugar geométrico formado por la intersección de ambos.

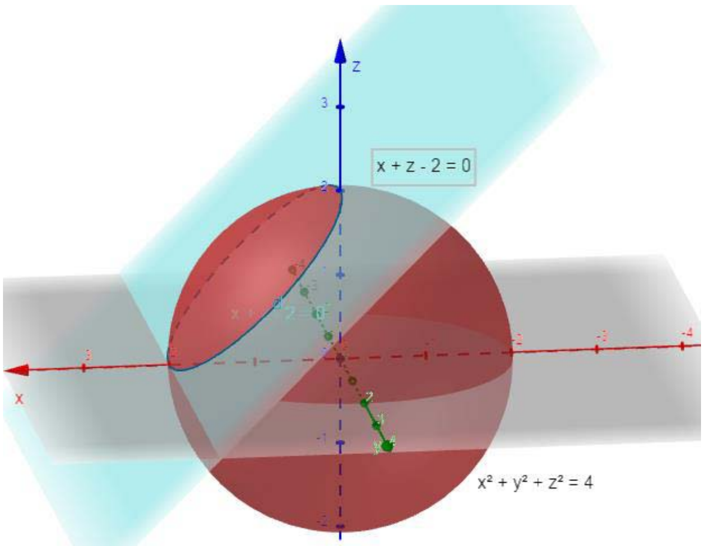



*Figura* 3.91. Lugar geométrico obtenido como intersección de la superficie esférica y el plano dados.

Identificación del lugar geométrico resultante:

Calculamos el módulo del vector que va del centro de la curva a un punto cualquiera de la misma: siendo $C(\ 1{,}0{,}1)$ y $P\big(cos\theta\ +1\ ,\sqrt{2}sen\theta\ ,\ -cos\theta+1\big)$ ; con $\theta\epsilon[0{,}2\pi)$, resulta:

$$\|\boldsymbol{CP}\|^2 = (cos\theta\ +1-1)^2 + \left(\left(\sqrt{2}sen\theta\right)^2\right) + (-cos\theta+1-1)^2 = 2 \qquad [97.12]$$

La distancia del centro a cualquier punto de la curva es constante, por lo tanto se trata de una circunferencia de centro $C(\ 1{,}0{,}1)$ y radio $\sqrt{2}$.

b) Existen infinitas superficies cilíndricas que intersecan al casquete esférico en la curva encontrada. Sin embargo, podemos encontrar sin dificultad un *cilindro elíptico recto*, paralelo al eje $z$, cuya ecuación está dada por:

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \qquad [97.13]$$

En esta ecuación, la variable $z$ es libre, por lo tanto, la superficie es paralela al eje z. La Figura 97.2 muestra el cilindro mencionado.

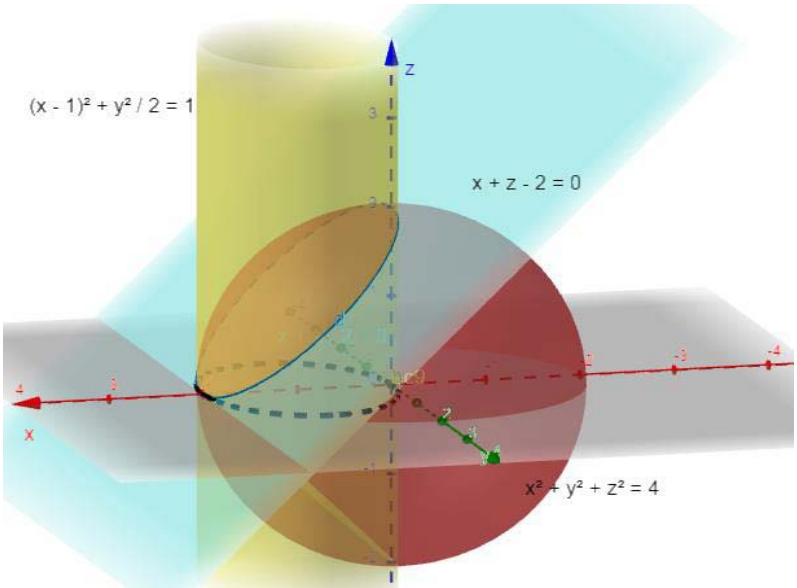



*Figura* 3.92. Cilindro elíptico recto hallado. [GeoGebra]

*<u>Observación</u>*:

La diferencia que existe entre la ecuación del cilindro elíptico y la ecuación de la curva, es que para la segunda tenemos la restricción $z=-x+2$. Es decir, la expresión para la curva es:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1 \\ z = -x+2 \end{cases} \qquad [97.14]$$

c) La proyección de la curva sobre el plano $xy$, resulta de la intersección del cilindro elíptico recto con dicho plano $z$=0. Es decir:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad [97.15]$$

La ecuación vectorial paramétrica es:

$$(x, y, z) = (1{,}0{,}0) + (cos\theta\ , \sqrt{2}sen\theta\ ,0\ )\ \ ; \theta\epsilon[0{,}2\pi) \qquad [97.16]$$

La Figura 3.93 muestra detalles de las superficies y curvas analizadas.

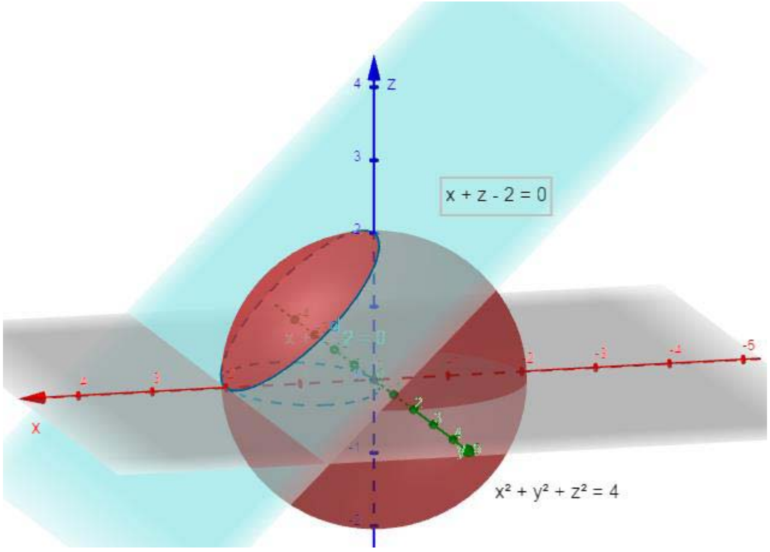



*Figura* 3.93. Curva intersección entre la superficie esférica y el plano dado. Proyección de dicha curva sobre el plano $xy$. [GeoGebra]

Para una mejor visualización de la curva proyectada, la *Figura* 3.94, muestra el problema estudiado ocultando la superficie esférica.

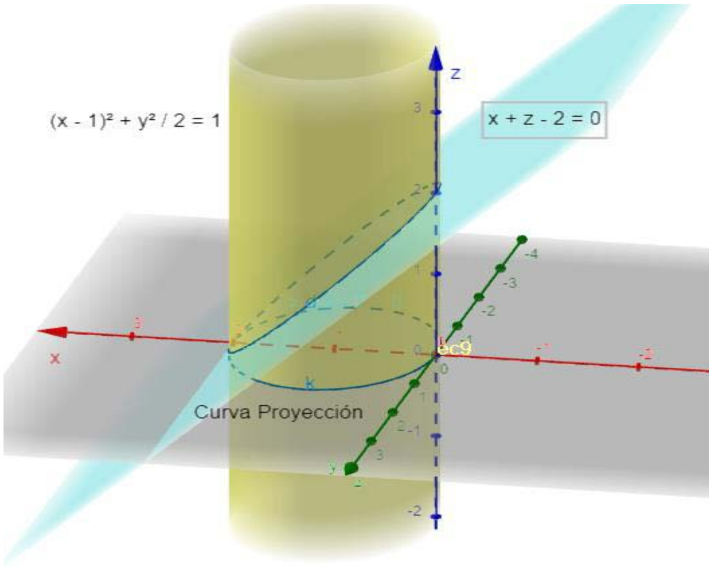



*Figura* 3.94. Detalle del cilindro elíptico recto hallado y su intersección con el plano dado, junto con la curva proyección sobre el plano $xy$. [GeoGebra]

# 98.

A partir de los datos del problema es posible escribir la ecuación de la curva directriz de la superficie cónica:

$$D:\begin{cases} 9y^2+4z^2=36 \\ x=0 \end{cases} \qquad [98.1]$$

Considerando el vértice (12, 0, 0), y un punto $P$' ubicado por definición en la intersección de la generatriz y la directriz, las ecuaciones simétricas de la recta generatriz responden a la siguiente expresión:

$$\frac{x-12}{x'-12}=\frac{y}{y\prime}=\frac{z}{z\prime} \qquad [98.2]$$

El punto $P$' debe satisfacer la ecuación [98.1] de la directriz, por lo cual tendremos:

$$D:\begin{cases} 9y'^2+4z'^2=36 \\ x'=0 \end{cases} \qquad [98.3]$$

Sustituyendo la segunda ecuación [98.3] ($\boldsymbol{x'}$=0) en la ecuación [98.2] se obtiene:

$$\frac{x-12}{-12}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'} \qquad [98.4]$$

A partir de la expresión [98.4] es posible obtener dos expresiones para $y$' y $z$':

$$y'=\frac{-12y}{x-12} \qquad [98.5]$$

$$z'=\frac{-12z}{x-12} \qquad [98.6]$$

Sustituyendo las ecuaciones [98.5] y [98.6] en la ecuación [98.3], se obtiene:

$$9\left(\frac{-12y}{x-12}\right)^2+4\left(\frac{-12z}{x-12}\right)^2=36 \qquad [98.7]$$

Desarrollando esta expresión, se obtiene la ecuación general de la superficie buscada:

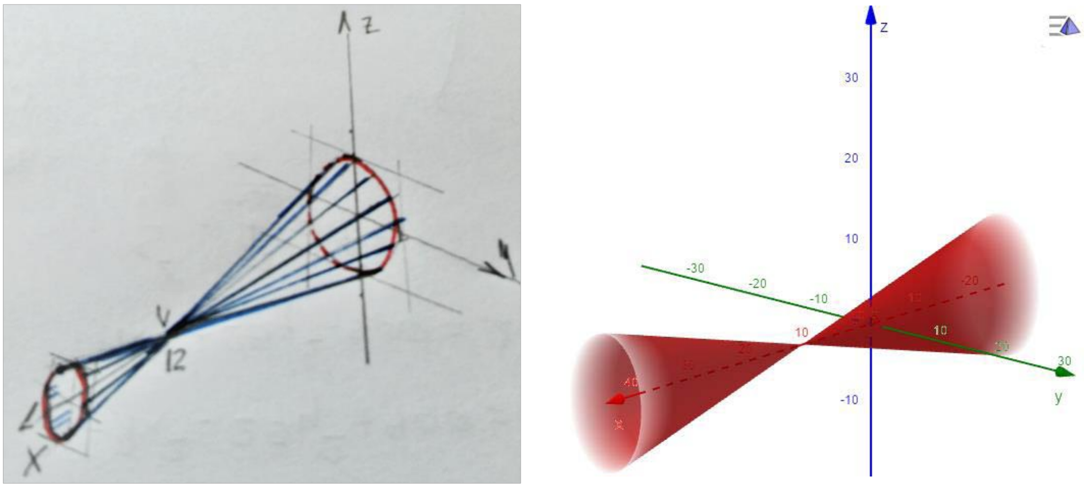
$$1296y^2+576z^2=36(x-12)^2=36x^2-864x+5184 \qquad [98.8]$$

$$36x^2-1296y^2-576z^2-864x+5184=0 \qquad [98.9]$$

$$x^2-36y^2-16z^2-24x+144=0 \qquad [98.10]$$

El eje de una superficie cónica es la recta que pasa por el centro de la curva directriz y el vértice de la superficie. En la ecuación [98.10] no figuran términos de producto cruzado ya que la superficie tiene por eje al eje $x$, es decir la superficie no está rotada respecto de los ejes coordenados. La ecuación de la superficie cónica, contiene un término lineal en $x$ asociado a la posición del vértice de la misma, que en este caso no coincide con el origen de coordenadas.

La *Figura* 3.95 (a), muestra un gráfico cualitativo de la superficie cónica hallada, mientras que la *Figura* 3.95 (b), una representación computacional desarrollada a partir del uso del programa *Geogebra*.




(a) (b)

*Figura* 3.95. (a) Representación cualitativa y (b) computacional de la superficie cónica hallada.

## 99.

A partir de los datos del problema, es posible escribir la ecuación de la curva directriz de la superficie cilíndrica:

$$D:\begin{cases}(x-1)^2+(z-1)^2=16\\ y=0\end{cases} \qquad [99.1]$$

Considerando el vector $v$=(2, 1, 3), y un punto *P*’ ubicado en la intersección de la recta generatriz y la curva directriz, las ecuaciones simétricas de la recta generatriz resultan:

$$\frac{x-x'}{2}=\frac{y-y'}{1}=\frac{z-z'}{3} \qquad [99.2]$$

El punto *P*’ debe satisfacer la ecuación de la directriz, por lo cual tendremos:

$$D:\begin{cases}(x'-1)^2+(z'-1)^2=16\\ y'=0\end{cases} \qquad [99.3]$$

Sustituyendo la segunda ecuación [99.3] ($y'=0$) en [99.2] se obtiene:

$$\frac{x-x'}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-z'}{3} \qquad [99.4]$$

A partir de la expresión [99.4] es posible obtener dos expresiones para *x*’ y *z*’:

$$x'=x-2y \qquad [99.5]$$

$$z'=z-3y \qquad [99.6]$$

Sustituyendo [99.5] y [99.6] en la ecuación [99.3], se obtiene:

$$(x-2y-1)^2+(z-3y-1)^2=16 \qquad [99.7]$$

Desarrollando adecuadamente la expresión [99.7] se obtiene la ecuación general de la superficie buscada:

$$x^2+4y^2+1-4xy-2x+4y+z^2+9y^2+1-6yz-2z+6y-16=0 \qquad [99.8]$$

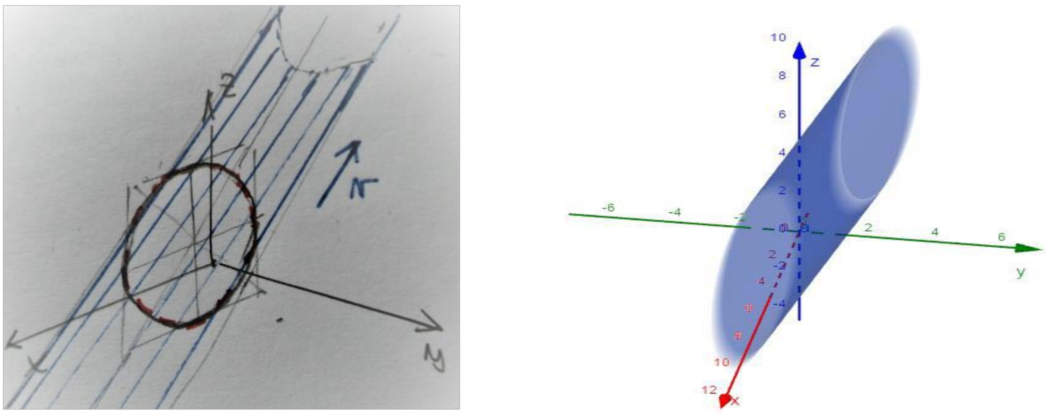
$$x^2+13y^2+z^2-4xy-6yz-2x+10y-2z-14=0 \qquad [99.9]$$

La presencia de los términos rectangulares (-4$xy$; -6$yz$) se debe a que la superficie está rotada respecto de los ejes coordenados.

Esto es así ya que el vector $\boldsymbol{v}$ paralelo a las generatrices, no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados.

La presencia de términos lineales está asociada al desplazamiento del centro de la curva directriz respecto del origen de coordenadas.

La Figura 3.96 (a) muestra un gráfico cualitativo de la superficie y la *Figura* 3.96 (b) una representación computacional a partir del uso del programa Geogebra.



(a) (b)

*Figura* 3.96. (a) Representación cualitativa y (b) computacional de la superficie cónica hallada.

# 100.

A partir de la lectura del problema, es posible interpretar que la cubierta del estadio constituye una superficie de revolución. En primer lugar, es necesario definir la ecuación de la curva generatriz de la superficie. Para ello se selecciona un sistema de referencia cartesiano tridimensional ubicado de tal manera que el eje $z$ constituya el eje de revolución de la misma.

En dichas condiciones, la ecuación de la generatriz parabólica tendrá la forma:

$$y^2=2p(z-l); \quad y\in[-50,50] \qquad [100.1]$$

Siendo en este caso: $l$=40m la altura en el centro del estadio.

$$y^2 = 2p(z-40); \;\; y \in [-50, 50] \qquad [100.2]$$

A los efectos de hallar el valor del parámetro geométrico de la generatriz, reemplazamos en la ecuación [100.2], las coordenadas de un punto conocido, por ejemplo Q(0, 50, 0).

$$50^2 = 2p(0-40) \qquad [100.3]$$

$$p = -31{,}25 \qquad [100.4]$$

Con lo cual la ecuación de la curva generatriz resulta:

$$\begin{cases} y^2 = -62.50(z-40); \;\; y \in [-50, 50] \\ x = 0 \end{cases} \qquad [100.5]$$

A los efectos de hallar la superficie de revolución definida por la generatriz parabólica hallada y el eje de revolución $z$, es necesario realizar el reemplazo de la variable $y$ (variable que no corresponde al eje de revolución ni a la variable nula en la ecuación de la generatriz), por la expresión: $\sqrt{x^2+y^2}$.

De esta manera, reemplazando y luego desarrollando la expresión hallada:

$$(\sqrt{x^2+y^2})^2 = -62.50(z-40) \qquad [100.6]$$

$$x^2 + y^2 + 62.5z - 2500 = 0 \qquad [100.7]$$

$$\frac{x^2}{62.5} + \frac{y^2}{62.5} = -(z-40) \qquad [100.8]$$

Las ecuaciones [100.7] y [100.8] corresponden a la ecuación general y cartesiana respectivamente de un paraboloide elíptico de revolución, con vértice no coincidente con el origen de coordenadas y cuyo eje de revolución es el eje $z$.

La *Figura* 3.97 muestra una representación de la superficie de revolución hallada.

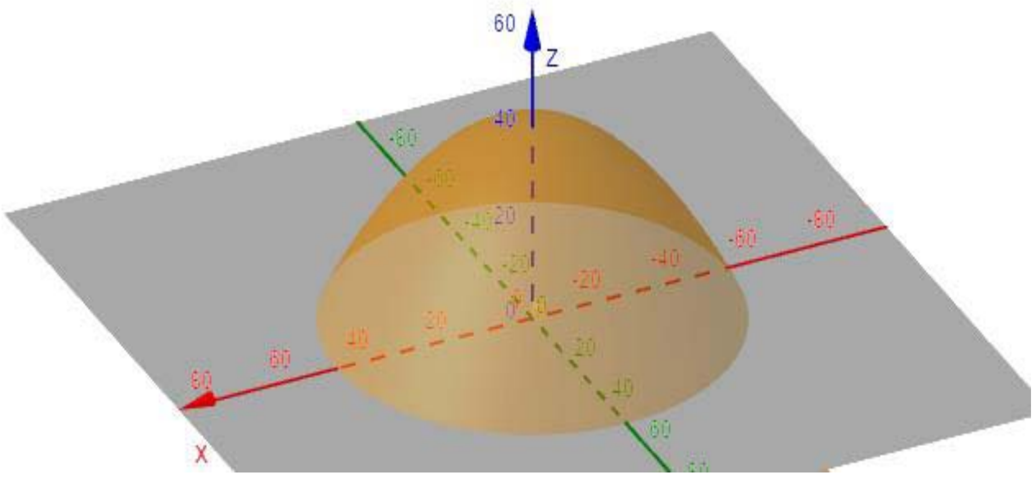



*Figura* 3.97. Superficie de revolución. Cubierta del Estadio. [GeoGebra]

## 101.

a) Analizaremos en primer lugar indicando el procedimiento completo para el caso i) y luego plantearemos las soluciones para todos los casos del ejercicio 101 en una Tabla.

Caso $i$) paraboloide hiperbólico dado por la ecuación $x^2 - y^2 - 6z = 0$.

1º) Intersecciones con los ejes

- Intersección con el eje $x$ ($y$=$z$=0)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \quad \rightarrow x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad [101.1]$$

La intersección con el eje $x$ es el origen O(0,0,0)

- Intersección con el eje $y$ ($x$=$z$=0)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \quad \rightarrow y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad [101.2]$$

La intersección con el eje $y$ es el origen O(0,0,0)

- Intersección con el eje $z$ ($y$=$x$=0)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \quad \rightarrow z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad [101.3]$$

La intersección con el eje $z$ es el origen O(0,0,0)

2º) Trazas

- Traza en el plano $xy$ $(z = 0)$ :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}} \qquad [101.4]$$

La traza en el plano $xy$ es un par de rectas.

- Traza en el plano $xz$ $(y = 0)$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6z = 0 \Rightarrow x^2 = 6z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x^2 = 6z \\ y = 0 \end{cases}} \qquad [101.5]$$

La traza en el plano $xz$ es una parábola con vértice en el origen, eje focal sobre el eje $z$ y el parámetro $p > 0$.

- Traza en el plano $yz$ $(x = 0)$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow -y^2 - 6z = 0 \Rightarrow y^2 = -6z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y^2 = -6z \\ x = 0 \end{cases}} \qquad [101.6]$$

La traza en el plano $yz$ es una parábola con vértice en el origen, eje focal sobre el eje $z$ y el parámetro $p < 0$.

3º) Intersección con planos paralelos a los coordenados

- Intersección con planos paralelos al plano $xy$ $(z = k)$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \\ z = k \end{cases} \Rightarrow x^2 - y^2 = 6k \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x^2 - y^2 = 6k \\ z = k \end{cases}} \qquad [101.7]$$

Para analizar la ecuación resultante, debemos tener en cuenta que el miembro de la derecha de la igualdad puede ser positivo, negativo o nulo, según cómo varía el parámetro $k$.

- Si $k > 0$ obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas (contenidas en distintos planos, según $z = k$), todas centradas respecto del eje $z$ y con eje focal paralelo al eje $x$.
- Si $k < 0$ obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas (contenidas en distintos planos, según $z = k$), todas centradas respecto del eje $z$ y con eje focal paralelo al eje $y$.
- Si $k$=0 es el caso analizado en la traza del plano $xy$.
- La *Figura* 3.98 muestra los lugares geométricos mencionados.

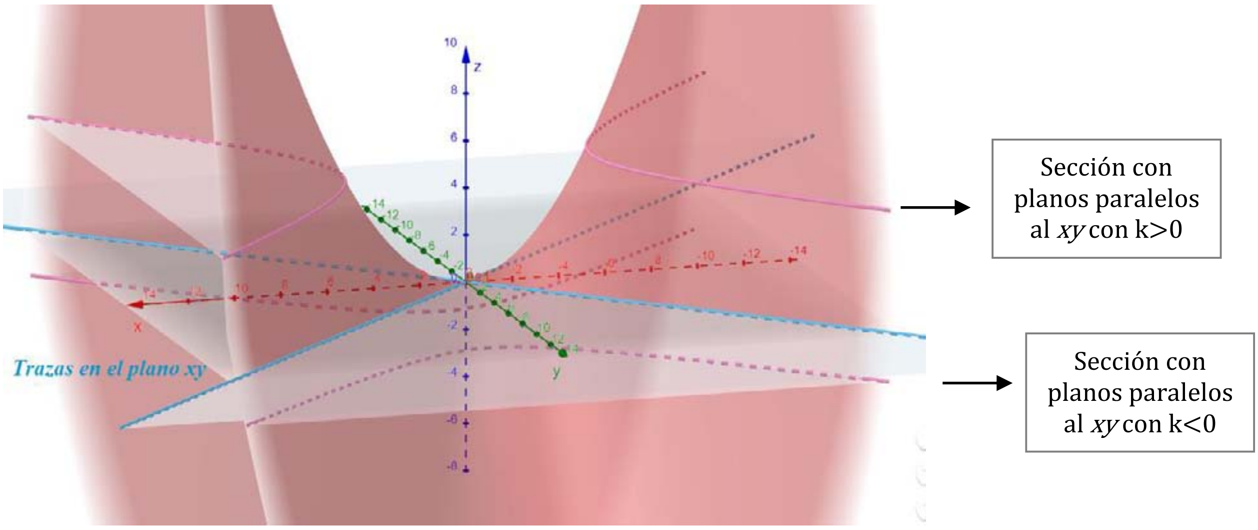



*Figura* 3.98. [GeoGebra]

- Intersección con planos paralelos al plano $yz$ $(x = k)$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow k^2 - y^2 = 6z \Rightarrow y^2 = -6z + k^2 \Rightarrow y^2 = -6(z - \frac{k^2}{6}) \qquad [101.8]$$

Las secciones con planos paralelos al plano $yz$ es una familia de parábolas con eje focal paralelo al eje $z$ y el parámetro geométrico $p$ negativo, independientemente del valor que tome $k \in R$. El vértice de cada parábola está dado por $(0,0,\frac{k^2}{6})$. La *Figura* 3.99 muestra la familia de parábolas descripta.

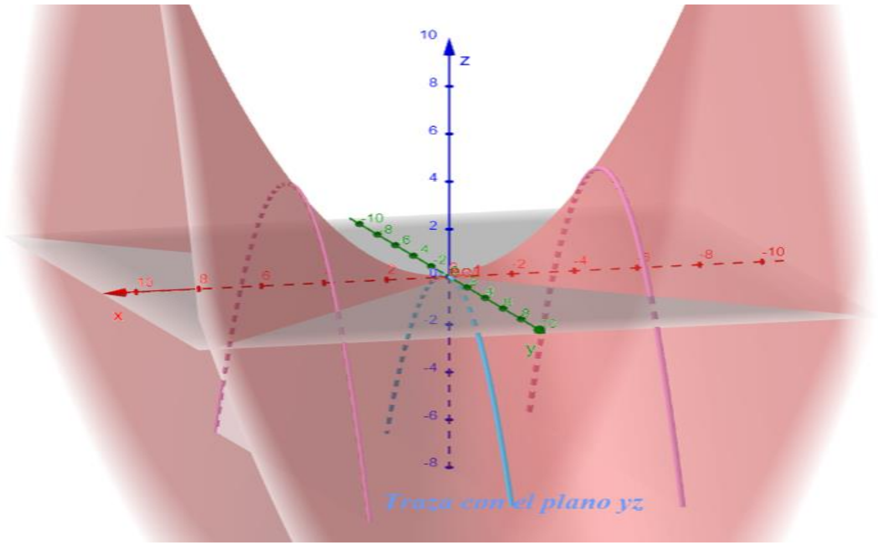



*Figura* 3.99. [GeoGebra]

- Intersección con planos paralelos al plano $xz$ $(y = k)$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \\ y = k \end{cases} \Longrightarrow x^2 - k^2 = 6z \Longrightarrow x^2 = 6z + k^2 \Longrightarrow x^2 = 6\left(z + \frac{k^2}{6}\right) \qquad [101.9]$$

Las secciones con planos paralelos al plano $xz$ es una familia de parábolas con eje focal paralelo al eje $z$ y el parámetro geométrico $p$ es positivo, independientemente del valor que tome $k \in R$. El vértice de cada parábola está dado por $(0,0,-\frac{k^2}{6})$. La *Figura* 3.100 muestra la familia de parábolas descripta.

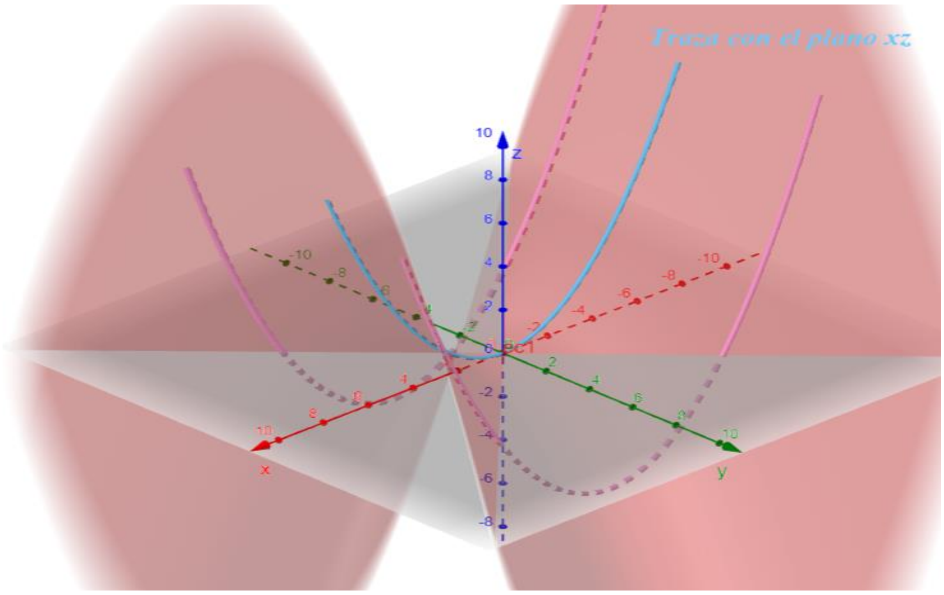



*Figura* 3.100. [GeoGebra]

c) Análisis de simetría para la superficie en estudio: $x^2 - y^2 - 6z = 0$

| Simetría con respecto a los ejes coordenados. | | Simetría con respecto a los planos coordenados. | | Simetría con respecto al origen de coordenadas. | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Eje x* | *No (ya que al sustituir z por −z la ecuación cambia)* | *Plano xz* | *Si* | *O(0, 0, 0)* | *No (ya que al sustituir z por −z la ecuación cambia)* |
| *Eje y* | *No (ya que al sustituir z por −z la ecuación cambia)* | *Plano yz* | *Si* | | |
| *Eje z* | *Si* | *Plano xy* | *No (ya que al sustituir z por −z la ecuación cambia)* | | |

*Tabla* 3.12. Análisis de las superficies del Ejercicio 101.

La superficie es un *paraboloide hiperbólico*. Es una superficie cuádrica sin centro de simetría, tal como puede observarse en la Figura 3.101.

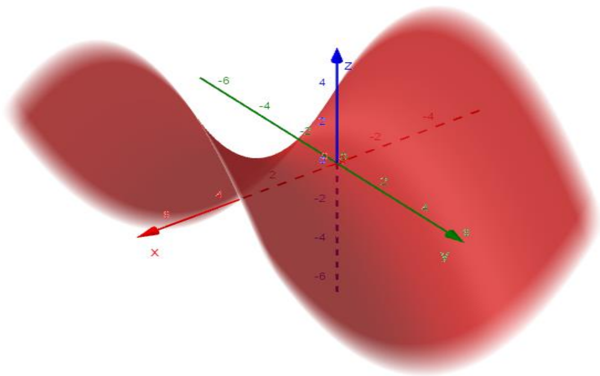


*Figura* 3.101. Paraboloide hiperbólico analizado. [GeoGebra]

A continuación, en la siguiente *Tabla* 3.13 se sintetizan las *intersecciones* con los ejes coordenados, con los planos coordenados y con planos paralelos a los planos coordenados correspondientes a los casos *i*), *ii*) y *iii*):

| Ecuación | Intersección con los ejes coordenados. | | Intersección con los planos coordenados. Trazas | | Intersección con planos paralelos a los planos coordenados | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *i* | $x$ | $x = 0$ | $xz$ | $x^2 - 6z = 0$ parábola | $y=k$ | $x^2 - 6z = k^2$ familia de parábolas |
| | $y$ | $y = 0$ | $yz$ | $-y^2 - 6z = 0$ parábola | $x=k$ | $y^2 + 6z = k^2$ familia de parábolas |
| | $z$ | $z = 0$ | $xy$ | $x^2 - y^2 = 0$ dos rectas | $z=k$ | $x^2 - y^2 = 6k$ familia de hipérbolas |

| Ecuación | Intersección con los ejes coordenados. | | Intersección con los planos coordenados. Trazas | | Intersección con planos paralelos a los planos coordenados | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *ii* | $x$ | $\nexists \cap$ | $xz$ | $\boldsymbol{-49x^2+25y^2-1225=0}$ hipérbola | $x$=$k$ | $\boldsymbol{-49y^2+25z^2=1225+49k^2}$ familia de hipérbolas |
| | $y$ | $\nexists \cap$ | $yz$ | $\boldsymbol{-49y^2+25z^2-1225=0}$ hipérbola | $y$=$k$ | $\boldsymbol{-49x^2+25z^2=1225+49k^2}$ familia de hipérbolas |
| | $z$ | $\boldsymbol{z=\pm 7}$ | $xy$ | $\boldsymbol{-49x^2-49y^2-1225=0}$ No existe intersección | $z$=$k$ | $\boldsymbol{-49x^2-49y^2=1225-25k^2}$ familia de elipses $\boldsymbol{k} \in (-\infty,-7] \cup [7,\infty)$ |

| Ecuación | Intersección con los ejes coordenados. | | Intersección con los planos coordenados. Trazas | | Intersección con planos paralelos a los planos coordenados | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *iii* | $x$ | $\boldsymbol{x=0}$ | $xz$ | $\boldsymbol{z^2-8x=0}$ parábola | $x$=$k$ | $\boldsymbol{y^2+9z^2=72k}$ familia de elipses $k$>0 |
| | $y$ | $\boldsymbol{y=0}$ | $yz$ | $\boldsymbol{y^2+9z^2=0}$ punto en el origen de coordenadas | $y$=$k$ | $\boldsymbol{36z^2-288x=-4k^2}$ familia de parábolas |
| | $z$ | $\boldsymbol{z=0}$ | $xy$ | $\boldsymbol{y^2-72x=0}$ parábola | $z$=$k$ | $\boldsymbol{4y^2-288x=-36k^2}$ familia de parábolas |

*Tabla* 3.13. Intersecciones con los ejes coordenados, con los planos coordenados y con planos paralelos a los planos coordenados, de las superficies del Ejercicio 101.

A los efectos de analizar la *simetría* de las superficies dadas, es necesario evaluar si las ecuaciones de las mismas se modifican o no al reemplazar una variable con respecto a la misma cambiada de signo. El cuadro siguiente muestra los reemplazos posibles:

| Simetría respecto a: | Reemplazo de variables | | |
|---|---|---|---|
| | | Variable | Se reemplaza por: |
| Ejes coordenados | Eje $x$ | $y$<br>$z$ | -$y$<br>-$z$ |
| | Eje $y$ | $x$<br>$z$ | -$x$<br>-$z$ |
| | Eje $z$ | $x$<br>$y$ | -$x$<br>-$y$ |
| Planos coordenados | Plano $xy$ | $z$ | -$z$ |
| | Plano $xz$ | $y$ | -$y$ |
| | Plano $yz$ | $x$ | -$x$ |
| Origen de coordenadas | O | $x$<br>$y$<br>$z$ | -$x$<br>-$y$<br>-$z$ |

*Tabla* 3.14. Estudio de la simetría.

Se procede a reemplazar cada uno de los casos indicados en la *Tabla* anterior, en las expresiones de las ecuaciones dadas. Si no hay variación, significa que existe simetría y en caso contrario, no existe la simetría considerada. La *Tabla* 3.15 resume el análisis.

| Ecuación superficie | Simetría con respecto a los ejes coordenados. | | Simetría con respecto a los planos coordenados. | | Simetría con respecto al origen de coordenadas. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *i* | *Eje x* | *No* | *Plano xz* | *Si* | *O(0, 0, 0)* | *No* |
| | *Eje y* | *No* | *Plano yz* | *Si* | | |
| | *Eje z* | *Si* | *Plano xy* | *No* | | |
| *ii* | *Eje x* | *Si* | *Plano xz* | *Si* | *O(0, 0, 0)* | *Si* |
| | *Eje y* | *Si* | *Plano yz* | *Si* | | |
| | *Eje z* | *Si* | *Plano xy* | *Si* | | |
| *iii* | *Eje x* | *Si* | *Plano xz* | *Si* | *O(0, 0, 0)* | *No* |
| | *Eje y* | *No* | *Plano yz* | *No* | | |
| | *Eje z* | *No* | *Plano xy* | *Si* | | |

*Tabla* 3.15. Estudio de la simetría en las ecuaciones del Ejercicio 101.

A partir del análisis realizado, las superficies dadas corresponden a:

i) Paraboloide hiperbólico. Superficie cuádrica sin centro.

ii) Hiperboloide de dos hojas. Superficie cuádrica con centro.

iii) Paraboloide elíptico. Superficie cuádrica sin centro

Las Figuras 3.102, 3.103 y 3.104, muestran las gráficas de las superficies estudiadas.

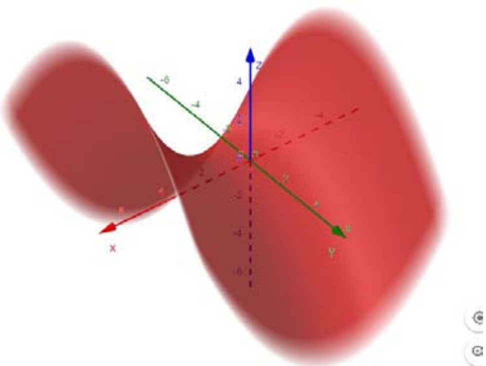


*Figura* 3.102. Paraboloide hiperbólico

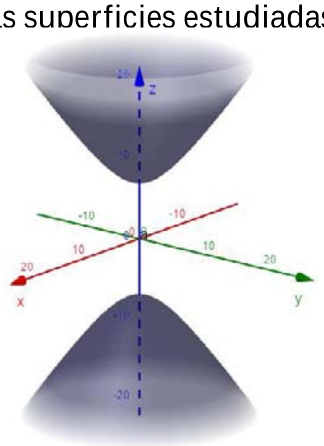


*Figura* 3.103. Hiperboloide de dos hojas

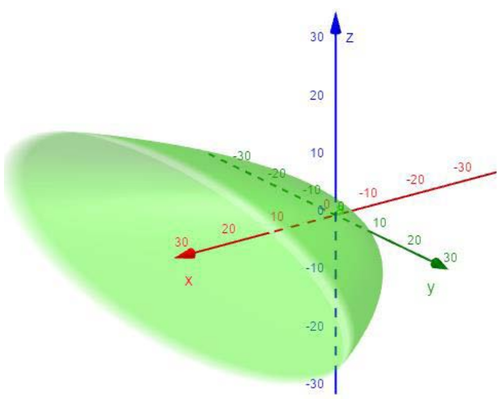



*Figura* 3.104. Paraboloide elíptico

## 102.

Se plantea en cada caso la intersección correspondiente a los efectos de hallar las ecuaciones vectoriales paramétricas solicitadas:

$i)$

$$\begin{cases} -25x^2 - 25y^2 + 16z^2 + 400 = 0 \\ z = 10 \end{cases} \qquad [102.1]$$

Resolviendo el sistema planteado, se obtiene:

$$-25x^2 - 25y^2 + 16.(10)^2 + 400 = 0 \qquad [102.2]$$

$$-25x^2 - 25y^2 + 2000 = 0 \qquad [102.3]$$

$$x^2 + y^2 = 80 \qquad [102.4]$$

Observamos que la intersección en este caso es una circunferencia de radio $\sqrt{\mathbf{80}}$, en el plano z=10, con centro C(0,0,10). Parametrizamos la circunferencia y obtenemos las siguientes ecuaciones cartesianas paramétricas:

$$\begin{cases} x = \sqrt{80}cos\theta \\ y = \sqrt{80}sen\theta \\ z = 10 \end{cases} \quad \theta \in (0,2\pi] \qquad [102.5]$$

Con lo cual la ecuación vectorial paramétrica resulta:

$$(x,y,z) = \left(\sqrt{80}cos\theta, \sqrt{80}sen\theta, 10\right); \quad \theta \in (0,2\pi] \qquad [102.6]$$

La representación gráfica del problema está dada por la *Figura* 3.105.

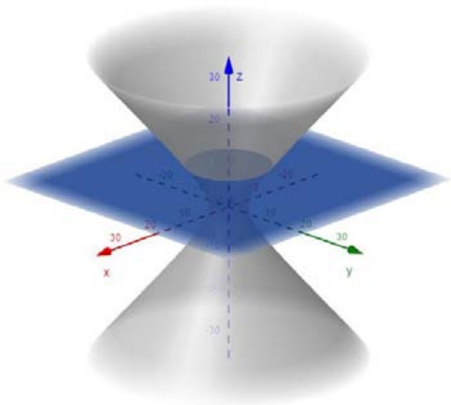


Figura 3.105.

$ii)$

$$\begin{cases} -25x^2 - 25y^2 + 16z^2 + 400 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad [102.7]$$

Resolviendo el sistema planteado, se obtiene:

$$z = -x \tag{102.8}$$

$$-25x^2 - 25y^2 + 16.(-x)^2 + 400 = 0 \tag{102.9}$$

$$-25x^2 - 25y^2 + 16x^2 + 400 = 0 \tag{102.10}$$

$$-9x^2 - 25y^2 + 400 = 0 \tag{102.11}$$

$$\frac{x^2}{\frac{400}{9}} + \frac{y^2}{16} = 1 \tag{102.12}$$

El lugar geométrico hallado es una elipse. Las coordenadas $x$ e $y$ de los puntos de dicha elipse estarán dados por la ecuación [102.11] o [102.12]. Por ello parametrizamos la ecuación del lugar geométrico generado por la intersección de la superficie y el plano de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = \dfrac{20}{3} cos\theta \\ y = 4\, sen\theta; \quad \theta \in (0,2\pi] \\ z = -x \end{cases} \tag{102.13}$$

Con lo cual la ecuación vectorial paramétrica resulta:

$$(x, y, z) = \left(\frac{20}{3} cos\theta, 4\, sen\theta, -\frac{20}{3} cos\theta\right); \quad \theta \in (0,2\pi] \tag{102.14}$$

La representación gráfica del problema resulta dada por la *Figura* 3.106.

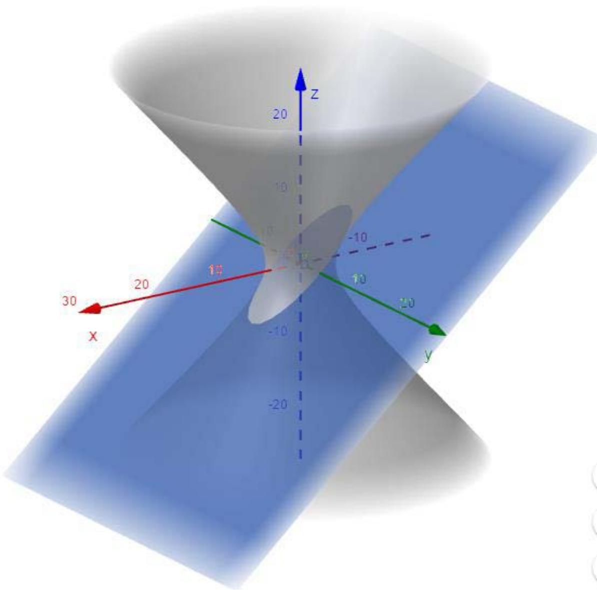



*Figura* 3.106. [GeoGebra]

# 103.

a) $\boldsymbol{r}(\alpha\,,\beta) = (5sen\alpha\, cos\beta\,,\ 5sen\alpha\, sen\beta\,,\ \ 5cos\alpha) \rightarrow \begin{cases} x = 5sen\alpha\, cos\beta \\ y = 5sen\alpha\, sen\beta \\ z = 5cos\alpha \end{cases}$

$0 \leq \alpha \leq \pi\,; 0 \leq \beta \leq 2\pi$

Elevando al cuadrado, sumando miembro a miembro y operando algebraicamente las 3 expresiones cartesianas paramétricas, se obtiene:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25sen^2\alpha\, cos^2\beta + 25sen^2\alpha\, sen^2\beta + 25cos^2\alpha \qquad [103.1]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25sen^2\alpha\, (cos^2\beta + sen^2\beta) + 25cos^2\alpha \qquad [103.2]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25sen^2\alpha + 25cos^2\alpha \qquad [103.3]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \qquad [103.4]$$

La expresión obtenida corresponde a la ecuación cartesiana de una *esfera* con centro en el origen de coordenadas y radio 5.

b) $\boldsymbol{r}(\alpha\,,\beta) = (4\ cos\alpha\ sen\beta\ ,6\ sen\alpha\ sen\beta\ ,3\ cos\beta) \rightarrow \begin{cases} x = 4\ cos\alpha\ sen\beta \\ y = 6\ sen\alpha\ sen\beta \\ z = 3\ cos\beta \end{cases}$ $\quad \alpha \in [0, 2\pi]\ ;\ \ \beta \in [0, \pi]$

Reordenando, elevando al cuadrado, sumando miembro a miembro y operando algebraicamente las 3 expresiones cartesianas paramétricas, se obtiene:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = cos^2\alpha\ sen^2\beta + sen^2\alpha\ sen^2\beta + cos^2\beta \qquad [103.5]$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = sen^2\beta(cos^2\alpha + sen^2\alpha) + cos^2\beta \qquad [103.6]$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = sen^2\beta + cos^2\beta \qquad [103.7]$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad [103.8]$$

La expresión obtenida corresponde a la ecuación cartesiana de un *elipsoide* con centro en el origen de coordenadas.

c) $\boldsymbol{r}(\alpha\,,\beta) = (5\ cos\alpha\ ch\beta\ ,2\ sen\alpha\ ch\beta\ ,7\ sh\beta) \rightarrow \begin{cases} x = 5\ cos\alpha\ ch\beta \\ y = 2\ sen\alpha\ ch\beta \\ z = 7\ sh\beta \end{cases}$

$0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad ; \quad -\infty < \beta < \infty$

Reordenando las tres expresiones cartesianas paramétricas de forma tal de dejar en el segundo miembro las funciones trigonométricas, elevando luego al cuadrado cada una de ellas, sumando miembro a miembro la primera y segunda y restando miembro a miembro la tercera, se obtiene:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{z}{7}\right)^2=cos^2\alpha\ ch^2\beta+sen^2\alpha\ ch^2\beta-sh^2\beta \qquad [103.9]$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{z}{7}\right)^2=ch^2\beta(cos^2\alpha+sen^2\alpha)-sh^2\beta \qquad [103.10]$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{z}{7}\right)^2=ch^2\beta-sh^2\beta \qquad [103.11]$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{49}=1 \qquad [103.12]$$

La expresión obtenida corresponde a la ecuación cartesiana de un *hiperboloide de una hoja* con centro en el origen de coordenadas.

## 104.

Las aplicaciones de las superficies cuádricas en el campo práctico son numerosas y de variada índole. Citamos a continuación algunos ejemplos ilustrativos.

*Arquitectura:* Las superficies cuádricas configuran las envolventes de múltiples edificios en altura y configuran la geometría de cubiertas de techos de variadas características.

*Ingeniería Civil:* Grandes estructuras de hormigón armado, acero o madera. Torres de enfriamiento de Centrales Nucleares. Estructuras resistentes de depósitos y reservorios de fluidos y materiales granulares.

*Arte:* Esculturas geométricas. Combinación de formas a partir de superficies definidas. Desarrollo de patrones geométricos.

*Realidad Virtual*. Generación de escenarios virtuales a partir de un uso intensivo de geometrías basadas en superficies geométricas. Aplicación a video juegos.

*Desarrollo de vehículos terrestres, aéreos y acuáticos*. Generación de superficies geométricas de alto desempeño fluidodinámico.

## 105.

a) Para encontrar las coordenadas del centro y del radio, debemos llevar la ecuación de la superficie a la forma $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$. Para ello, agrupamos los términos según las variables $x$,$y$,$z$ y completamos cuadrados:

$$(x^2+2x+1-1)+(y^2+4y+4-4)+(z^2-6z+9-9)-2=0 \qquad [105.1]$$

$$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16 \qquad [105.2]$$

De la ecuación obtenida se deduce que el centro es C(-1,-2,3) y el radio $r$=4

b) Si el punto A es un punto perteneciente a la esfera, el vector normal del plano tangente será un vector paralelo al vector $\boldsymbol{CA}$. Verificamos entonces que el punto $A$ sea un punto de la esfera reemplazando sus coordenadas en la ecuación, y verificando que se cumpla la igualdad:

$$\left(\sqrt{3}-1+1\right)^2+(1+2)^2+(1-3)^2=3+3^2+(-2)^2=3+9+4=16 \qquad [105.3]$$

Dado que el punto $A$ pertenece a la esfera, obtenemos el vector normal al plano tangente como:

$$\boldsymbol{n}=k\,\boldsymbol{CA} \qquad [105.4]$$

Por simplicidad, tomamos $k=1$, entonces:

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{OA}-\boldsymbol{OC}=\left(\sqrt{3}-1,1,1\right)-(-1,-2,3)=(\sqrt{3},3,-2) \qquad [105.5]$$

Escribimos la ecuación del plano con vector normal $\boldsymbol{n}$ y que pasa por el punto $A$:

$$\pi:\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{AP}=0 \qquad [105.6]$$

$$\left(\sqrt{3},3,-2\right)\cdot\left(x-\sqrt{3}+1,y-1,z-1\right)=0 \qquad [105.7]$$

$$\pi:\ \sqrt{3}x+3y-2z-4+\sqrt{3}=0 \qquad [105.8]$$

## 106.

b) Obtenemos la intersección entre ambas superficies (casquete esférico y plano), analizando la solución del sistema de ecuaciones que comprende las ecuaciones de ambos lugares geométricos:

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=9 \\ -y+z-3=0 \\ z\geq 0 \end{cases} \qquad [106.1]$$

Despejamos la variable $z$ de la segunda ecuación, $z=y+3$ , y reemplazamos dicha expresión en la primera ecuación:

$$x^2+y^2+(y+3-1)^2=9 \qquad [106.2]$$

$$x^2+y^2+(y+2)^2=9 \qquad [106.3]$$

$$x^2+y^2+y^2+4y+4=9 \qquad [106.4]$$

$$x^2+2y^2+4y+4=9 \qquad [106.5]$$

Observamos que la expresión corresponde a un cilindro elíptico recto. Llevamos la ecuación a la forma cartesiana para identificar sus elementos:

$$x^2+2(y^2+2y+1-1)+4=9 \qquad [106.6]$$

$$x^2+2(y+1)^2-2+4=9 \qquad [106.7]$$

$$x^2 + 2(y+1)^2 = 7 \qquad [106.8]$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{7} + \dfrac{(y+1)^2}{7/2} = 1 \\ -y + z - 3 = 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \qquad [106.9]$$

La intersección del cilindro elíptico con el plano $z$=0, es una elipse de semiejes $a = \sqrt{7}$ y $b = \sqrt{7/2}$, en tanto que las coordenadas en $x$ e $y$ del centro ($h$ y $k$) se obtienen por observación de la ecuación: $h$=0 ; $k$= -1 y $l$=0 (por estar en el plano $z$=0).

Con respecto a la curva intersección con el plano $-y + z - 3 = 0$, la coordenada en $z$ del centro ($l$) se obtiene de la expresión $z = y + 3$, dando a la variable $y$ el valor $k = -1$. Las coordenadas del centro de la curva de intersección del cilindro elíptico con el plano dado, por lo tanto, son: C(0,-1,2).

Ahora podemos parametrizar a la curva solución, obteniendo expresiones para $x$, $y$ y $z$ en función de un parámetro. Como se trata de una elipse en las variables $x$ e $y$, utilizamos la parametrización ya estudiada en términos del parámetro $\theta$, para estas dos variables. Para parametrizar la componente en $z$, usamos la expresión $z = y + 3$. En esta expresión, para la variable $z$ reemplazamos la expresión parametrizada de $y$. Es decir:

$$\begin{cases} x = \sqrt{7} cos\theta \\ y = \sqrt{7/2} sen\theta - 1 \ ; \ \theta \epsilon [0,2\pi) \\ z = \sqrt{7/2} sen\theta + 2 \end{cases} \qquad [106.10]$$

Respecto a la restricción $z \geq 0$ dada al inicio, observamos que la variable $z$ en la parametrización obtenida varía entre dos valores positivos: $z_{Max} = 2 + \sqrt{7/2}$ cuando $\theta = \pi/2$ y $z_{min} = 2 - \sqrt{7/2} \approx 0.13$ para $\theta = 3\pi/2$. Teniendo en cuenta que ambos son valores positivos, no es necesario restringir el intervalo de variación del parámetro. Es decir, verificamos que se cumple la condición $z \geq 0$, para $\theta \epsilon [0,2\pi)$

Por último, llevamos las ecuaciones cartesianas paramétricas a la forma vectorial paramétrica:

$$(x, y, z) = \left( \sqrt{7} cos\theta \, , \sqrt{\frac{7}{2}} sen\theta - 1 \, , \sqrt{\frac{7}{2}} sen\theta + 2 \right) ; \ \theta \epsilon [0,2\pi) \qquad [106.11]$$

O bien:

$$(x, y, z) = (\, 0, -1, 2) + (\sqrt{7} cos\theta \, , \sqrt{\frac{7}{2}} sen\theta \, , \sqrt{\frac{7}{2}} sen\theta \,) \ ; \theta \epsilon [0,2\pi) \qquad [106.12]$$

La *Figura* 3.107 muestra la representación gráfica del problema planteado:

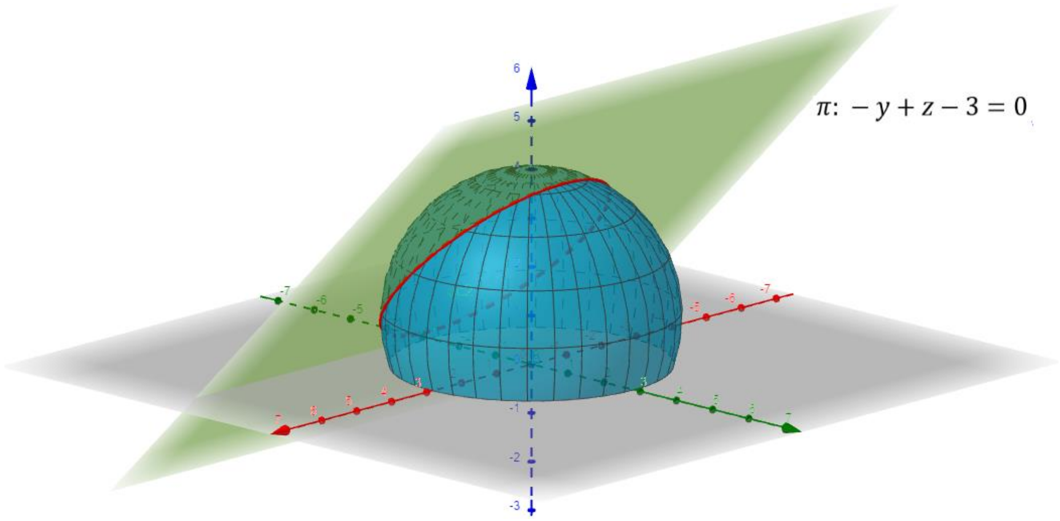



*Figura* 3.107. [GeoGebra]

*Observación*:

Calculamos el módulo del vector que va del centro de la curva a un punto cualquiera de la misma:

Siendo $C(0,-1,2)$ y P$\left(\sqrt{7}cos\theta\,, \sqrt{\frac{7}{2}}sen\theta - 1\,, \sqrt{\frac{7}{2}}sen\theta + 2\right)$ ; con $\theta\epsilon[0,2\pi)$, resulta:

$$\|\boldsymbol{CP}\|^2 = (\sqrt{7}cos\theta\,)^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{2}}sen\theta - 1 + 1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{2}}sen\theta + 2 - 2\right)^2 = 7 \qquad [106.13]$$

La distancia del centro a cualquier punto de la curva es constante, por lo tanto se trata de una circunferencia de centro $C(0,-1,2)$ y radio $\sqrt{7}$.

c) Hay infinitas superficies cilíndricas que intersecan al casquete esférico en la curva encontrada. Sin embargo, podemos hallar fácilmente un *cilindro elíptico recto*, paralelo al eje $z$, cuya ecuación está dada por:

$$\frac{x^2}{7} + \frac{(y+1)^2}{7/2} = 1 \qquad [106.14]$$

En esta ecuación, la variable $z$ es libre, por lo tanto, la superficie es paralela al eje $z$, tal como muestra la *Figura* 3.108.

*Observación*:

La diferencia que existe entre la ecuación del cilindro y la ecuación de la curva elíptica, es que para la segunda tenemos la restricción $z = y + 3$. Es decir, la expresión para la curva elíptica es:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{7} + \dfrac{(y+1)^2}{7/2} = 1 \\ z = y + 3 \end{cases} \qquad [106.15]$$

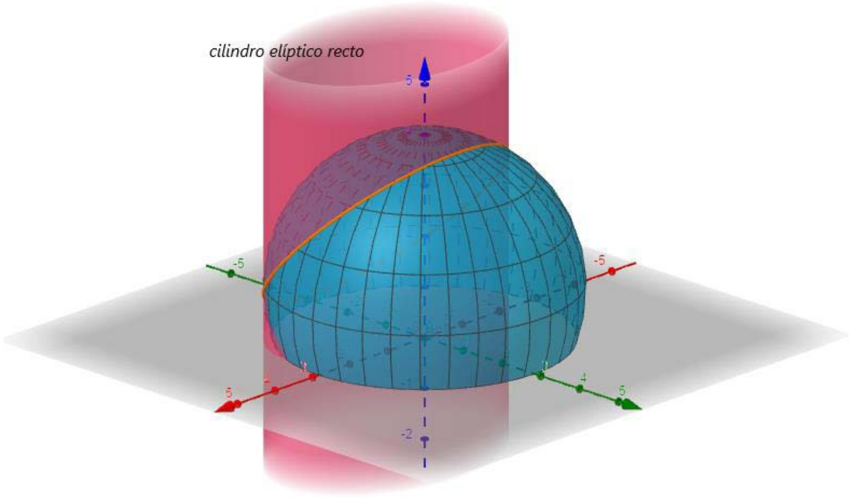



*Figura* 3.108. [GeoGebra]

d) Para proyectar la curva sobre el plano $xy$, basta con anular la componente en $z$, entonces:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{7} + \dfrac{(y+1)^2}{7/2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad [106.16]$$

La ecuación vectorial paramétrica es:

$$(x, y, z) = (0, -1, 0) + \left(\sqrt{7}cos\theta, \sqrt{7/2}sen\theta, 0\right) \;;\; \theta \epsilon [0, 2\pi) \quad [106.17]$$

La *Figura* 3.109 muestra la curva proyección sobre el plano $xy$, hallada:

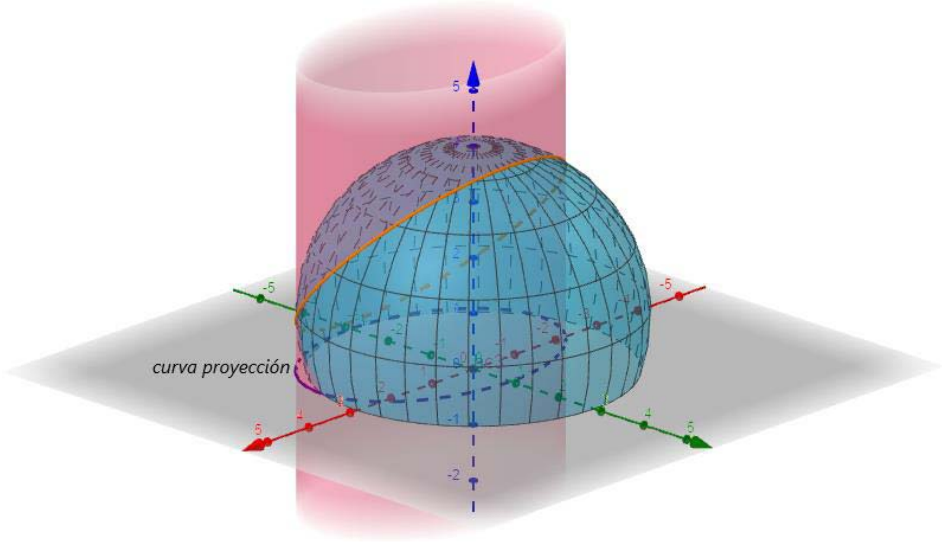



*Figura* 3.109. [GeoGebra]

Para una mejor visualización de la curva proyectada, podemos ocultar el casquete esférico, tal como muestra la *Figura* 3.110:

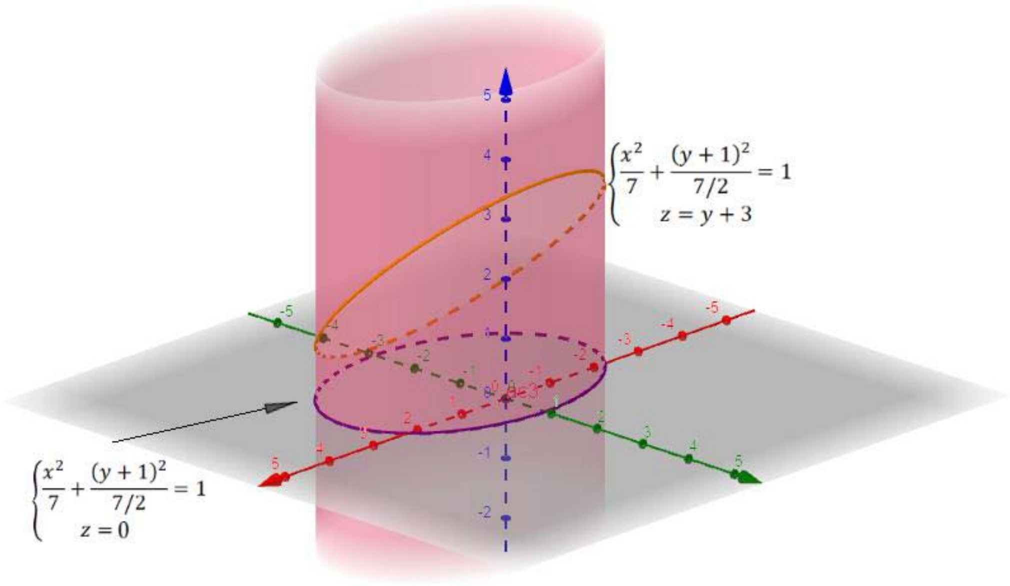



*Figura* 3.110. [GeoGebra]

## 107.

Escribimos la ecuación vectorial de una recta generatriz: $\boldsymbol{PP'} = k\,\boldsymbol{v}$, donde $P(x,y,z)$ es un punto genérico y $P'(x',y',z')$ es el punto donde la recta generatriz interseca a la directriz. Escribimos las ecuaciones simétricas de dicha recta generatriz:

$$\frac{x-x'}{1} = \frac{y-y'}{1} = \frac{z-z'}{2} \qquad [107.1]$$

Como $P'$ pertenece a la directriz, sus coordenadas satisfacen su ecuación:

$$\begin{cases} (y'-1)^2 = 8z' \\ x' = 0 \end{cases} \qquad [107.2]$$

De las expresiones (107.1) y (107.2), obtenemos las coordenadas de $P'$ en función de las coordenadas de $P$

$$x = y - y' \quad \rightarrow \quad y' = y - x \qquad [107.3]$$

$$x = \frac{z-z'}{2} \quad \rightarrow \quad z' = z - 2x \qquad [107.4]$$

Reemplazamos (107.3) y (107.4) en (107.2) para obtener la ecuación de la superficie cilíndrica:

$$(y - x - 1)^2 = 8(z - 2x) \qquad [107.5]$$

Esta es una ecuación de segundo grado en tres variables, por lo tanto, corresponde a la superficie. Desarrollando los términos e igualando a cero la llevamos a la forma general:

$$x^2 + y^2 - 2xy + 18x - 2y - 8z + 1 = 0 \qquad [107.6]$$

La presencia del término rectangular ($-2xy$) se debe a que la superficie está rotada respecto de los ejes coordenados, ya que el vector $\boldsymbol{v}$ paralelo a las generatrices no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados. La presencia de términos lineales está asociada al desplazamiento del vértice de la curva directriz respecto del origen de coordenadas.

*Gráfico Cualitativo*:

Para la realización del gráfico cualitativo, tenemos en cuenta qué tipo de curva es la directriz: se trata de una parábola contenida en el plano $yz$. Su vértice está en el punto (0,1,0), por lo tanto, debe ubicarse sobre el eje $y$. El parámetro de la parábola es positivo, entonces, sus ramas se abren hacia el semieje positivo $z$. Por otro lado, graficamos el vector $\boldsymbol{v}$ cuyas componentes son todas positivas. A partir de la directriz trazamos rectas paralelas al vector $\boldsymbol{v}$, las cuales representan diferentes posiciones de la generatriz y constituyen a la superficie (tener en cuenta que sólo graficamos una porción de la superficie, pero la misma es infinita). La *Figura* 3.111 permite observar el gráfico descripto.

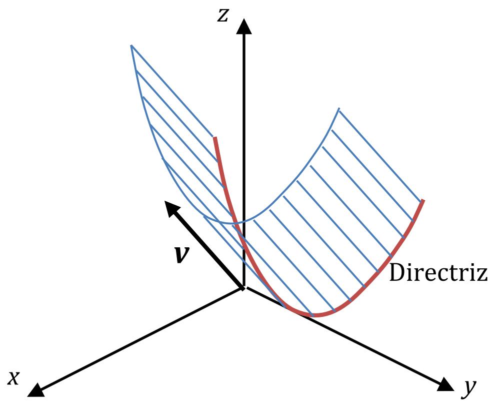



*Figura* 3.111.

## 108.

Escribimos la ecuación vectorial paramétrica de una recta generatriz:

$\boldsymbol{VP} = k\, \boldsymbol{VP'} \quad k \epsilon \mathbb{R}$

donde $P(x,y,z)$ es un punto genérico y $P'(x',y',z')$ es el punto donde la recta generatriz interseca a la directriz.

Escribimos la ecuación en términos de las componentes de los vectores:

$$(x-0, y-7, z-0) = k(x'-0, y'-7, z'-0) \qquad [108.1]$$

Escribimos las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y-7}{y'-7} = \frac{z}{z'} \qquad [108.2]$$

Como P´ pertenece a la directriz, sus coordenadas satisfacen su ecuación:

$$\begin{cases}(x' - 2)^2 + (z' - 1)^2 = 16 \\ y' = 0\end{cases} \qquad [108.3]$$

De las expresiones (108.1) y (108.2), obtenemos las coordenadas de $P'$ en función de las coordenadas de $P$.

$$\frac{x}{x'} = \frac{y-7}{-7} \;\rightarrow\; x' = \frac{-7x}{y-7} \qquad [108.4]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{y-7}{-7} \;\rightarrow\; z' = \frac{-7z}{y-7} \qquad [108.5]$$

Reemplazamos las expresiones (108.4) y (108.5) en (108.3) para obtener la ecuación de la superficie cónica:

$$\left[\left(\frac{-7x}{y-7}\right) - 2\right]^2 + \left[\left(\frac{-7z}{y-7}\right) - 1\right]^2 = 16 \qquad [108.6]$$

Esta es una ecuación de segundo grado en tres variables, por lo tanto, corresponde a la superficie. Desarrollando los términos e igualando a cero la llevamos a la forma general:

$$49x^2 - 11y^2 + 49z^2 + 28xy + 14yz - 196x + 154y - 98z - 539 = 0 \qquad [108.7]$$

La presencia de los términos rectangulares $(28xy; 14yz)$ se debe a que el eje de la superficie cónica está rotado respecto de los ejes coordenados. Esto es así, ya que el vector que une el centro de la curva directriz con el vértice de la superficie cónica no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados. La presencia de términos lineales está asociada al desplazamiento del centro de la curva directriz respecto del origen de coordenadas.

*Gráfico Cualitativo*:

Para la realización del gráfico cualitativo, tenemos en cuenta qué tipo de curva es la directriz: se trata de una circunferencia contenida en el plano $xz$. Su centro está en el punto (2,0,1), por lo tanto, no está centrada en el origen. El radio de la circunferencia es r=4, entonces la misma intersectará al eje $x$ y al eje $z$.

Por otro lado, graficamos el vértice $V$ de la superficie cónica, que en este caso se ubica sobre el eje $y$.

A partir de la directriz trazamos rectas que pasan por el punto $V$, las cuales representan diferentes posiciones de la generatriz y constituyen a la superficie (tener en cuenta que sólo graficamos una porción de la superficie, pero la misma es infinita).

Observamos que el eje de la superficie cónica (recta que pasa por el centro de la curva directriz y por el vértice de la superficie cónica=, no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados.

La *Figura* 3.112 muestra la representación realizada.

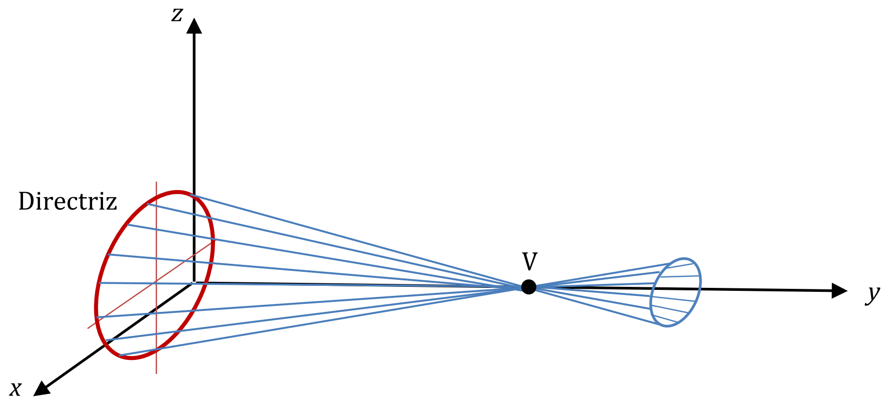



*Figura* 3.112.

# 109.

a) Escribimos la ecuación vectorial de una recta generatriz:

$$\boldsymbol{VP} = k\,\boldsymbol{VP'} \qquad [109.1]$$

$$(x-0, y-0, z-8) = k(x'-0, y'-0, z'-8) \qquad [109.2]$$

Escribimos las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z-8}{z'-8} \qquad [109.3]$$

Como $P'$ pertenece a la directriz, sus coordenadas satisfacen su ecuación:

$$\begin{cases} 36(x'-4)^2 + 16(y'+6)^2 = 576 \\ z' = 0 \end{cases} \qquad [109.4]$$

De las expresiones (109.3) y (109.4), obtenemos las coordenadas de P´ en función de las coordenadas de P.

$$\frac{x}{x'} = \frac{z-8}{-8} \to x' = \frac{-8x}{z-8} \qquad [109.5]$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{z-8}{-8} \to y' = \frac{-8y}{z-8} \qquad [109.6]$$

Reemplazamos (109.5) y (109.6) en (109.4) para obtener la ecuación de la superficie cónica:

$$36\left(\frac{-8x}{z-8} - 4\right)^2 + 16\left(\frac{-8y}{z-8} + 6\right)^2 = 576 \qquad [109.7]$$

De acuerdo a la consigna no es necesario desarrollar la última expresión. Sin embargo, podemos anticipar si aparecerán o no términos de productos cruzados y términos lineales. Observamos que el vector que une el centro de la curva directriz con el vértice de la superficie cónica, no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados. De esta manera la posición del eje de la superficie cónica (recta que pasa por el centro de la curva directriz y por el vértice de la superficie cónica) determina que la misma está girada o rotada respecto de los ejes coordenados y aparecerán términos de producto cruzado en su ecuación general.

La presencia de términos lineales está asociada al desplazamiento del vértice de la superficie cónica respecto del origen de coordenadas.

b) Una recta estará contenida en la superficie si es una de las generatrices de la misma. En ese caso, la recta pasará tanto por el punto V como por algún punto de la curva directriz.

Verificamos si la recta L pasa por el punto V reemplazando sus coordenadas en la ecuación de la recta, y comprobando que exista un valor de $t$ que satisfaga simultáneamente las expresiones para las componentes $x, y$ y $z$:

$$L: \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 0 \\ z = -4 - 2t \end{cases} ; t \epsilon R \qquad [109.8]$$

$$\begin{cases} 0 = 6 + t & \rightarrow t = -6 \\ 0 = 0 & \\ 8 = -4 - 2t & \rightarrow t = -12/2 = -6 \end{cases} \qquad [109.9]$$

El valor $t = -6$ permite obtener las coordenadas de $V$ en la ecuación de L, por lo tanto, $V$ es un punto de L.

Verificamos ahora que la recta L tenga intersección con la directriz. Para ello, verificamos que exista solución para el sistema de ecuaciones que comprende las ecuaciones de $L$ y la directriz.

$$\begin{cases} x = 6 + t \\ y = 0 \\ z = -4 - 2t \\ 36(x-4)^2 + 16(y+6)^2 = 576 \\ z = 0 \end{cases} \qquad [109.10]$$

De la tercera y quinta ecuación [109.10] obtenemos $t = -2$. Con dicho valor obtenemos el punto (4,0,0). Reemplazando en la cuarta ecuación, tenemos:

$$36(4-4)^2 + 16(0+6)^2 = 576 \qquad [109.11]$$

Es decir que la intersección entre L y la directriz es el punto (4,0,0). Entonces concluimos que la recta L está contenida en la superficie.

<u>*Otra forma de resolución*</u>:

Podemos verificar que el punto $P_0(6,0,-4)$ de la recta pertenezca también a la superficie (es decir que sus coordenadas satisfagan la ecuación de la superficie). Luego, verificar que el vector $\boldsymbol{P_oV}$ sea paralelo al vector director de la recta. Si se cumplen ambas condiciones, la recta estará contenida en la superficie.

Reemplazamos las coordenadas de $P_0(6,0,-4)$ en la ecuación de la superficie, y verificamos que se cumple la igualdad:

$$36\left[\left(\frac{-8*6}{-4-8}\right)-4\right]^2+16\left[\left(\frac{-8*0}{-4-8}\right)+6\right]^2=36*0+16*36=576 \quad [109.12]$$

Ahora obtenemos el vector $\boldsymbol{P_0V}=\big(0-6{,}0-0{,}8-(-4)\big)=(-6{,}0{,}12)$

Observamos que $\boldsymbol{P_0V}=-6(1{,}0,-2)$, por lo tanto, es paralelo al vector director de L. Entonces, concluimos que la recta L está contenida en la superficie.

*Otra forma de resolución*:

Verificar que todo punto de la recta L pertenece a la superficie cónica. Para ello, de la ecuación vectorial paramétrica, obtenemos las ecuaciones cartesianas paramétricas. Luego sustituimos las expresiones correspondientes a las variables $x$, $y$, $z$ que dependen del parámetro t, en la ecuación obtenida para la superficie cónica. Si la recta está contenida en la superficie, todos sus puntos deben satisfacer su ecuación, por lo tanto, debe verificarse la ecuación para todo valor del parámetro $t$, obteniéndose una identidad.

c) El *eje de la superficie cónica* es la recta que pasa por el vértice $V$ y por el centro de la curva directriz, que es el punto C(4,-6,0). El vector director de la misma está dado por $\boldsymbol{CV}=(\boldsymbol{-4},\boldsymbol{6},\boldsymbol{8})$, entonces podemos escribir la ecuación vectorial paramétrica como:

$$(x,y,z)=(4,-6{,}0)+k(-4{,}6{,}8) \quad ;k\epsilon R \quad [109.13]$$

Determinamos el ángulo entre el eje de la superficie y el plano $xy$ mediante $\alpha=90°-\theta$, siendo $\theta$ el ángulo entre $\boldsymbol{VC}$ y el versor $\breve{\boldsymbol{k}}$, que es el vector normal al plano $xy$.

$$\theta=arcos\left(\frac{\boldsymbol{CV}\cdot\breve{\boldsymbol{k}}}{\|\boldsymbol{CV}\|\|\breve{\boldsymbol{k}}\|}\right)=arcos\left(\frac{8}{\sqrt{116}}\right)\approx 42° \quad [109.14]$$

$$\alpha=90°-\theta\approx 48° \quad [109.15]$$

*e)* *Gráfico Cualitativo*:

Para realizar el gráfico, tenemos en cuenta que la directriz de la superficie es una elipse en el plano $xy$. Llevamos su ecuación a la forma cartesiana para identificar su centro y su eje focal.

$$\begin{cases}\dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{(y+6)^2}{36}=1\\ z=0\end{cases} \quad [109.16]$$

El centro de la elipse es C(4,-6,0), sus semiejes son $a=6$ y $b=4$, con eje focal paralelo al eje $y$. El vértice de la superficie es el punto $V$(0,0,8), por lo tanto debe ubicarse sobre el eje $z$.

La *Figura* 3.113 muestra el gráfico de la superficie.

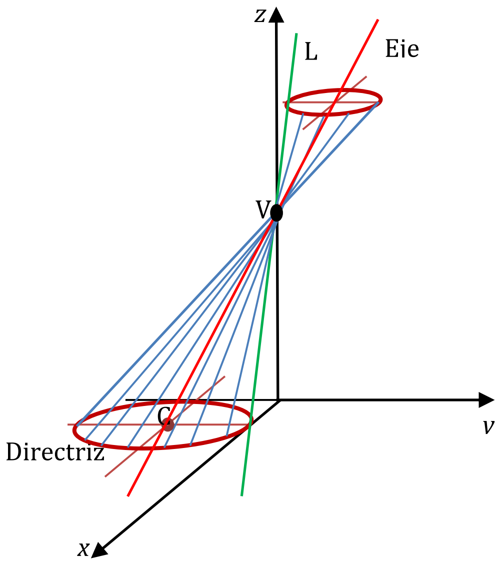



*Figura* 3.113.

## 110.

a) Como paso inicial, escribimos la ecuación de la generatriz. En este caso no se aclara si el eje focal de la elipse es el eje $x$ o el $z$, por lo tanto, hay dos respuestas posibles. En este desarrollo utilizaremos el eje focal sobre el eje $x$. Una ecuación de la curva generatriz es:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad [110.1]$$

*Eje de revolución:* eje $x$

Siguiendo con el procedimiento desarrollado en el libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías* [*Raichman, Totter*], identificamos la variable $z$ (que no se anula en la ecuación de la generatriz y que tampoco se mide en el eje de revolución) y la reemplazamos por $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ en la ecuación de la generatriz, para obtener la ecuación de la superficie de revolución:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \qquad [110.2]$$

b) La *Figura* 3.114 muestra la representación gráfica del problema planteado.

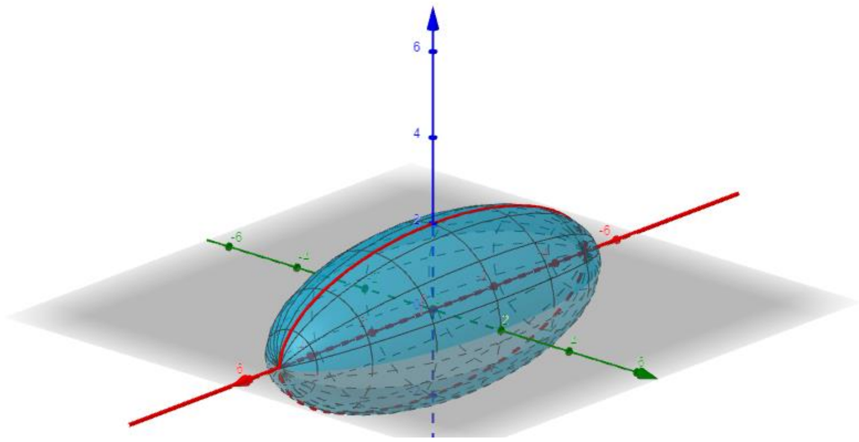


*Figura* 3.114. [GeoGebra]

## 111.

a) Dado que el espacio a cubrir es circular, la cubierta será una superficie de revolución con eje de revolución vertical, es decir el eje $z$. Elegimos un sistema coordenado cuyo origen se ubica sobre el centro del espacio circular. Escribimos la ecuación de la generatriz a partir de los datos indicados en el problema: es una semielipse contenida en el plano $xz$, con eje focal horizontal (sobre eje $x$), semiejes a=60 y b=30. La misma se encuentra centrada respecto al origen de coordenadas:

$$G: \begin{cases} \dfrac{x^2}{60^2} + \dfrac{z^2}{30^2} = 1 \quad , \qquad z \geq 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad [111.1]$$

Agregamos la restricción $z \geq 0$ dado que se trata de una semielipse: la porción de la elipse que queda sobre el plano $xy$. La variable que no se anula en dicha expresión, y que no se mide en el eje de revolución es $x$, la reemplazamos por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

La ecuación de la cubierta por lo tanto es:

$$\frac{x^2}{60^2} + \frac{y^2}{60^2} + \frac{z^2}{30^2} = 1 \quad , z \geq 0 \qquad [111.2]$$

La *Figura* 3.115 muestra la representación gráfica de la superficie.

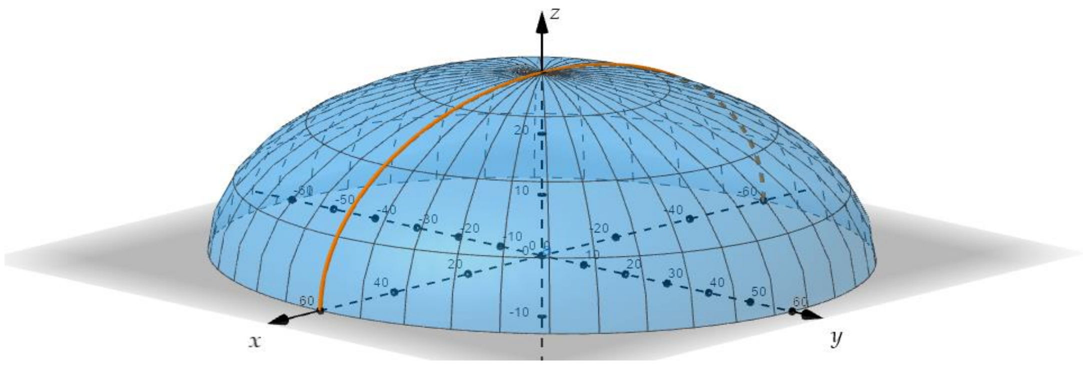



*Figura* 3.115.

b) La ecuación de un plano horizontal a 10m de altura es $z = 10$. Obtenemos la intersección mediante el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{60^2} + \frac{y^2}{60^2} + \frac{z^2}{30^2} = 1 \\ z = 10 \end{cases} \qquad [111.3]$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera, tenemos:

$$\frac{x^2}{60^2} + \frac{y^2}{60^2} = 1 - \frac{10^2}{30^2} = \frac{8}{9} \qquad [111.4]$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8}{9}60^2 \ ; \quad x^2 + y^2 = 3200 \qquad [111.5]$$

Es decir, tenemos una circunferencia centrada en el eje $z$, de radio $r = 40\sqrt{2}$, contenida en el plano $z = 10$. La $Figura$ 3.116 muestra la intersección analizada.

La ecuación vectorial paramétrica de dicha curva es:

$$(x, y, z) = \left(40\sqrt{2}cos\theta\, , 40\sqrt{2}sen\theta\, , 10\right) \ , \theta\epsilon[0,2\pi) \qquad [111.6]$$

o bien:

$$(x, y, z) = (0,0,10) + \left(40\sqrt{2}cos\theta\, , 40\sqrt{2}sen\theta\, , 0\right) \ , \theta\epsilon[0,2\pi) \qquad [111.7]$$

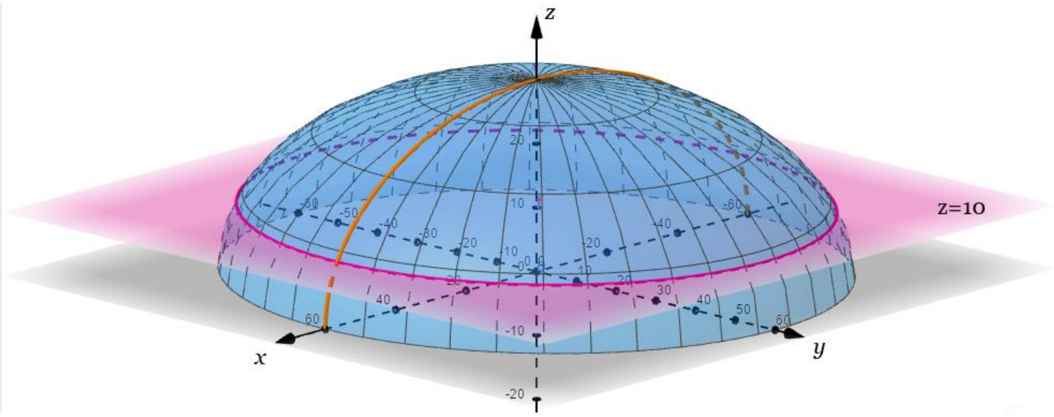



*Figura* 3.116. [GeoGebra]

## 112.

a) Elegimos un sistema coordenado tal que el plano $xy$ coincide con el plano del terreno, y el eje z se ubica sobre el eje del hiperboloide. La garganta (la parte más estrecha del hiperboloide) indica la altura del centro de la superficie, por lo tanto, las coordenadas de dicho punto son C(0;0;40). Como es un hiperboloide de revolución, de una hoja, y con eje sobre el eje z, su ecuación estará dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{(z - 40)^2}{c^2} = 1 \qquad [112.1]$$

Para conocer los valores $a$ y $c$, buscamos puntos de coordenadas conocidas que pertenezcan a la superficie, reemplazamos sus coordenadas en la ecuación y despejamos.

Ubicamos un punto situado sobre la garganta, por ejemplo A(15;0;40), y otro situado en la base, por ejemplo B(71,2 ;0;0). Debemos tener en cuenta que los datos del problema indican diámetros (de la garganta y de la base). Como el eje $z$ está centrado, las coordenadas en $x$ de los puntos corresponden al radio y no al diámetro:

$$A(15,0,40) \;\; \rightarrow \;\; \frac{15^2}{a^2}+\frac{0^2}{a^2}-\frac{(40-40)^2}{c^2}=1 \;\; \Longrightarrow a^2=15^2 \qquad a=15 \qquad [112.2]$$

$$B(71{,}2\;;\;0\;;\;0) \;\; \rightarrow \;\; \frac{71{,}2^2}{15^2}+\frac{0^2}{15^2}-\frac{(0-40)^2}{c^2}=1 \;\; \Longrightarrow c^2=\frac{40^2\,.\,15^2}{71{,}2^2-15^2} \qquad [112.3]$$

$$\approx 74.3 \qquad c \approx 8{,}6$$

b) La Figura 112.1 muestra la superficie, cuya ecuación cartesiana es:

$$\frac{x^2}{15^2}+\frac{y^2}{15^2}-\frac{(z-40)^2}{8{,}6^2}=1 \;\; ; \;\; 0 \le z \le 60 \qquad [112.4]$$

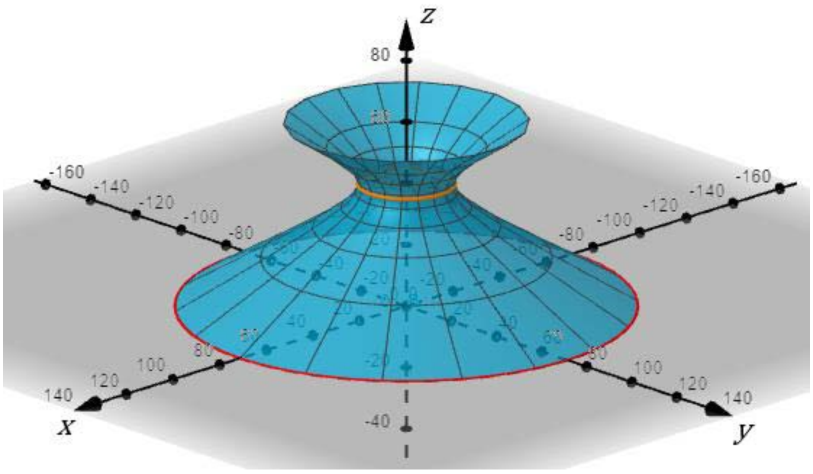



*Figura* 3.117. [GeoGebra]

# 113.

a)

*Intersecciones con los ejes coordenados:*

- Intersección con el eje $x$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1 \qquad \rightarrow x=\pm 5 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad [113.1]$$

Las intersecciones con el eje $x$ son los puntos A(5,0,0) y B(-5,0,0)

- Intersección con el eje $y$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1 \quad \rightarrow y = \pm 3 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad [113.2]$$

Las intersecciones con el eje $y$ son los puntos C(0,3,0) y D(0,-3,0)

- Intersección con el eje $z$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1 \quad \rightarrow z^2 = -36 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad [113.3]$$

Sin solución. La superficie NO tiene intersección con el eje $z$.

*Trazas*

- Traza en el plano $xy$ $(z = 0)$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad [113.4]$$

La traza en el plano $xy$ es una elipse centrada de semiejes $a$=5 y $b$=3, con eje focal sobre el eje $x$.

- Traza en el plano $xz$ $(y = 0)$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{36} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad [113.5]$$

La traza en el plano $xz$ es una hipérbola centrada de semiejes $a$=5 y $b$=6, con eje focal sobre el eje $x$.

- Traza en el plano $yz$ $(x = 0)$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad [113.6]$$

La traza en el plano $yz$ es una hipérbola centrada de semiejes $a$=3 y $b$=6, con eje focal sobre el eje $y$.

*Intersección con planos paralelos a los coordenados*

- Intersección con planos paralelos al plano $xy$ $(z = k)$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 + \frac{k^2}{36} \\ z = k \end{cases} \qquad [113.7]$$

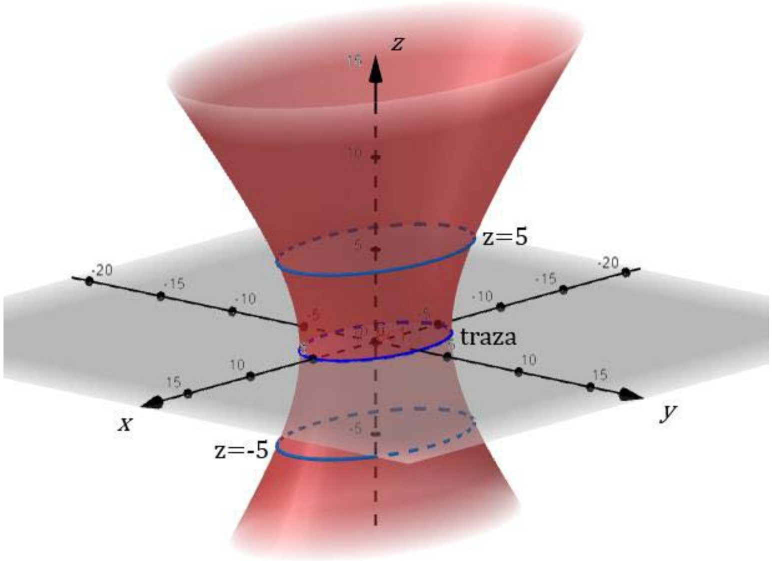
$$\frac{x^2}{25(1+k^2/36)}+\frac{y^2}{9(1+k^2/36)}=1 \quad k\epsilon R \qquad [113.8]$$

Obtenemos la ecuación de una familia de elipses (contenidas en distintos planos, según $z=k$), todas centradas respecto del eje $z$ y con eje focal paralelo al eje $x$. Sus semiejes crecen proporcionalmente conforme $|k|$ crece.

La $Figura$ 3.118 muestra los lugares geométricos obtenidos a partir de la intersección de la superficie analizada con planos paralelos al plano $xy$.

- Intersección con planos paralelos al plano $yz$ ($x=k$):

$$\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1 \\ x=k\end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1-\frac{k^2}{25} \qquad [113.9]$$




$Figura$ 3.118. [GeoGebra]

Para analizar la ecuación [113.9] resultante, debemos tener en cuenta que el miembro de la derecha de la igualdad puede ser positivo, negativo o nulo, según cómo varía el parámetro $k$.

Si $|k|<5$: el miembro derecho es positivo, entonces:

$$\frac{y^2}{9(1-k^2/25)}-\frac{z^2}{36(1-k^2/25)}=1 \quad |k|<5 \qquad [113.10]$$

Obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas (contenidas en distintos planos, según $x=k$), todas centradas respecto al eje $x$, con eje focal paralelo al eje $y$. Sus semiejes decrecen proporcionalmente conforme $|k|$ crece.

Si $|k|=5$: el miembro derecho es nulo, entonces:

$$\frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{36} \Rightarrow z = \frac{6}{3}y\ ;\ z = -\frac{6}{3}y \qquad [113.11]$$

Obtenemos dos rectas contenidas en el plano $x = 5$ (y otras dos en el plano $x = -5$)

Si $|k| > 5$: el miembro derecho es negativo, entonces, si multiplicamos ambos lados de la igualdad por (-1), tenemos:

$$-\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = \frac{k^2}{25} - 1 \qquad [113.12]$$

$$-\frac{y^2}{9(k^2/25-1)} + \frac{z^2}{36(k^2/25-1)} = 1 \quad |k| > 5 \qquad [113.13]$$

Obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas (contenidas en distintos planos, según $x = k$), todas centradas respecto al eje $x$, con eje focal paralelo al eje $z$. Sus semiejes crecen proporcionalmente conforme $|k|$ crece. La *Figura* 3.119 muestra las secciones halladas por intersección de la superficie con planos paralelos al plano $yz$.

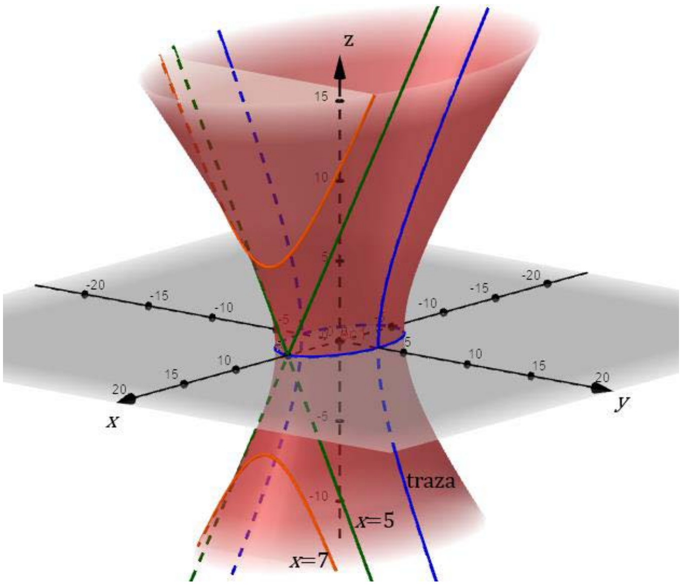



*Figura* 3.119. [GeoGebra]

- Intersección con planos paralelos al plano $xz$ ($y = k$):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = 1 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{36} = 1 - \frac{k^2}{9} \qquad [113.14]$$

Para analizar la ecuación resultante, debemos tener en cuenta que el miembro de la derecha de la igualdad puede ser positivo, negativo o nulo, según cómo varía el parámetro $k$.

- Si $|k| < 3$: el miembro derecho es positivo, entonces:

$$\frac{x^2}{25(1-k^2/9)}-\frac{z^2}{36(1-k^2/9)}=1 \quad |k|<3 \tag{113.15}$$

Obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas (contenidas en distintos planos, según $y=k$), todas centradas respecto al eje $y$, con eje focal paralelo al eje $x$. Sus semiejes decrecen proporcionalmente conforme $|k|$ crece.

- Si $|k|=3$: el miembro derecho es nulo, entonces:

$$\frac{x^2}{25}=\frac{z^2}{36} \Rightarrow z=\frac{6}{5}x \ ; \ z=-\frac{6}{5}x \tag{113.16}$$

Obtenemos dos rectas contenidas en el plano $y=3$ (y otras dos en el plano $y=-3$)

- Si $|k|>3$: el miembro derecho es negativo, entonces, si multipicamos ambos lados de la igualdad por (-1), tenemos:

$$-\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{36}=\frac{k^2}{9}-1 \tag{113.17}$$

$$-\frac{x^2}{25(k^2/9-1)}+\frac{z^2}{36(k^2/9-1)}=1 \quad |k|>3 \tag{113.18}$$

Obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas (contenidas en distintos planos, según $y=k$), todas centradas respecto al eje $y$, con eje focal paralelo al eje $z$. Sus semiejes crecen proporcionalmente conforme $|k|$ crece.

b) Análisis de simetría:

Como las tres variables se encuentran elevadas al cuadrado, la ecuación permanece igual al cambiar el signo de cualquiera de ellas.

Entonces, la superficie es simétrica respecto a los tres ejes coordenados, a los tres planos coordenados y respecto al origen.

b) Ver *Figuras* 3.118 y 3.119.

## 114.

El eje de una superficie cónica es la recta que pasa por el vértice y por el centro de la curva directriz.

Siendo $L_1$ el eje de la superficie 1, y $L_2$ el eje de la superficie 2, obtenemos sus ecuaciones:

$L_1$: El centro de la directriz D1 es el punto C1(10,0,2).

Entonces:

$$\boldsymbol{d_{L1}}=\boldsymbol{C1V1}=(10-10\,,20-0\,,2-2)=(0,20,0) \tag{114.1}$$

$$L_1:(x,y,z)=(10,0,2)+t(0,20,0) \quad t\epsilon R \tag{114.2}$$

$L_2$: El centro de la directriz D2 es el punto C2(3,10,0).

Entonces:

$$\boldsymbol{d_{L2}} = \boldsymbol{C2V2} = (3-3\,,10-10\,,20-0) = (0,0,20) \qquad [114.3]$$

$$L_1: (x,y,z) = (3,10,0) + k(0,0,20) \quad k\epsilon R \qquad [114.4]$$

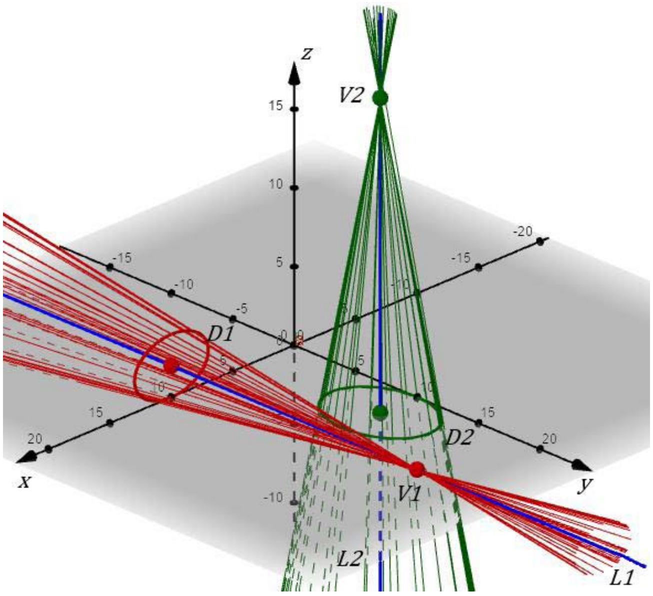
Para determinar la posición relativa entre ambas rectas, obtenemos el vector:

$$\boldsymbol{C1C2} = (3-10, 10-0, 0-2) = (-7,10,-2) \qquad [114.5]$$

Ahora evaluamos el producto mixto entre los vectores directores y el vector $\boldsymbol{C1C2}$

$$\boldsymbol{d_{L1}} \times \boldsymbol{d_{L2}} \cdot \boldsymbol{C1C2} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ -7 & 10 & -2 \end{vmatrix} = -20[0-(-7)20] = -2800 \qquad [114.6]$$

Como el producto mixto es distinto de cero, concluimos que las rectas son $alabeadas$. En la $Figura$ 3.120 es posible observa las rectas mencionadas.




$Figura$ 3.120. [GeoGebra]

## 115.

a) $i$) La superficie dada es un elipsoide. Para analizar la intersección del mismo con los planos indicados, se procede a formar los correspondientes sistemas de ecuaciones. A partir de la resolución de estos sistemas, se obtiene la intersección buscada en cada uno de los casos.

$$\begin{cases} 49x^2 + 49y^2 + 9z^2 - 441 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow 49x^2 + 9z^2 = 245 \qquad [115.1]$$

$$\frac{x^2}{5}+\frac{z^2}{245/9}=1 \qquad [115.2]$$

Se trata de una curva elíptica, por lo tanto, usamos la parametrización ya estudiada, teniendo en cuenta que $y=2$:

$$(x,y,z)=(\sqrt{5}cos\theta\,,2\,,\sqrt{245}/3sen\theta)\,,\theta\epsilon[0,2\pi) \qquad [115.3]$$

$$ii)\begin{cases}49x^2+49y^2+9z^2-441=0\\ x+y=0\end{cases} \rightarrow 49x^2+49(-x)^2+9z^2=441 \qquad [115.4]$$

$$\frac{x^2}{9/2}+\frac{z^2}{49}=1 \qquad [115.5]$$

También obtenemos una curva elíptica, que parametrizamos de la siguiente forma, teniendo en cuenta que $y=-x$:

$$(x,y,z)=(3/\sqrt{2}cos\theta\,,-3/\sqrt{2}cos\theta\,\;,7sen\theta)\;\,,\theta\epsilon[0,2\pi) \qquad [115.6]$$

La *Figura* 3.121 muestra la intersección de los planos dados con el elipsoide.

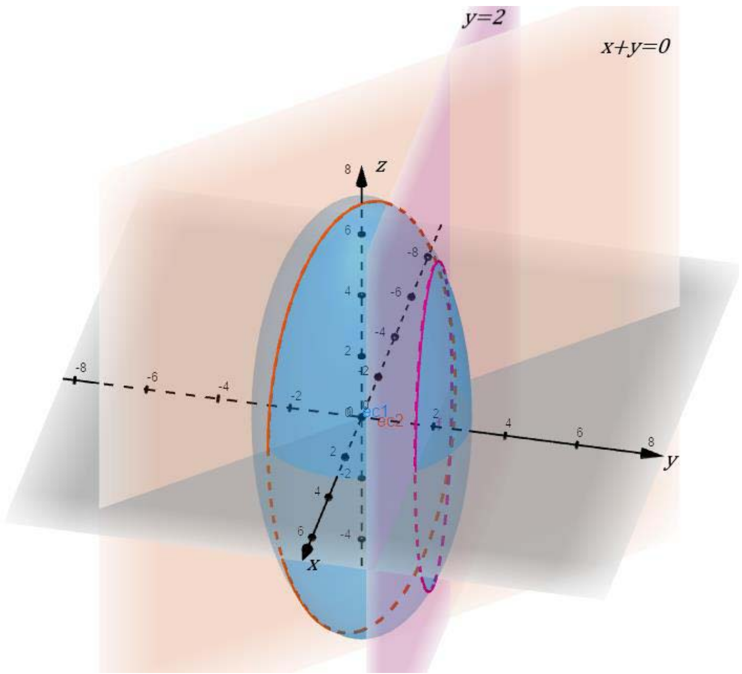



*Figura* 3.121. Representación gráfica del Ejercicio 115 [GeoGebra].

## 116.

En todos los casos tenemos superficies de revolución. Recordemos que las superficies de revolución tienen los mismos coeficientes (tanto en valor como en signo) en los términos cuadráticos de las variables que no se miden a lo largo del eje de revolución.

a) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

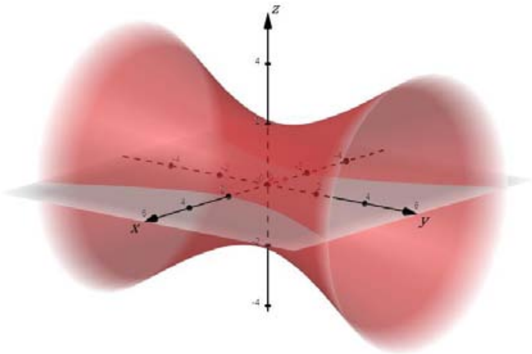


*Figura* 3.122.

b) $$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx$$

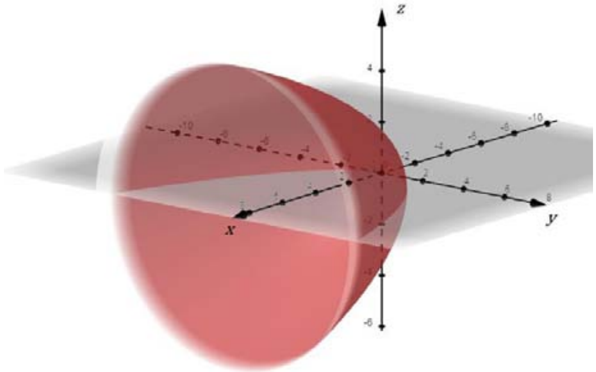


*Figura* 3.123

c) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

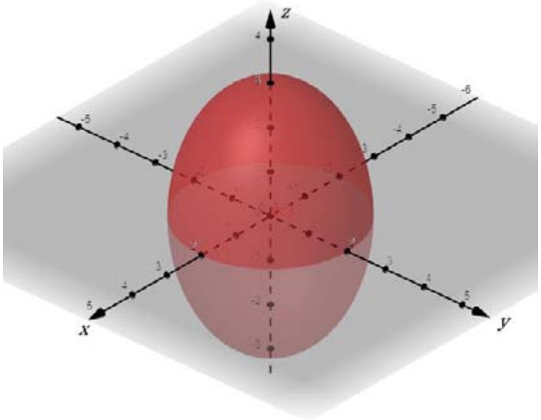


*Figura* 3.124

d) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

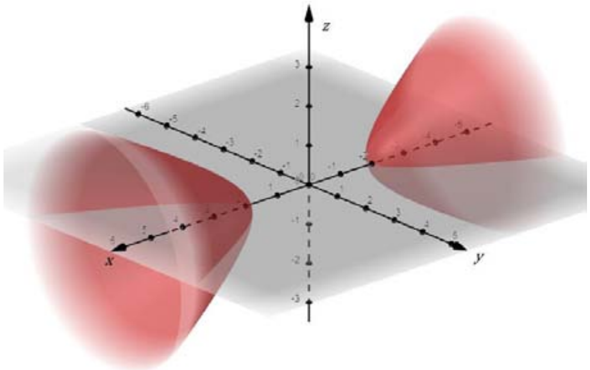


*Figura* 3.125

## 117.

En cada ecuación, operamos algebraicamente dejando de un lado de la igualdad las expresiones que contienen parámetros, y luego aplicando operaciones apropiadas según el caso:

a)

$$\frac{x}{2}=t\ \ ;\ \ \frac{y}{2}=s\quad \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=t^2-s^2=z \qquad [117.1]$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=z\quad \mathit{Paraboloide\ hiperb\acute{o}lico} \qquad [117.2]$$

b)

$$\frac{x}{2}=tch\beta\ \ ;\ \ \frac{y}{2}=tsh\beta\quad \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=t^2(ch^2\beta-sh^2\beta)=t^2=z \qquad [117.3]$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=z\quad \mathit{Paraboloide\ hiperb\acute{o}lico} \qquad [117.4]$$

c) Vemos que ambas parametrizaciones corresponden a la misma superficie cuádrica. En general, es posible parametrizar de varias formas un lugar geométrico dado.

d)

$$\frac{x+2}{5}=cos\alpha sen\beta\ \ ;\ \ \frac{y+2}{2}=sen\alpha sen\beta\ \ ;\ \ \frac{z-2}{9}=cos\beta \qquad [117.5]$$

$$\left(\frac{x+2}{5}\right)^2+\left(\frac{y+2}{2}\right)^2+\left(\frac{z-2}{9}\right)^2=\cos^2\alpha\, sen^2\beta+sen^2\alpha sen^2\beta+\cos^2\beta \qquad [117.6]$$

$$=sen^2\beta(\cos^2\alpha+sen^2\alpha)+\cos^2\beta=sen^2\beta+\cos^2\beta=1 \qquad [117.7]$$

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{4}+\frac{(z-2)^2}{81}=1\quad \mathit{Elipsoide} \qquad [117.8]$$

e)

$$\frac{x-3}{3}=tcos\alpha\ \ ;\ \ \frac{y-3}{5}=tsen\alpha\ \ ;\ \ z+2=t^2 \qquad [117.9]$$

$$\left(\frac{x-3}{3}\right)^2+\left(\frac{y-3}{5}\right)^2=t^2(\cos^2\alpha+sen^2\alpha)=t^2=z+2 \qquad [117.10]$$

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{25}=z+2\quad \mathit{Paraboloide\ El\acute{i}ptico} \qquad [117.11]$$

Las *Figuras* 3.126, 3.127 y 3.128 muestran las representaciones graficas de las superficies halladas.

a) y b)

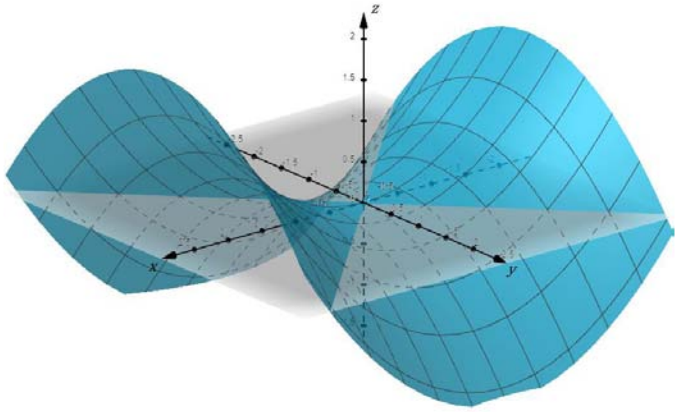



*Figura* 3.126. [GeoGebra]

d)

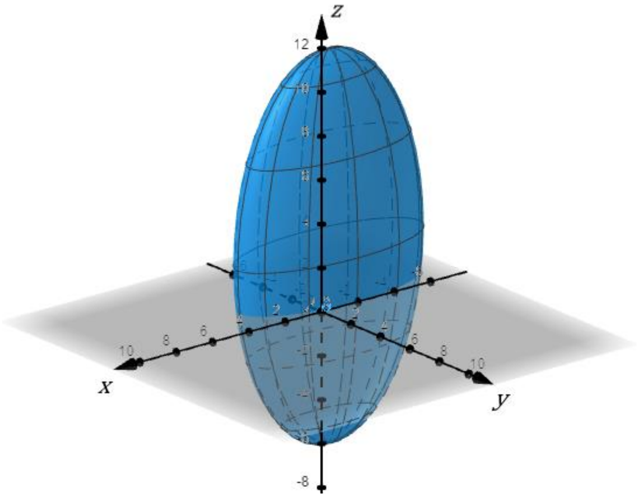



*Figura* 3.127. [GeoGebra]

e)

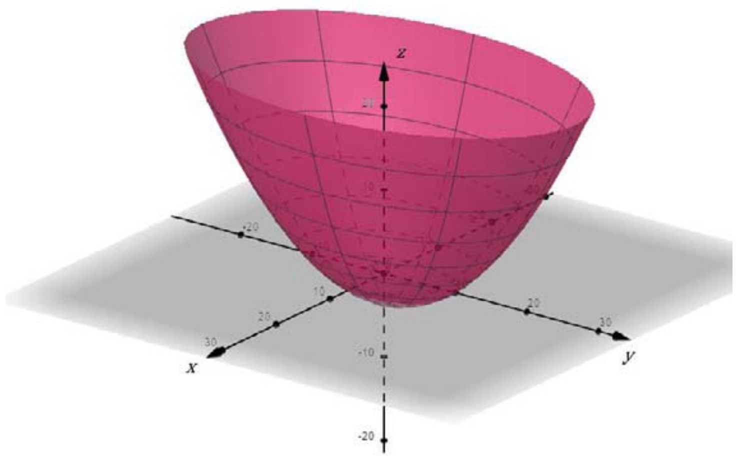



*Figura* 3.128. [GeoGebra]

## 118.

a) Familia de esferas con centro (1,-3,5):

b) Las esferas de esta familia podrán tener diferentes radios, por lo tanto, podemos tomar como parámetro de la familia el valor $r^2 = t$, con $t\,\epsilon(0,\infty)$. Notar que el parámetro debe ser positivo (ya que representa una cantidad elevada al cuadrado), y no puede ser nulo porque en tal caso no tendríamos una esfera sino un punto. La ecuación de la familia es:

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=t \quad ; \quad t\epsilon(0,\infty) \qquad [118.1]$$

La *Figura* 3.29 muestra la representación gráfica de tres elementos pertenecientes a la familia de esferas dada por la ecuación [118.1]. Estas esferas corresponden a los a los valores de parámetro $t$=2, $t$=4 y $t$=9.

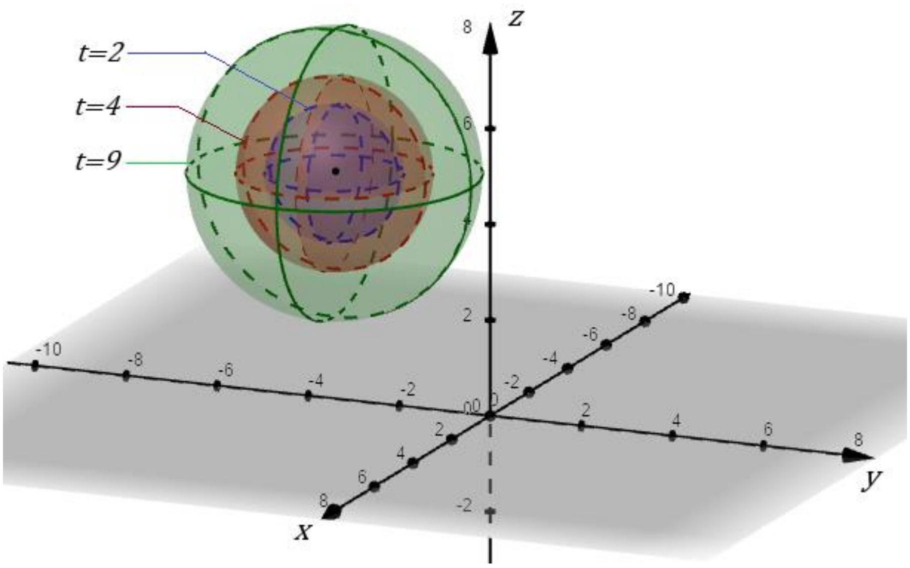



*Figura* 3.129. [GeoGebra]

c) Familia de paraboloides de revolución de vértice $V$(0,3,0):

En este caso, es posible escribir tres familias distintas, cada una con eje de revolución paralelo a cada eje coordenado. Escribiremos la ecuación de la familia con eje de revolución paralelo al eje $x$.

La ecuación de un paraboloide de revolución con dichas características es:

$$\frac{(y-3)^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=ax \qquad [118.2]$$

Para que sea de revolución, los términos de $y^2$ y $z^2$ deben tener iguales coeficientes. Entonces podemos escribir la ecuación de la siguiente manera:

$$(y-3)^2+z^2=ab^2x \qquad [118.3]$$

Dejaremos como parámetro de la familia el valor de $ab^2 = t$, que indica la apertura del paraboloide y podrá tomar cualquier valor real excepto el cero (valor para el cual tendríamos el eje de revolución, es decir, todos los puntos de coordenadas ($x$,3,0)).

Ecuación de la familia:

$(y-3)^2 + z^2 = tx \quad ; \quad t\epsilon R - \{0\}$ [118.4]

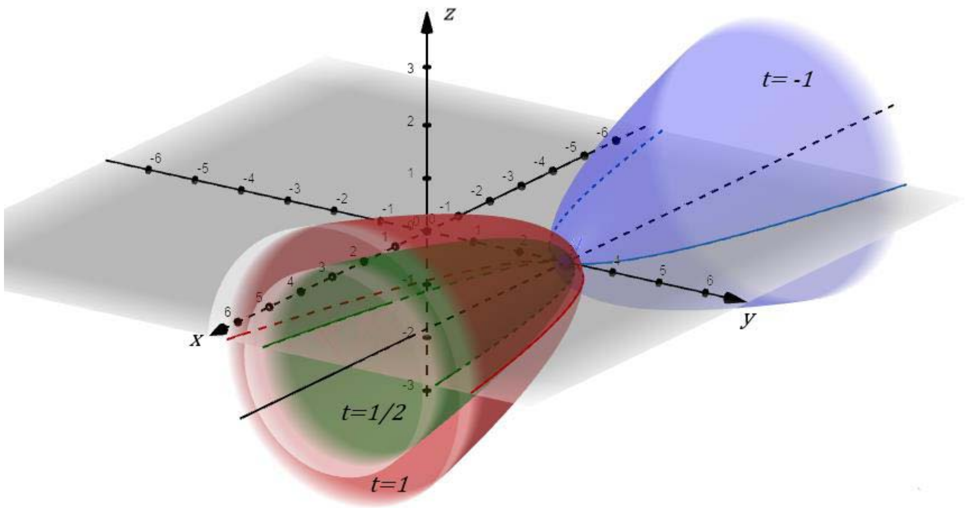



*Figura* 3.130. [GeoGebra]

d) Familia de paraboloides de revolución de vértice variable, con eje de revolución el eje $y$. En este caso, también es posible escribir varias familias distintas, dependiendo del parámetro que elijamos. Podemos permitir o no que varíe la apertura de los paraboloides. También podemos variar las tres coordenadas del vértice, dos o una sola.

Escribiremos la ecuación de la familia manteniendo la apertura constante, y sólo variando la posición del vértice de coordenadas $V(0,t,0)$, que podrá moverse a lo largo del eje de revolución. La ecuación de la familia será:

$x^2 + z^2 = y - t \quad ; \ t\epsilon R$ [118.5]

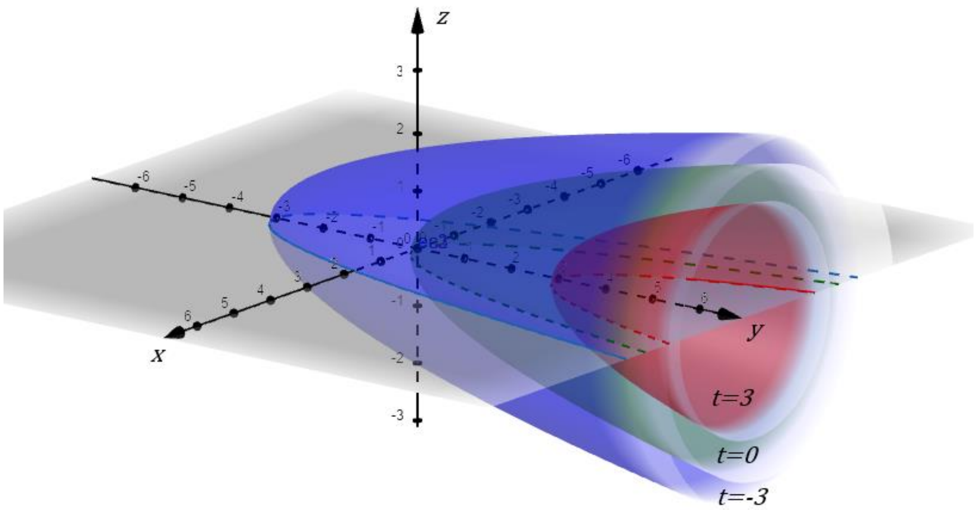



*Figura* 3.131. [GeoGebra]

# 3.10. LUGARES GEOMÉTRICOS en COORDENADAS POLARES CILÍNDRICAS y ESFÉRICAS

## 119.

$i$) La ecuación $y = 8x$ corresponde a una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente $m = 8$. Si situamos el polo de un sistema de coordenadas polares coincidente con el origen de coordenadas y el eje polar coincidente con el eje positivo de abscisas $x$, entonces los puntos de la recta con la que estamos trabajando serán todos los puntos tales que el vector que se extiende desde el polo hasta el punto tendrá un ángulo igual que la recta en coordenadas cartesianas:

$$tan(\varphi) = 8 \qquad [119.1]$$

$$\varphi = arctan(8) \qquad [119.2]$$

Tenemos dos opciones de ángulos que tienen tangente igual 8, una es un ángulo del primer cuadrante y la otra es un ángulo del tercer cuadrante.

$\varphi = 82°52'30''$ y $\varphi = 262°52'30''$

Debemos considerar los dos ángulos debido a que el valor de $\rho$ no puede ser negativo, por ende si solo consideráramos $\varphi = 82°52'30''$ estaríamos expresando una semirrecta, es decir la mitad de los puntos que componen la recta $y = 8x$.

Por ende, la forma polar de dicha recta es:

$$\varphi = 82°52'30'' \;\cup\; \varphi = 262°52'30'' \qquad [119.3]$$

*Observación*:

Otra ecuación en coordenadas polares para la recta $y = 8x$ se puede obtener aplicando ecuaciones de transformación de coordenadas y la ecuación sería:

$$\rho\ sen\ \varphi = 8\rho \cos\varphi \qquad [119.4]$$

$$0 = \rho(8cos\varphi - sen\ \varphi) \qquad [119.5]$$

$ii$) La ecuación: $x^2 + y^2 = 49$ corresponde a una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio igual a 7. Recordamos que la ecuación en coordenadas polares de una circunferencia es:

$$r^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi - \varphi_1) \qquad [119.6]$$

Donde $r$ es el radio y las coordenadas del centro son $C(\rho_1, \varphi_1)$. Si situamos el polo de un sistema de coordenadas polares coincidente con el origen de coordenadas y el eje polar coincidente con el eje positivo de las abscisas $x$, entonces las coordenadas del centro serán: $C(0, \varphi)$. Remplazamos esta información en la ecuación de la circunferencia y obtenemos:

$$7^2 = \rho^2 + 0 - 2\rho(0)\cos(\varphi - \varphi) \quad [119.7]$$

Entonces la forma polar de la ecuación de la circunferencia de radio 7 y centro en el origen de coordenadas será:

$$\rho = 7 \quad [119.8]$$

*iii*) La ecuación: $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$ corresponde a una circunferencia. Debemos encontrar la ecuación canónica de la misma para poder encontrar las coordenadas del centro y el radio que es la información que necesitamos para poder escribir la forma polar de dicha ecuación. Completamos cuadrado y despejamos:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 9 = 0 \quad [119.9]$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 10 \quad [119.10]$$

Entonces el radio es $\sqrt{10}$ y las coordenadas cartesianas del centro son: $C_c(1{,}0)$. En coordenadas polares corresponderá $\rho_1 = 1 \; y \; \varphi_1 = 0$, entonces: $C(1{,}0)$. Remplazamos esta información en la ecuación de la circunferencia en coordenadas polares:

$r^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi - \varphi_1)$ y obtenemos la forma polar de la ecuación de la circunferencia.

$$10 = \rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\varphi) \quad [119.11]$$

$$9 = \rho^2 - 2\rho\cos(\varphi) \quad [119.12]$$

*Observación*:

Otra forma de obtener a la ecuación en coordenadas polares es aplicando ecuaciones de transformación de coordenadas.

$$x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$$

$$[\rho\cos(\varphi)]^2 + [\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)]^2 - 2\rho\cos(\varphi) - 9 = 0$$

$$\rho^2 - 2\rho\cos(\varphi) - 9 = 0$$

## 120.

Recordemos que la ecuación de una cónica en coordenadas polares es de la forma:

$$\rho = \frac{e\,p}{1 - e\,cos\theta}$$

Realizando una comparación con la ecuación del enunciado podemos extraer la siguiente información: e = 1, $e.p = 6$ y por lo tanto, $p = 6$. Sabemos que, si la excentricidad es 1, estamos en presencia de una parábola. Si ubicamos un sistema de ejes cartesianos que tenga origen en el foco de la parábola y el eje positivo de las abscisas $x$ coincidente con el eje polar, las coordenadas de algunos puntos significativos de la parábola en ambos sistemas son los indicados en la *Tabla* 3.16.

| **Punto** | $\boldsymbol{\theta}$ | **cos** $\boldsymbol{\theta}$ | $\boldsymbol{\rho}$ | **Coord. Polares** | **Coord. Cartesianas** |
|---|---|---|---|---|---|
| - | 0 | 1 | - | - | - |
| Extremo LR | π/2 | 0 | 6 | A(6, π/2) | A(0, 6) |
| Vértice | π | -1 | 3 | V(3, π) | V(-3, 0) |
| Extremo LR | 3π/2 | 0 | 6 | A'(6, 3π/2) | A'(0, -6) |

*Tabla* 3.16. Elementos de la cónica del Ejercicio 120.

La *Figura* 3.132 muestra la representación de la parábola indicada.

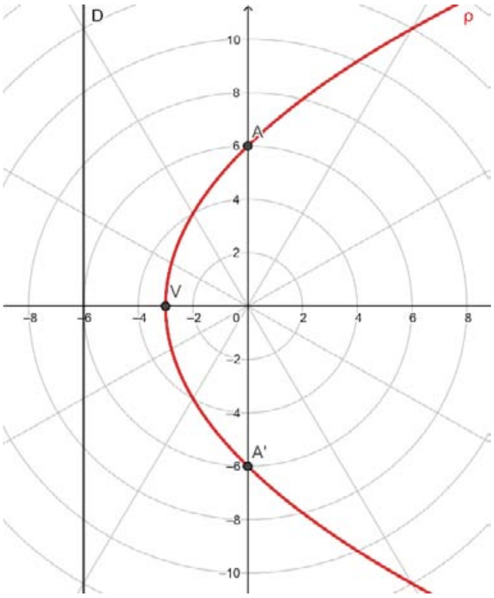



*Figura* 3.132. [GeoGebra]

Según el sistema elegido y teniendo en cuenta que el significado del parámetro $p$ es el mismo en ambos sistemas, es decir sigue siendo la distancia entre el foco y la directriz, podemos plantear la ecuación de la parábola con foco en el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje de las abscisas.

Partiendo de la ecuación cartesiana de la parábola con eje focal paralelo al eje $x$:

$$(y-k)^2 = 2\,.\,p\,(x-h) \qquad [120.1]$$

Remplazamos $V(-3,0)$ y $p = 6$:

$$y^2 = 12\,(x+3) \qquad [120.2]$$

## 121.

$$i)\ \rho = \frac{6}{1+\frac{1}{2}\,cos\theta}$$

Recordamos que en coordenadas polares, la ecuación de una cónica con eje focal paralelo al eje $x$ es $\rho = \frac{e\,p}{1+e\,cos\theta}$ , entonces por comparación con la ecuación del enunciado, podemos deducir la excentricidad es $e = 1/2$, se trata de una elipse por ser $e < 1$.

El producto $pe = 6$, por lo tanto, el parámetro es $p = 12$ y $|LR| = 2ep = 12$.

La función coseno del denominador nos indica que el eje focal de la cónica resulta paralelo o coincidente al eje polar, y el signo positivo que acompaña dicha función nos determina que la directriz asociada al foco coincidente con el polo se encuentra a la derecha del mismo, siendo ésta por definición perpendicular al eje focal.

Esto surgirá de la tabla de valores generada con los puntos de intersección con el eje polar y el eje auxiliar a 90° (ver *Tabla* 3.17)

| $\theta$ | $\cos\theta$ | $\rho$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 4 |
| π/2 | 0 | 6 |
| π | -1 | 12 |
| 3π/2 | 0 | 6 |

*Tabla* 3.17. Elementos de la cónica del Ejercicio 121.*i*.

Identificamos las coordenadas polares de los vértices $V_1(4;0)$, $V_2(12;\pi)$ y los extremos del lado recto $A\left(6;\frac{\pi}{2}\right)$ y $A'\left(6;\frac{3\pi}{2}\right)$.

Buscamos las coordenadas polares de los focos y del centro, que no pertenecen a la curva. La distancia entre los vértices $V_1$ y $V_2$ que se sitúan sobre el eje focal es 16, por lo que el semieje mayor mide 8, podemos deducir que la distancia del centro al foco es 4, por lo que: $F_1(0;0)$, $F_2(8;\pi)$, $C(4;\pi)$. La *Figura* 3.133 muestra la elipse hallada.

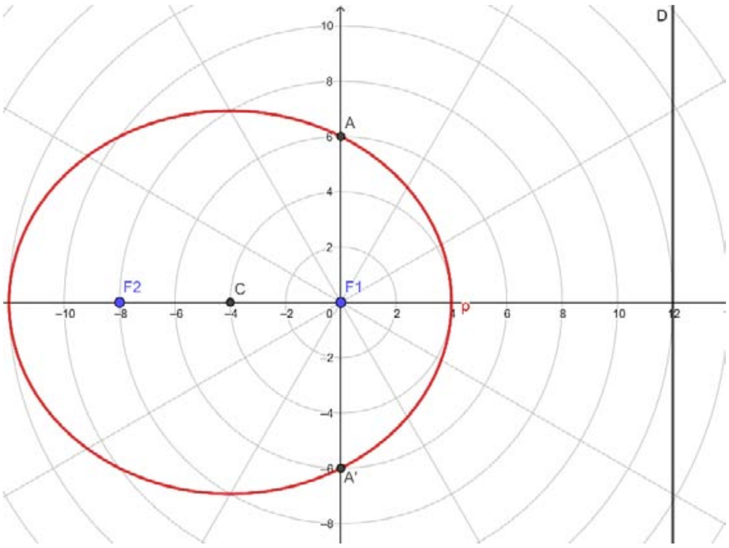



*Figura* 3.133. [GeoGebra]

$ii)\ \rho = \frac{6}{1 + cos\theta}$

Podemos deducir la excentricidad es $e = 1$, por lo tanto, estamos en presencia de una parábola.

El producto $pe = 6$, por lo tanto, el parámetro es $p = 6$ y $|LR| = 2ep = 12$.

La directriz es perpendicular al eje polar y se encuentra a la derecha del polo, lo cual surgirá también de la tabla de valores que planteamos a continuación:

Buscamos las intersecciones con el eje polar y el eje auxiliar a 90°:

| $\theta$ | $\cos\theta$ | $\rho$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 |
| π/2 | 0 | 6 |
| π | -1 | - |
| 3π/2 | 0 | 6 |

*Tabla* 3.18. Puntos de la cónica del Ejercicio 121.$ii$.

Identificamos las coordenadas del vértice $V(3; 0)$ y los extremos del lado recto $A\left(6; \frac{\pi}{2}\right)$ y $A'\left(6; \frac{3\pi}{2}\right)$.

La Figura 3.134 muestra la parábola hallada.

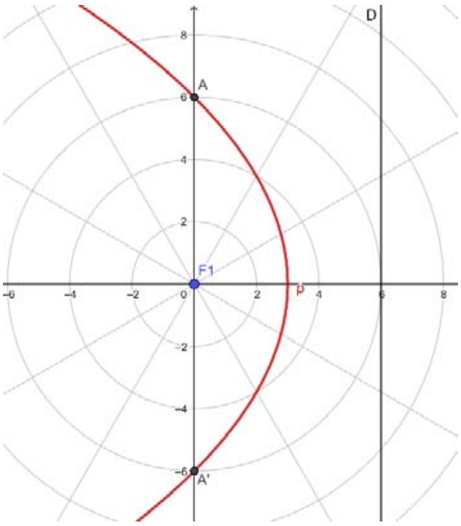



*Figura* 3.134. [GeoGebra]

- $\rho = \frac{12}{2 - sen\theta}$

Para identificar la cónica, debemos trabajar en la ecuación de manera tal que, en el denominador, el término independiente sea igual a 1:

$$\rho = \frac{12}{2\left(1 - \frac{1}{2}sen\theta\right)} = \frac{6}{1 - \frac{1}{2}sen\theta} \qquad [121.1]$$

Podemos deducir que la excentricidad es $e = 1/2$, por lo tanto, estamos en presencia de una elipse. El producto $pe = 6$, por lo tanto, el parámetro es $p = 12$ y $|LR| = 2ep = 12$. La directriz es paralela al eje polar, por ser la función trigonométrica del denominador $sen\theta$ y se encuentra abajo del polo, por ser el binomio del denominador una resta, lo cual surgirá a partir de la tabla de valores que planteamos a continuación.

Buscamos las intersecciones con el eje polar y el eje auxiliar a 90°:

| $\boldsymbol{\theta}$ | $\boldsymbol{sen\theta}$ | $\boldsymbol{\rho}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 6 |
| π/2 | 1 | 12 |
| π | 0 | 6 |
| 3π/2 | -1 | 4 |

*Tabla* 3.18. Puntos de la cónica del Ejercicio 121. *iii*.

Identificamos las coordenadas de los vértices $V_1\left(12; \frac{\pi}{2}\right)$, $V_2\left(4; \frac{3\pi}{2}\right)$ y los extremos del lado recto $A(6; 0)$ y $A\acute{}(6; \pi)$. Buscamos las coordenadas de los focos y del centro, que no pertenecen a la curva. La distancia entre los vértices $V_1$ y $V_2$ que se sitúan sobre el eje auxiliar a 90° del eje focal es 16, por lo que el semieje mayor mide 8, podemos deducir que la distancia del centro al foco es 4, por lo que: $F_1(0; 0)$, $F_2\left(8; \frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(4; \frac{\pi}{2}\right)$. La *Figura* 3.135 permite observar la elipse hallada.

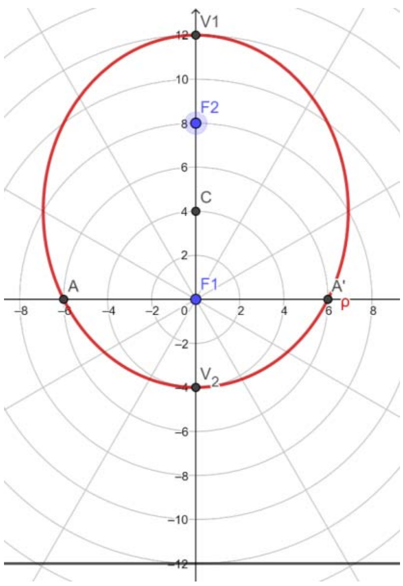



*Figura* 3.135. [GeoGebra]

- $\rho = \frac{12}{2 - 4\,cos\theta}$

Para identificar la cónica, debemos trabajar en la ecuación de manera tal que, en el denominador, el término independiente sea igual a 1:

$$\rho = \frac{12}{2(1 - 2\,cos\theta)} = \frac{6}{1 - 2\,cos\theta} \qquad [121.2]$$

Podemos deducir que la excentricidad es $e = 2$, por lo tanto, estamos en presencia de una hipérbola. El producto $pe = 6$, por lo tanto, el parámetro es $p = 3$ y $|LR| = 2ep = 12$. La directriz es perpendicular al eje polar, por ser la función trigonométrica del denominador $cos\theta$ y se encuentra a la izquierda del polo, por ser el binomio del denominador una resta, lo cual quedará determinado a partir de la tabla de valores que planteamos a continuación. Buscamos las intersecciones con el eje polar y el eje auxiliar a 90°:

| $\boldsymbol{\theta}$ | $\boldsymbol{cos\theta}$ | $\boldsymbol{\rho}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | (-6)! |
| π/2 | 0 | 6 |
| π | -1 | 2 |
| 3π/2 | 0 | 6 |

*Tabla* 3.19. Puntos de la cónica del Ejercicio 124.

Debemos prestar atención al valor negativo de $\rho$ que obtuvimos para un valor de $\theta = 0$. Como vimos al inicio de coordenadas polares, $\rho$ por definición no puede ser negativo. Lo que está sucediendo es que la ecuación nos está reproduciendo el vértice de la otra rama, es decir, ese punto lo encontraremos en $(6; \pi)$. Podemos observar que hay un intervalo de valores de $\theta$ que nos reproducen valores negativos de $\rho$. Observando la expresión de ρ en función de $\theta$, vemos que la única forma de que $\rho$ sea negativo es si el denominador lo es.

$$1 - 2\,cos\theta < 0 \qquad [121.3]$$

$$2\,cos\theta > 1 \qquad [121.4]$$

$$cos\theta > \frac{1}{2} \qquad [121.5]$$

buscamos el valor de $\theta$ que tiene coseno igual a un medio.

$$\theta = arcos\left(\frac{1}{2}\right) \qquad [121.6]$$

$$\theta = 60° \ \ o \ \ \theta = -60° \qquad [121.7]$$

Es decir, que para todos los ángulos comprendidos entre $-60° < \theta < 60°$ los valores de $\rho$ son negativos, por lo que la ecuación estará reproduciendo puntos de la otra rama de la hipérbola.

Para $\theta = 60° \;\; y \;\; \theta = -60°$ no existe valor de $\rho$ debido a la indeterminación en el denominador de la ecuación.

Entonces haciendo un cambio apropiado en el primer punto obtenido en la tabla de valores, identificamos las coordenadas de los vértices $V_1(6;\pi)$, $V_2(2;\pi)$ y los extremos del lado recto $A\left(6;\frac{\pi}{2}\right)$ y $A´\left(6;\frac{3\pi}{2}\right)$. Buscamos las coordenadas de los focos y del centro, que son puntos que no pertenecen a la curva. La distancia entre los vértices $V_1$ y $V_2$ que se sitúan sobre el eje focal es 4, por lo que el semieje real mide 2, podemos deducir que la distancia del centro al foco es 4, por lo que: $F_1(0;0)$, $F_2(8;\pi)$, $C(4;\pi)$. La Figura 121.4 muestra la hipérbola encontrada.

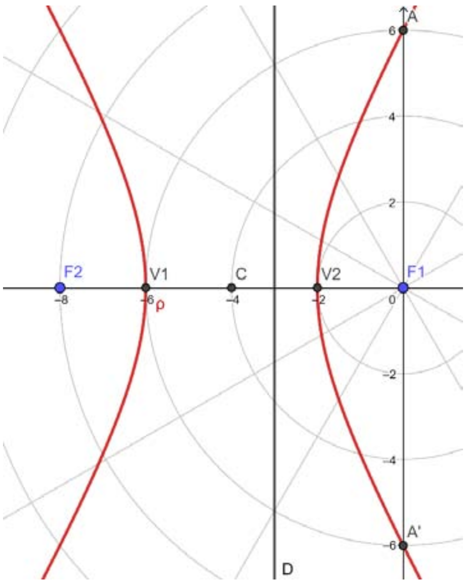



*Figura* 3.136. [GeoGebra]

# 122.

Comenzaremos determinando la ecuación del plano en coordenadas cartesianas. Sabemos que el vector normal es $\boldsymbol{n} = (3, 2, 1)$. Sólo nos queda determinar el valor de $D$, pero como el plano pasa por el origen, podemos deducir que D = 0.

Entonces, en *coordenadas cartesianas* la ecuación del plano es:

$$\pi: 3x + 2y + z = 0 \qquad [122.1]$$

Para plantear la ecuación buscada del plano en *coordenadas cilíndricas* usaremos las tres ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho\ cos\theta \\ y = \rho\ sen\theta \quad \rho \in [0,\infty)\ ;\ \theta \in [0,2\pi) \\ \quad z = z \end{cases} \qquad [122.2]$$

De esta manera, remplazamos las expresiones [122.2] en la ecuación cartesiana del plano [122.1] y de esa manera obtenemos la ecuación del plano en *coordenadas cilíndricas*:

$$\pi: 3\rho\ cos\theta\ +\ 2\rho\ sen\theta\ +\ z = 0\ ; \rho \in [0,\infty)\ ;\ \theta \in [0,2\pi) \qquad [122.3]$$

Hacemos el mismo trabajo para encontrar la ecuación del lugar geométrico en *coordenadas esféricas*, conociendo las tres ecuaciones de transformación, podemos escribir:

$$\begin{cases} x = \rho\ sen\varphi\ cos\theta \\ y = \rho\ sen\varphi\ sen\theta \quad \rho \in [0,\infty)\ ;\ \theta \in [0,2\pi); \varphi\ \in [0,\pi] \\ \quad z = \rho\ cos\varphi \end{cases} \qquad [122.4]$$

Por lo tanto, la ecuación del plano en *coordenadas esféricas* es:

$\pi: 3\rho\ sen\varphi\ cos\theta\ +\ 2\rho\ sen\varphi\ sen\theta\ + \rho\ cos\varphi = 0$ con $\rho \in [0,\infty)\ ;\ \theta \in [0,2\pi); \varphi\ \in [0,\pi]$ [122.5]

## 123.

a) Los puntos del espacio tridimensional que satisfacen la ecuación $\rho = 5$, son aquellos cuyas coordenadas cilíndricas son $P(5,\theta,z)$, es decir que las coordenadas $\theta$ y z son libres. El conjunto de dichos puntos constituye un cilindro recto de radio 5 con eje el eje z, tal como muestra la Figura 3.137.

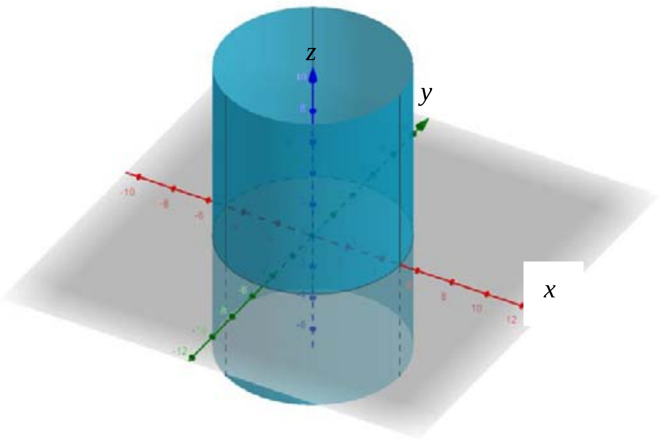
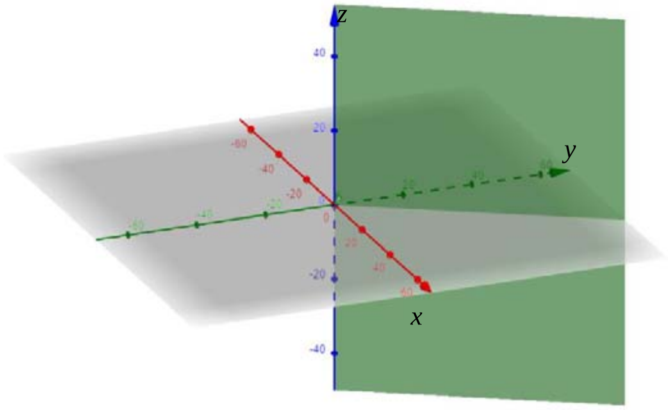


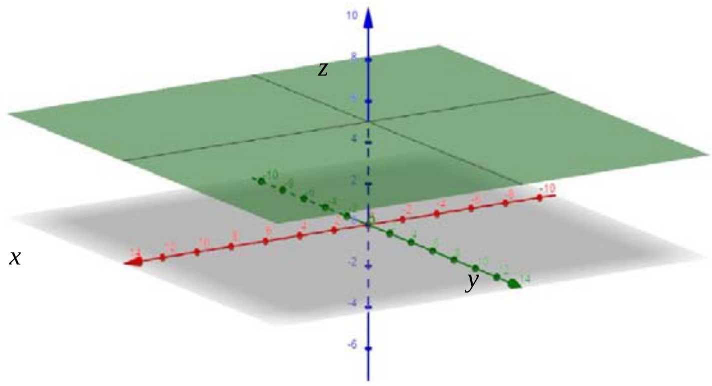

*Figura* 3.137. [GeoGebra]

b) Los puntos del espacio tridimensional que satisfacen la ecuación $\theta = \pi/3$ son aquellos cuyas coordenadas cilíndricas son $P(\rho,\pi/3,z)$, es decir que las coordenadas $\rho$ y z son libres. El conjunto de dichos puntos constituye un semiplano que contiene al eje $z$ y que forma un ángulo de $\theta = \pi/3$ con el eje $polar$ (coincidente con el eje $x$). El semiplano puede observarse en la $Figura$ 3.138




$Figura$ 3.138. [GeoGebra]

c) Los puntos del espacio tridimensional que satisfacen la ecuación z=5 son aquellos cuyas coordenadas cilíndricas son $P(\rho, \theta, 5)$, es decir que las coordenadas $\rho$ y $\theta$ son libres. El conjunto de dichos puntos es un plano que dista 5 unidades del plano polar y se puede observar en la Figura 3.139.




$Figura$ 3.139. [GeoGebra]

## 124.

A los efectos de escribir las ecuaciones de los lugares geométricos buscados y representarlos gráficamente en las $Figuras$ 124.1, 124.2 y 124.3, se seleccionaron los ejemplos siguientes:

a) Curvas de trébol: $\rho = 2\ sen(3\theta)$

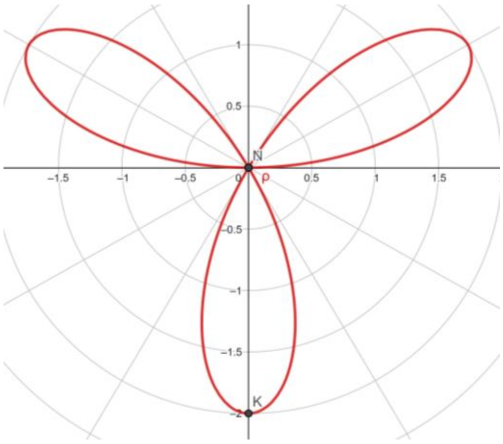



*Figura* 3.140. Curva de trébol. [GeoGebra]

b) Limacon: $\rho = 1 + 2\ cos(\theta)$

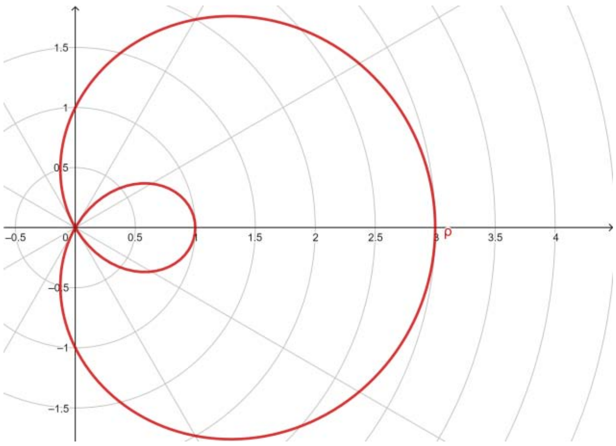



*Figura* 3.141. Limacon. [GeoGebra]

c) Lemniscatas: $\rho^2 = 16\ cos(2\theta)$

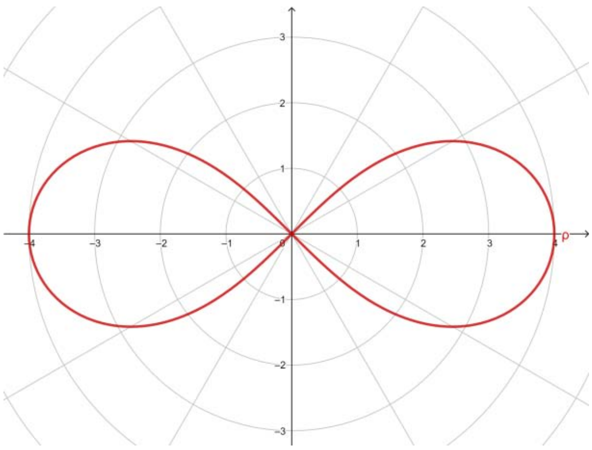



*Figura* 3.142. Lemniscata. [GeoGebra]

# 125.

Comenzamos recordando la definición:

Se denominan coordenadas cilíndricas de un punto $P$ del espacio, a la terna $(\rho, \theta, z)$, donde $\rho$ y θ son las coordenadas polares de la proyección ortogonal del punto P sobre el plano $xy$ (plano polar), y $z$ es la tercera coordenada cartesiana de $P$, donde: $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \theta < 2\pi$ y $-\infty < z < \infty$.

Para encontrar las expresiones que nos permiten transformar de un sistema a otro, colocamos los dos sistemas de coordenadas, de modo tal que sus orígenes coincidan y el eje polar se encuentre a lo largo del eje positivo $x$, tal como puede observarse en la *Figura* 3.143:

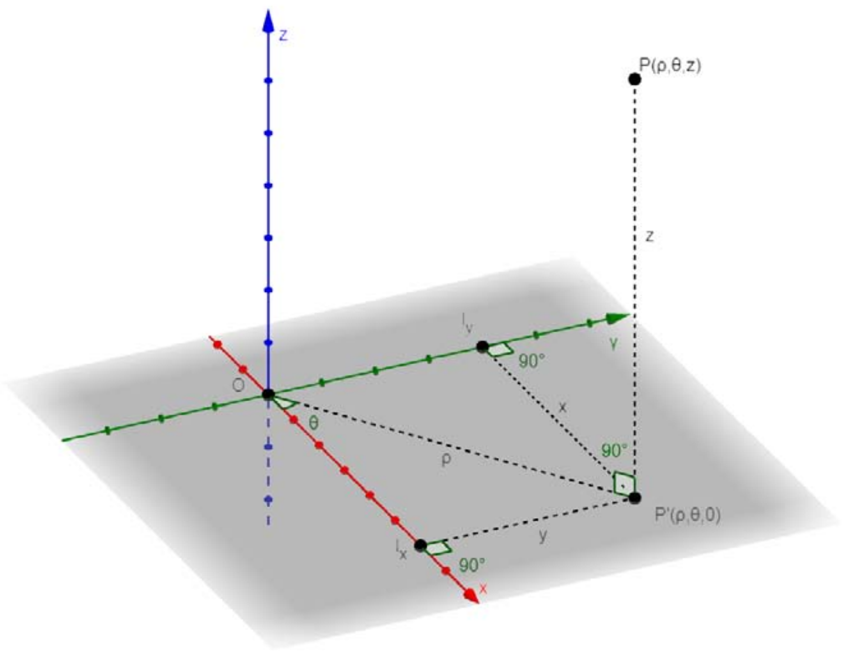



*Figura* 3.143. [GeoGebra]

Si trabajamos en el plano $xy$ donde hemos proyectado el punto $P$ podemos observar en la *Figura* 3.144 la vista en dicho plano, del triángulo rectángulo que se forma.

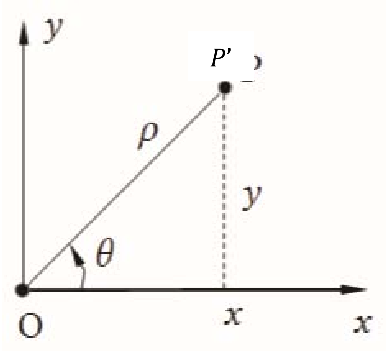



*Figura* 3.144.

Sean $P'(x, y, 0)$, las coordenadas rectangulares de la proyección en el plano $xy$ del punto P y $P'(\rho, \theta, 0)$ las coordenadas cilíndricas de la misma proyección del mismo punto P. De la figura, podemos expresar $x$ e $y$ en función de ρ y θ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sen\theta, \rho \in [0, \infty)\ ;\ \theta \in [0, 2\pi) \\ z = 0 \end{cases} \quad [125.1]$$

Luego, para el punto $P(\rho, \theta, z)$, las coordenadas cartesianas o rectangulares son:

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sen\theta, \rho \in [0, \infty)\ ;\ \theta \in [0, 2\pi) \\ z = z \end{cases} \quad [125.2]$$

También es posible determinar las coordenadas cilíndricas de la proyección en el plano $xy$ , $P'(\rho, \theta, 0)$, en términos de las coordenadas rectangulares, a partir de las expresiones dadas por:

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad x \neq 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad [125.3]$$

A los efectos de obtener valores de θ en todos los cuadrantes, consideraremos las siguientes relaciones, que toman en cuenta los signos correspondientes a $x$ y a $y$ (ambos no nulos simultáneamente):

$$sen\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ y } cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad [125.4]$$

Luego, para el punto $P(x, y, z)$, las coordenadas cilíndricas son:

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad x \neq 0 \\ z = z \end{cases} \quad [125.5]$$

## 126.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de transformación de coordenadas, trabajamos con la ecuación de la siguiente manera:

$$\rho sen\varphi + \rho cos\varphi = 3 \quad [126.1]$$

$$y + x = 3 \quad [126.2]$$

Recta en $\mathbb{R}^2$

$$y = -x + 3 \quad [126.3]$$

La *Figura* 3.145 muestra la recta hallada.

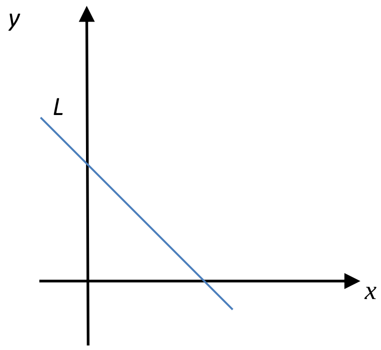



*Figura* 3.145

## 127.

La ecuación en coordenadas polares de la circunferencia es:

$$r^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi - \varphi_1) \tag{127.1}$$

Donde las coordenadas del centro son $C(\rho_1, \varphi_1)$. Si igualamos a cero y agrupamos el término independiente tenemos:

$$\rho^2 + -2\rho\rho_1\cos(\varphi - \varphi_1) + \rho_1^2 - r^2 = 0 \tag{127.2}$$

Comparamos término a término con la ecuación que tenemos de dato, entonces:

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \cos(\varphi - 60°) \;\rightarrow\; \varphi_1 = 60° \tag{127.3}$$

$$2\rho\rho_1 = 8\rho \;\rightarrow\; \rho_1 = 4 \tag{127.4}$$

$$\rho_1^2 - r^2 = 12 \;\rightarrow\; r = \sqrt{\rho_1^2 - 12} = \sqrt{16 - 12} = 2 \tag{127.5}$$

Por lo tanto, se trata de una circunferencia de centro $C(4{,}60°)$ y radio $r = 2$, tal como puede observarse en la *Figura* 3.146.

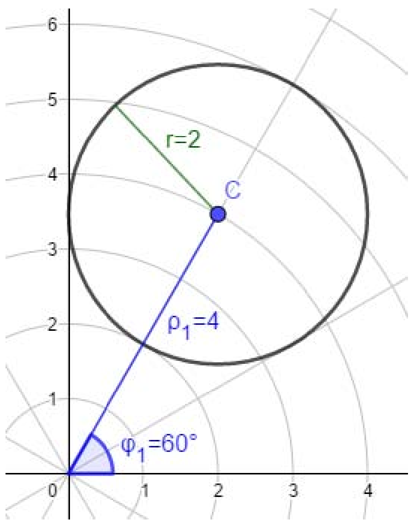



*Figura* 3.146. [GeoGebra]

## 128.

Para identificar la cónica, debemos trabajar en la ecuación de manera tal que, en el denominador, el término independiente sea igual a 1:

$$\rho = \frac{20}{4 + 4cos\theta} = \frac{20}{4(1 + cos\theta)} = \frac{5}{1 + cos\theta} \qquad [128.1]$$

De la ecuación se deduce que la excentricidad es $e$=1, por lo tanto, tenemos una parábola. La directriz es perpendicular al eje polar y se encuentra a la derecha del polo. Esto se deduce comparando directamente con la ecuación de las cónicas en coordenadas polares. Podemos decir que la función coseno del denominador nos indica que el eje focal de la cónica resulta paralelo o coincidente al eje polar, y el signo positivo que acompaña dicha función nos determina que la directriz asociada al foco coincidente con el polo se encuentra a la derecha del mismo, siendo ésta por definición perpendicular al eje focal. Esto nos determina la apertura de las ramas de la parábola hacia la izquierda. Esto queda en evidencia al realizar la tabla de valores y el gráfico correspondiente de la *Figura* 3.147.

El producto $pe = 5$, por lo tanto, el parámetro es $p = 5$ y $|LR| = 2p = 10$

Buscamos las intersecciones con el eje polar y el eje a 90°:

| $\theta$ | $\cos\theta$ | $\rho$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 5/2 |
| π/2 | 0 | 5 |
| π | -1 | - |
| 3π/2 | 0 | 5 |

*Tabla* 3.20. Puntos de la cónica del Ejercicio 128.

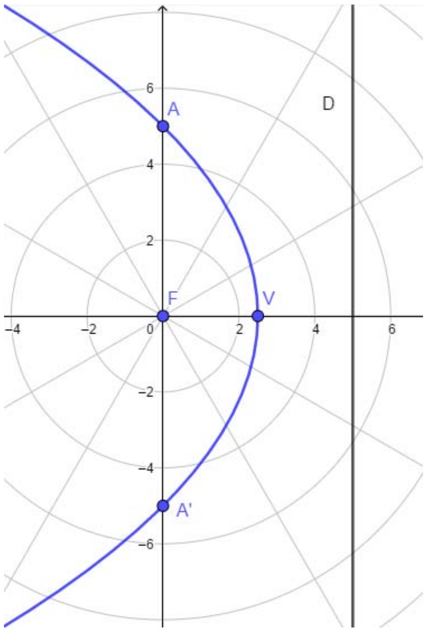



*Figura* 3.147. [GeoGebra]

Identificamos las coordenadas del vértice $V\left(\frac{5}{2};0\right)$ y los extremos del lado recto $A\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$ y $A'\left(5;\frac{3\pi}{2}\right)$. La ecuación de la recta directriz perpendicular al eje focal y ubicada a una distancia $p$ a la derecha del polo resulta $D\colon \rho = \frac{5}{\cos\theta}$

## 129.

Para identificar la cónica, debemos trabajar en la ecuación de manera tal que, en el denominador, el término independiente sea igual a 1:

$$\rho = \frac{9}{6-3cos\theta} = \frac{9}{6\left(1-\frac{1}{2}cos\theta\right)} = \frac{3/2}{1-\frac{1}{2}cos\theta} \qquad [129.1]$$

De la ecuación se deduce que la excentricidad es $e$=1/2, por lo tanto, tenemos una elipse. La directriz es perpendicular al eje polar y se encuentra a la izquierda del polo. Esto se deduce comparando con la ecuación de las cónicas en coordenadas polares. Podemos decir que la función coseno del denominador nos indica que el eje focal de la cónica resulta paralelo o coincidente al eje polar, y el signo negativo que acompaña dicha función nos determina que la directriz asociada al foco coincidente con el polo se encuentra a la izquierda del mismo, y por definición es perpendicular al eje focal. Esto queda directamente en evidencia al realizar la tabla de valores que planteamos a continuación, junto con la *Figura* 3.148. El producto $pe = 3/2$, por lo tanto, el parámetro es $p = 3$.

| $\theta$ | $\cos\theta$ | $\rho$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 |
| π/2 | 0 | 3/2 |
| π | -1 | 1 |
| 3π/2 | 0 | 3/2 |

*Tabla* 3.20. Puntos de la cónica del Ejercicio 129.

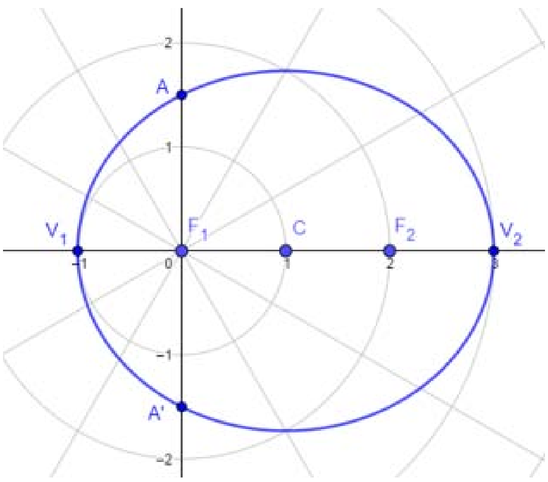



*Figura* 3.148. [GeoGebra]

A partir de la distancia entre los puntos extremos del lado recto tenemos $|LR| = 3$. Identificamos las coordenadas de los vértices $V_1(1;\pi), V_2(3,0)$ y los extremos del lado recto $A\left(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ y $A'\left(\frac{3}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$. Por simetría deducimos las coordenadas del otro foco $F_2(2,0)$ y del centro $C(1,0)$.

## 130.

La ecuación en coordenadas polares de una cónica con directriz paralela al eje polar por debajo del polo es:

$$\rho = \frac{pe}{1 - esen\theta} \qquad [130.1]$$

En nuestro caso, la ecuación queda:

$$\rho = \frac{4\ \ 1.2}{1 - 1.2sen\theta} = \frac{4.8}{1 - 1.2sen\theta} \qquad [130.2]$$

Buscamos las intersecciones con el eje polar y el eje a 90°. La representación de la curva puede verse en la Figura 130.1:

| $\theta$ | **sen$\theta$** | $\rho$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 4.8 |
| π/2 | 1 | -24 |
| π | 0 | 4.8 |
| 3π/2 | -1 | 2.18 |

*Tabla* 3.21. Puntos de la cónica del Ejercicio 130.

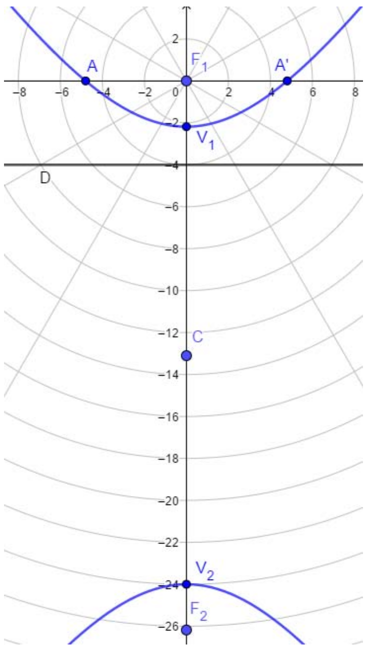



*Figura* 3.149. [GeoGebra]

Identificamos las coordenadas de los vértices $V_1(2.18; 3\pi/2), V_2(24; 3\pi/2)$ y los extremos del lado recto $A'(4.8; 0)$ y $A(4.8; \pi)$. Por simetría deducimos las coordenadas del otro foco $F_2(26.18\ ;\ 3\pi/2)$ y del centro $C(13.09\ ;\ 3\pi/2\ )$. A partir de la distancia entre los puntos extremos del lado recto tenemos $|LR| = 9.6$.

Podemos observar que hay un intervalo de valores de $\theta$ que nos reproducen valores negativos de $\rho$. Observando la expresión de ρ en función de $\theta$, vemos que la única forma de que $\rho$ sea negativo es si el denominador lo es.

$$1 - 1.2sen\theta < 0 \qquad [130.3]$$

$$2\ sen\theta > 1 \qquad [130.4]$$

$$sen\theta > 0.833 \qquad [130.5]$$

buscamos el valor de $\theta$ que tiene $sen\theta = 0.833$

$$\theta = arsen(0.833) \qquad [130.6]$$

$$\theta = 56º.44\ \ o\ \ \theta = 123º.55 \qquad [130.7]$$

Es decir, que para todos los ángulos comprendidos entre $56º.44\ < \theta < 123º.55$ los valores de $\rho$ son negativos, por lo que la ecuación estará reproduciendo puntos de la otra rama de la hipérbola. Para $\theta = 56º.44\ y\ \theta = 123º.55$ no existe valor de $\rho$ debido a la indeterminación en el denominador de la ecuación.

Note que comparando con la ecuación de las cónicas en coordenadas polares podemos decir que la función seno del denominador nos indica que el eje focal de la cónica resulta perpendicular al eje polar, y el signo negativo que acompaña dicha función nos determina que la directriz asociada al foco coincidente con el polo se encuentra por debajo del mismo y por definición es perpendicular al eje focal.

## 131.

a) Los puntos del espacio tridimensional que satisfacen la ecuación son aquellos cuyas coordenadas esféricas son $P(4, \theta, \varphi)$, es decir que las coordenadas $\theta$ y $\varphi$ son libres. El conjunto de dichos puntos es una esfera de radio 4 centrada en el origen de coordenadas, tal como muestra la *Figura* 3.150.

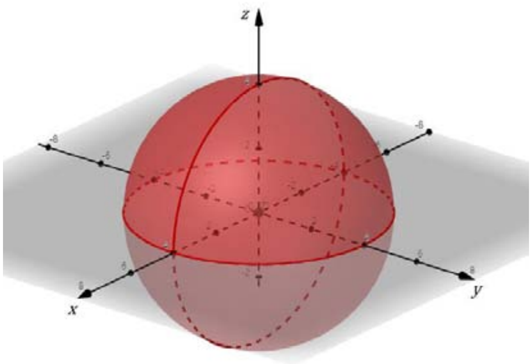



*Figura* 3.150. [GeoGebra]

b) Los puntos del espacio tridimensional que satisfacen la ecuación son aquellos cuyas coordenadas esféricas son $P(\rho, \pi/4, \varphi)$, es decir que las coordenadas $\rho$ y $\varphi$ son libres. El conjunto de dichos puntos es un semiplano que contiene al eje $z$, y que forma un ángulo de $\theta = \pi/4$ con el eje $x$. La *Figura* 3.151 muestra el semiplano hallado.

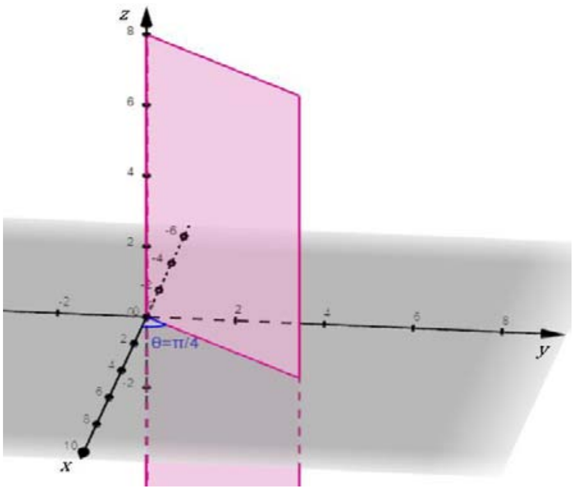



*Figura* 3.151.

c) Los puntos del espacio tridimensional que satisfacen la ecuación son aquellos cuyas coordenadas esféricas son $P(\rho, \theta, \pi/3)$, es decir que las coordenadas $\rho$ y $\theta$ son libres. El conjunto de dichos puntos es un semicono circular con vértice en el origen de coordenadas, cuyo ángulo de apertura respecto del eje $z$ es de $\varphi = \pi/3$. La *Figura* 3.152 muestra la superficie mencionada.

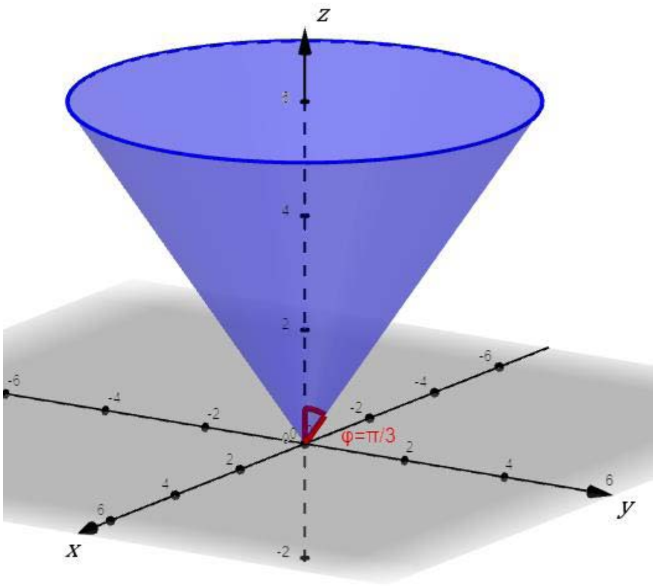



*Figura* 3.152.

## 132.

La posición $P$ del extremo del brazo robótico puede identificarse mediante el uso de coordenadas cilíndricas $P(\rho, \theta, z)$, ya que éstas resultan apropiadas para el tipo de movimiento que realiza dicho brazo.

La coordenada $\rho$ indica la extensión (o alargamiento) del brazo. La coordenada $\theta$ indica la rotación sobre el eje de simetría. La coordenada $z$ indica el ascenso o descenso del brazo, que varía entre 2 y 4 metros. Es decir que $2 \leq z \leq 4$.

Como el brazo está programado para alcanzar los puntos de la superficie dada, llevamos la ecuación de la misma a coordenadas cilíndricas, usando las ecuaciones de transformación de coordenadas:

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sen\theta \\ z = z \end{cases} \qquad [132.1]$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \rho^2\left(\frac{\cos^2\theta}{4} + \frac{sen^2\theta}{16}\right) - \frac{z^2}{9} = 0 \qquad [132.2]$$

Se requiere conocer cuál es el largo total del brazo, es decir, cuál es el valor de $\rho$ cuando $z = 2.5$m y $\theta = 45°$. Reemplazamos dichos valores en la ecuación y despejamos el valor de $\rho$:

$$\rho = \sqrt{\frac{z^2}{9\left(\frac{\cos^2\theta}{4} + \frac{sen^2\theta}{16}\right)}} = \frac{z}{3\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{4} + \frac{sen^2\theta}{16}}} \qquad [132.3]$$

$$\rho = \frac{2.5}{3\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{32}}} \approx 2.11 \qquad [132.4]$$

# 3.11. ROTACIONES y TRASLACIONES en el PLANO

## 133.

Siguiendo el análisis desarrollado en la sección Ecuación de segundo grado con dos variables, del Libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías,* sabemos que la forma matricial de una ecuación de segundo grado completa es $\boldsymbol{X^T A X} + \boldsymbol{K X} + f = 0$ *donde* $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ , $\boldsymbol{K} = [d \quad e]$.

Siendo la ecuación del ejercicio $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$, tenemos que $\boldsymbol{X} = [x \quad y]$ ,

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{K} = [0 \quad 0]$ y $f = -4$. Por lo tanto, la forma matricial de la ecuación de segundo grado es:

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}+f=[x \quad y]\begin{bmatrix}2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+[0 \quad 0]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}-4=0$$

a) La matriz asociada a la forma cuadrática es: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1\end{bmatrix}$.

b) Calculamos los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$:

$|\boldsymbol{A}-\lambda\,\boldsymbol{I}|=0$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)-\frac{3}{4}=0$$

$$\lambda^2-3\lambda+\frac{5}{4}=0$$

Por lo tanto, los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$\lambda_1=\frac{1}{2} \;\; y\; \lambda_2=\frac{5}{2}$$

Conociendo los valores propios podemos determinar que la cónica es una elipse ya que

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{5}{4}>0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\boldsymbol{A}-\lambda\,\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, para calcular un vector propio:

- Para $\lambda_1=\frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix}3/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{\sqrt{3}}{3}y$$

Luego $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}y\\ y\end{bmatrix}_{y\neq 0}$ $\quad \boldsymbol{v_1}=\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\ 3\end{bmatrix}$ al normalizar $\boldsymbol{v_1}$ tenemos: $\boldsymbol{b_1}=\begin{bmatrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{bmatrix}$

- Para $\lambda_2=\frac{5}{2}$:

$$\begin{bmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{3}y$$

Luego $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}y\\ y\end{bmatrix}_{y\neq 0}$ $\quad \boldsymbol{v_2}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}$ al normalizar $v_2$ tenemos: $\boldsymbol{b_2}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{bmatrix}$

c) Los vectores propios $\boldsymbol{b_1}$ y $\boldsymbol{b_2}$ forman la nueva base: $\boldsymbol{B'}=\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$.

d) La matriz de pasaje tiene como columnas a los vectores propios normalizados. Para que la matriz esté asociada a una rotación de los ejes coordenados con un mismo ángulo y en un mismo sentido debe cumplirse siempre que $|\boldsymbol{P}| = \mathbf{1}$ .

Sea $\boldsymbol{P}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, verificamos $|\boldsymbol{P}'| = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$, como el determinante es (-1), cambiamos el orden de las columnas, ahora si $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ su determinante es

$|\boldsymbol{P}| = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$. Entonces, concluimos que la matriz de pasaje es $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

e) Calculamos $\boldsymbol{P^T A P} = \boldsymbol{A}'$:

$$\boldsymbol{P^T A P} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}'$$

La matriz $\boldsymbol{A}'$ coincide con la matriz diagonal ($\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$)que tiene como elementos de su diagonal principal los valores propios en el orden que están los vectores propios en la matriz $\boldsymbol{P}$.

f) Si hacemos la trasformación de coordenadas $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P X}'$, con $\boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$en la ecuación en su forma matricial tenemos:

$\boldsymbol{X^T A X} + \boldsymbol{K X} + f = 0$
$(\boldsymbol{P X}')^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{P X}') + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{P X}') + f = 0$
$\boldsymbol{X}'^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P^T A P X}' + \boldsymbol{K P X}' + f = 0$
$\boldsymbol{X}'^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{D X}' + \boldsymbol{K P X}' + f = 0$

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 4 = 0$$

Operamos matricialmente y obtenemos la ecuación de la cónica en el sistema determinado por la nueva base:

$$\frac{x'^2}{8/5} + \frac{y'^2}{8} = 1$$

Verificamos que se trata de una elipse con eje focal coincidente con el eje $y$'.

g) Representación gráfica:

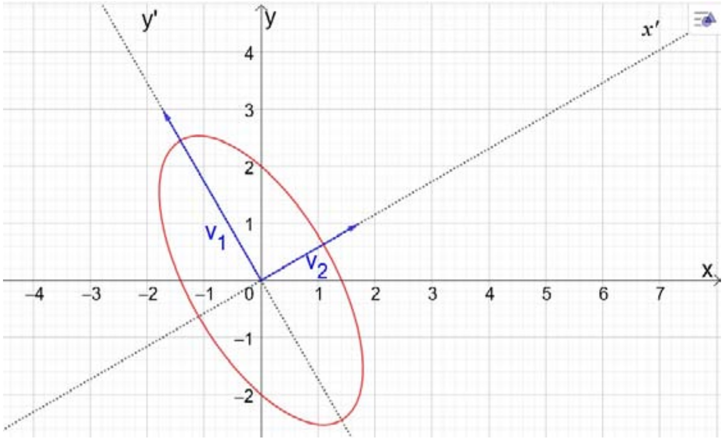



*Figura* 3.153. [GeoGebra]

i) Podemos calcular el ángulo de rotación de los nuevos ejes coordenados respecto de los ejes originales, a partir del producto escalar entre los vectores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{b_2}$ (o entre los vectores $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{b_1}$), $cos\theta = \frac{\boldsymbol{i}.\boldsymbol{b_2}}{\|\boldsymbol{i}\|\|\boldsymbol{b_2}\|}$. Obtenemos el valor de 30º para dicho ángulo.

## 134.

La ecuación de segundo grado con la que trabajamos es: $x^2 + 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x + 8 = 0$.

a) Tenemos que $\boldsymbol{X} = [x \quad y]$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{K} = [-8\sqrt{2} \quad 0]$ y $f = 8$. Calculamos los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$:

$|\boldsymbol{A} - \lambda\, \boldsymbol{I}| = 0$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$

$\lambda(-2+\lambda) = 0$

Por lo tanto, los valores propios de $A$ son las raíces de la ecuación de segundo grado:

$\lambda_1 = 0 \;\; y\; \lambda_2 = 2$

Conociendo los valores propios podemos determinar que la cónica es una parábola ya que $\lambda_1\lambda_2 = 0$

b) Para determinar la matriz $\boldsymbol{P}$ que diagonaliza ortogonalmente a $\boldsymbol{A}$, obtenemos sus vectores propios, resolvemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\boldsymbol{A} - \lambda\, \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

- Para $\lambda_1 = 0$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = -y$$

Luego $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix}_{y \neq 0}$ $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ al normalizar $\boldsymbol{v_1}$ tenemos: $\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

- Para $\lambda_2 = 2$ :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Luego $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}_{y\neq 0}$ $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ al normalizar $\boldsymbol{v_2}$ tenemos: $\boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

La matriz de pasaje tiene como columnas a los vectores propios normalizados. Para que la matriz esté asociada a una rotación los ejes coordenados con un mismo ángulo y en un mismo sentido debe cumplirse siempre que $|\boldsymbol{P}| = 1$ .

Sea $\boldsymbol{P'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, verificamos $|\boldsymbol{P'}| = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$, como el determinante es (-1), cambiamos el orden de las columnas, ahora si $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ su determinante es

$|\boldsymbol{P}| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Entonces, concluimos que la matriz de pasaje es $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

c) Si hacemos la trasformación de coordenadas $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PX'}$, con $\boldsymbol{X'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ en la ecuación (i) en su forma matricial tenemos:

$$\boldsymbol{X^T A X} + \boldsymbol{KX} + f = 0$$
$$(\boldsymbol{PX'})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PX'}) + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{PX'}) + f = 0$$
$$\boldsymbol{X'^T P^T A P X'} + \boldsymbol{KPX'} + f = 0$$
$$\boldsymbol{X'^T D X'} + \boldsymbol{KPX'} + f = 0$$

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [-8\sqrt{2} \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 8 = 0$$

Operamos matricialmente y obtenemos la ecuación de la cónica en el sistema determinado por la nueva base:

$$2x'^2 - 8x' + 8y' + 8 = 0$$

Completamos cuadrados y llegamos a la ecuación cartesiana de la parábola en el sistema de referencia $x'y'$:

$$(x' - 2)^2 = -4y'$$

Si aplicamos las ecuaciones de traslación:

$$\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' \end{cases}$$

la ecuación cartesiana de la cónica en el sistema de referencia $x''y''$ es:

$x''^2 = -4y''$

Se trata de una parábola con eje focal paralelo el eje $y'$, con vértice en $V(2{,}0)_{x'y'}$ con parámetro $p < 0$.

d) A partir de la matriz $\boldsymbol{P}$ cuyo determinante es igual a 1, sabemos que la primera columna indica dirección y sentido eje nuevo $x'$ y la segunda columna de $\mathbf{P}$ indica dirección y sentido nuevo eje $y'$.

Teniendo en cuenta la expresión para evaluar el ángulo entre dos versores, $cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$ podemos analizar el ángulo entre los versores $\breve{\imath}$ y $\mathbf{b_2}$ (o entre los versores $\breve{\jmath}$ y $\mathbf{b_1}$).

De esta manera, el ángulo que rotaron los ejes es:

$$cos\theta = \langle (1{,}0).\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \theta = 45°$$

*Observación:*

Para graficar el nuevo sistema de referencia $x'y'$ basta representar los versores $\mathbf{b_1}$ y $\mathbf{b_2}$ (o cualquier vector coincidentes en la dirección y sentido de ambos) ya que nos indican las direcciones y sentidos de los nuevos ejes coordenados. Por lo tanto, no es necesario graficar midiendo el ángulo obtenido.

e y f) Representación gráfica:

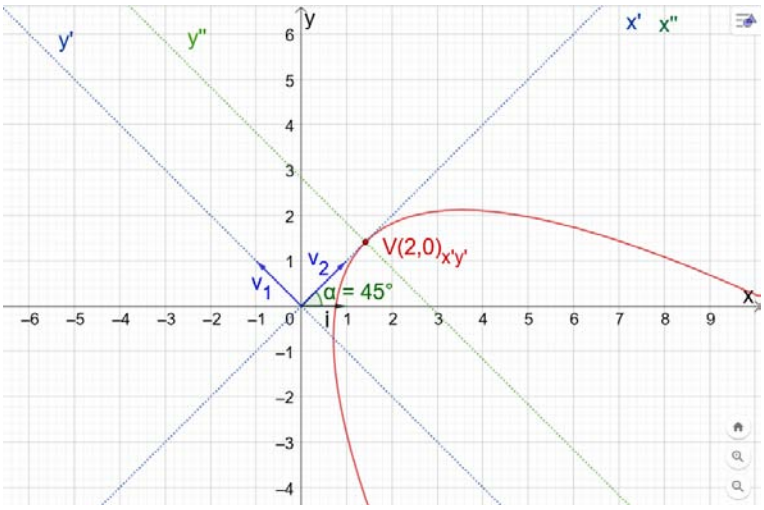



*Figura* 3.154. . [GeoGebra]

*ii)* La ecuación de segundo grado con la que trabajamos es: $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$ .

a) Tenemos que $\boldsymbol{X} = [x \quad y]$ , $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{K} = [0 \quad 0]$ y $f = 8$. Calculamos los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$:

$|\boldsymbol{A} - \lambda\, \boldsymbol{I}| = 0$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

Por lo tanto, los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son las raíces de la ecuación de segundo grado:

$\lambda_1 = 3 \quad y\ \lambda_2 = -2$

Conociendo los valores propios podemos determinar que la cónica es una hipérbola ya que $\lambda_1\lambda_2 = -6 < 0$

b) Para determinar la matriz $\boldsymbol{P}$ que diagonaliza ortogonalmente a $\boldsymbol{A}$, obtenemos sus vectores propios, resolvemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

- Para $\lambda_1 = 3$:

$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = -2y$

Luego $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix}_{y\neq 0}$ $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ al normalizar $\boldsymbol{v_1}$ tenemos: $\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

- Para $\lambda_2 = -2$ :

$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2x = y$

Luego $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}_{x\neq 0}$ $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ al normalizar $\boldsymbol{v_2}$ tenemos: $\boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

La matriz de pasaje tiene como columnas a los vectores propios normalizados. Para que la matriz esté asociada a una rotación los ejes coordenados con un mismo ángulo y en un mismo sentido debe cumplirse siempre que $|\boldsymbol{P}| = 1$ .

Sea $\boldsymbol{P'} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, verificamos $|\boldsymbol{P'}| = -\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = -1$, como el determinante es (-1), cambiamos el orden de las columnas, ahora si $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ su determinante es

$|\boldsymbol{P}| = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$. Entonces, concluimos que la matriz de pasaje es $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

c) Si hacemos la trasformación de coordenadas $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PX'}$, con $\boldsymbol{X'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ en la ecuación $(ii)$ en su forma matricial tenemos:

$\boldsymbol{X'^T P^T A P X'} + \boldsymbol{KPX'} + f = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X'^T D X'} + \boldsymbol{KPX'} + f = 0$

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}+[0 \quad 0]\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}+8=0$$

Operamos matricialmente y obtenemos la ecuación de la cónica en el sistema determinado por la nueva base:

$$-2x'^2+3y'^2+8=0$$

Luego la ecuación cartesiana de la hipérbola en el sistema de referencia $x'y'$:

$$\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{8/3}=1$$

Se trata de una hipérbola con eje focal coincidente con el eje $x'$ y centro en $C(0,0)_{x'y'}$ .

d) A partir de la matriz $\boldsymbol{P}$ cuyo determinante es igual a 1, sabemos que la primera columna indica dirección y sentido eje nuevo $x'$ y la segunda columna de $\boldsymbol{P}$ indica dirección y sentido nuevo eje $y'$. Teniendo en cuenta la expresión para evaluar el ángulo entre dos vectores, $cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$ podemos analizar el ángulo entre los versores $\breve{\imath}$ y $\mathbf{b_2}$ (o entre los versores $\breve{\jmath}$ y $\mathbf{b_1}$). De esta manera, el ángulo que rotaron los ejes es:

$$cos\theta=\langle(1,0).\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\rangle=\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \theta\approx 63.26°$$

e y f ) Representación gráfica:

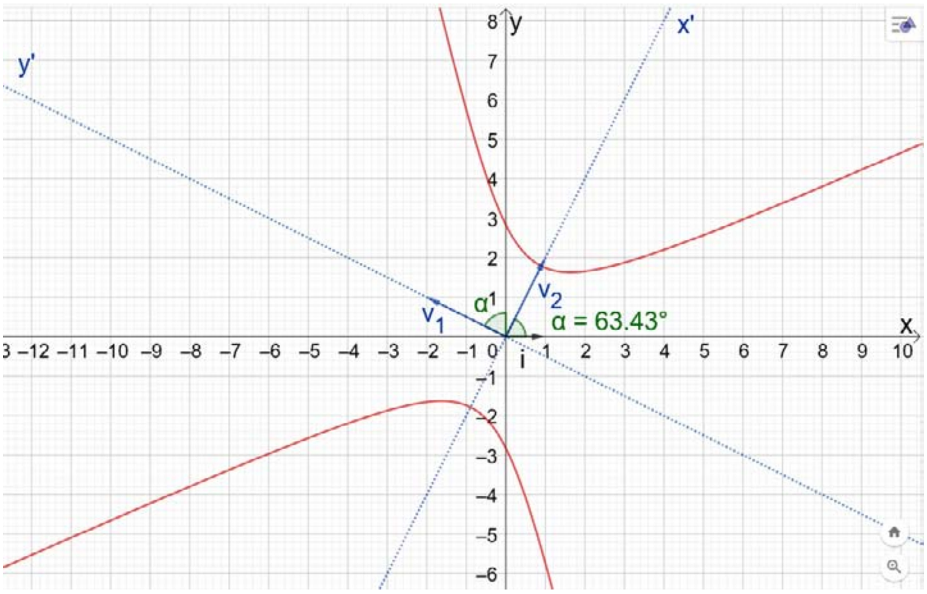



*Figura* 3.155. [GeoGebra]

## 135.

Analizando el gráfico podemos obtener los semiejes de la elipse como:

$$a=\|\boldsymbol{OA}\|$$

$a = \sqrt{1.41^2 + 1.41^2} \approx 2$

$b = \|\boldsymbol{OB}\|$

$b = \sqrt{0.71^2 + (-0.71)^2} \approx 1$

Conociendo los semiejes podemos escribir la ecuación de la elipse rotada en el sistema de coordenadas $x'y'$:

$$x'^2 + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Operando algebraicamente:

$$4x'^2 + y'^2 - 4 = 0$$

De esta expresión deducimos que los valores propios son : $\lambda_1 = 4 \; y \; \lambda_2 = 1$ y el término independiente de la ecuación de segundo grado con dos variables es: $f = -4$.

Conociendo los valores propios podemos armar la matriz diagonal: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

La dirección del eje $x'$ está dada por la dirección del vector: $\boldsymbol{b_1} = (1, -1)$

La dirección del eje $y'$ está dada por la dirección del vector: $\boldsymbol{b_2} = (1,1)$

Con esta información si obtenemos los vectores unitarios en ambas direcciones estaremos obteniendo las columnas de la matriz P de transformación de coordenadas.

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{b_1}}{\|\boldsymbol{b_1}\|} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{b_2}}{\|\boldsymbol{b_2}\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Luego

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

verificando que $|\boldsymbol{P}| = 1$.

Para encontrar la ecuación de la elipse en los término de $x$ e $y$ , calculamos la matriz de coeficientes de la forma matricial como: $\boldsymbol{A = P.D.P^T}$**.** Luego

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Como la elipse no se encuentra trasladada respecto del sistema de coordenadas $xy$, los términos lineales de la ecuación de segundo grado con dos variables serán nulos. Por lo tanto conociendo la matriz A y el término independiente $f$ se tiene una ecuación en términos de x e y:

$$\frac{5}{2}x^2 - 3xy + \frac{5}{2}y^2 - 4 = 0$$

## 3.12. ROTOTRASLACIÓN EN R³

### 136.

En primer lugar, completamos la ecuación cuadrática, para identificar todos los coeficientes:

$$-x^2 + 0y^2 + 0z^2 + 2\,0xy + 2\,0xz + 2\frac{1}{2}yz + 2x + 0y - 4z - 5 = 0$$

Por lo tanto, sabemos que:

$$a = -1; \quad b = 0; \quad c = 0; \quad d = 0; \quad e = 0; \quad f = \frac{1}{2}; \quad g = 2; \quad h = 0; \quad i = -4; \quad j = -5;$$

Ahora, escribimos la ecuación dada de segundo grado en tres variables en forma matricial. Es decir, $\boldsymbol{X^T A X} + \boldsymbol{KX} + \mathrm{j} = 0$, siendo:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad j = -5$$

A continuación, determinamos los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$. Para ello planteamos:

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(-1-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

Por lo tanto, los valores propios resultan:

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}; \quad \lambda_3 = \frac{-1}{2}$$

Podemos verificar que se cumple que:

$$det(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{D}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3$$

También, podemos anticipar que nuestra superficie es una de estas tres opciones:

- Hiperboloide de una hoja
- Hiperboloide de dos hojas
- Cono elíptico (caso degenerado)

Ya que, $\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 > 0$; $\lambda_3 < 0$

Luego, buscamos los vectores propios asociados a los valores propios:

$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

Así, hallamos $\boldsymbol{v_1}$; $\boldsymbol{v_2}$ y $\boldsymbol{v_3}$:

$$\boldsymbol{v1} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } x \in \mathbb{R}\text{- }\{0\} \quad ;\boldsymbol{v2} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ y \end{bmatrix} \text{ con } y \in \mathbb{R} - \{0\}; \quad ;\ \boldsymbol{v3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \\ y \end{bmatrix} \text{ con } y\ \mathbb{R} - \{0\}$$

De cada familia de vectores, seleccionamos uno y normalizando obtenemos:

$$\boldsymbol{b}1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Con los vectores propios normalizados armamos la matriz $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{P} \text{ es la matriz cambio de base o de transformación de coordenadas}$$

Verificamos que $det(\boldsymbol{P}) = 1$, por lo que aseguramos que esta matriz está asociada a una rotación de los ejes coordenados. Por otra parte, podemos verificar que $\boldsymbol{P^T A P} = \boldsymbol{D}$, donde la matriz $\boldsymbol{D}$ está dada por:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Como $\boldsymbol{A}$ es matriz simétrica, $\boldsymbol{P}$ es matriz ortogonal. Es por ello que la transformación de coordenadas, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}'$**,** se llama Transformación Ortogonal de Coordenadas. Sustituyendo la expresión anterior en la forma matricial de la ecuación cuadrática, obtenemos:

$$(\boldsymbol{PX'})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PX'}) + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{PX'}) + j = 0$$

$$\boldsymbol{X'^T}(\boldsymbol{P^T A P})\boldsymbol{X'} + (\boldsymbol{KP})\boldsymbol{X'} + j = 0$$

Reemplazando $\boldsymbol{P^T A P} = \boldsymbol{D}$ **y** $\boldsymbol{K'} = \boldsymbol{KP}$; tenemos:

$$\boldsymbol{X'^T D X'} + \boldsymbol{K'X'} + j = 0$$

Sustituyendo a continuación las matrices en términos de sus elementos componentes, queda:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g' & h' & i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + j = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 5 = 0$$

Evaluamos cada producto matricial y resulta:

$$-x'^2 + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{2} + 2x' - 2\sqrt{2}y' - 2\sqrt{2}z' - 5 = 0$$

Asociamos las variables:

$$-\left(x'^2 - 2x'\right) + \frac{1}{2}\left(y'^2 - 4\sqrt{2}y'\right) - \frac{1}{2}\left(z'^2 + 4\sqrt{2}z'\right) - 5 = 0$$

Completamos cuadrados:

$$-(x' - 1)^2 + \frac{1}{2}\left(y'^2 - 2\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(z'^2 + 2\sqrt{2}\right)^2 - 4 = 0$$

Finalmente, planteamos la siguiente sustitución:

$$\begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y'^2 - 2\sqrt{2} \\ z'' = z'^2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Entonces es posible escribir:

$$\boxed{-\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{8} - \frac{z''^2}{8} = 1}$$

Concluimos que es un hiperboloide de dos hojas donde el eje $y''$ es el eje de la superficie cuádrica. Además, $a = \sqrt{4}$; $b = c = \sqrt{8}$. La dirección del nuevo eje $x'$ es paralela al vector: $\boldsymbol{b}1 = (1,0,0)$. La dirección del nuevo eje $y'$ es paralela al vector: $\boldsymbol{b}2 = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, en tanto que la dirección del eje $z'$ es paralela al vector: $\boldsymbol{b}3 = (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

En el sistema $x``y``z``$ En el sistema $xyz$

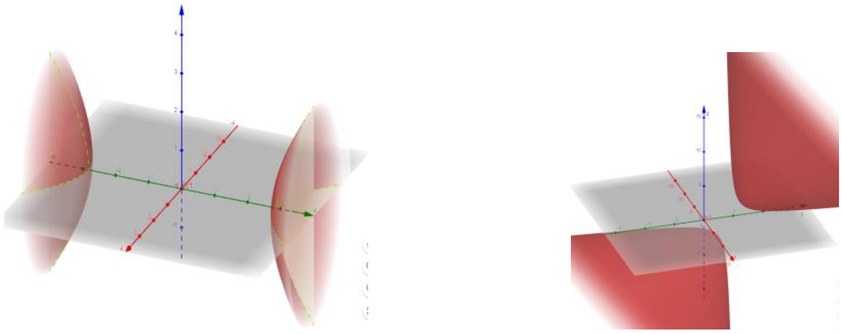


*Figura* 3.156. Representación del Ejercicio 136. [GeoGebra]

## 137.

Resolución analítica en el Texto *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*. La *Figura* 3.157 ilustra dicho ejercicio.

En el sistema $x``y``z``$ En el sistema $xyz$

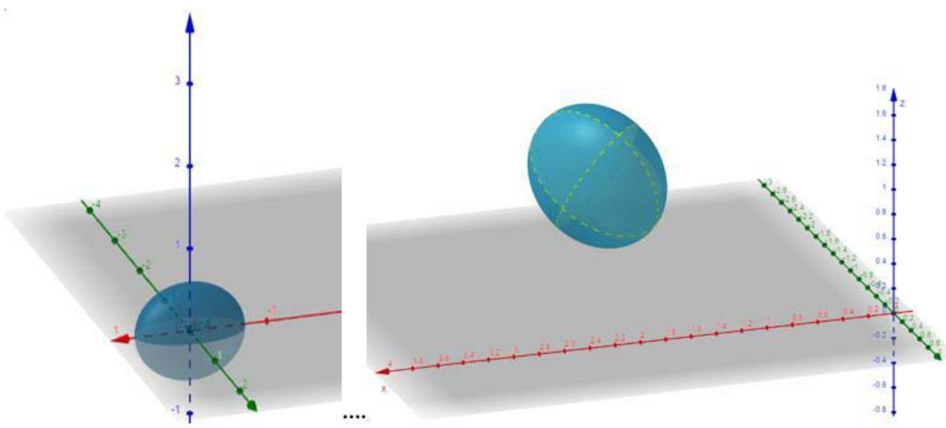


*Figura* 3.157. *Figura* 3.156. Representación del Ejercicio 137. [GeoGebra]

# 4. ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

Las siguientes actividades complementarias asociadas a cada una de las unidades didácticas en las que se estructura la asignatura, están destinadas al trabajo extra-áulico del estudiante. Se sugiere, previo a la realización de las mismas, elaborar las guías de autoevaluación correspondientes a cada eje temático incluidas en el texto de referencia, [Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías, *Raichman y Totter*]. Esto conducirá a un mejor aprovechamiento de las guías de autoevaluación y de las actividades complementarias como recursos que promueven el aprendizaje autónomo y la metacognición.

## 4.1. ESPACIOS VECTORIALES

**C1**. Indique justificando su respuesta cuáles de los siguientes conjuntos de vectores, constituyen una Base de $\mathbb{R}^2$.

a) {(-2, -2), (5, 5)}

b) {(1, 3), (-1, 2), (3, 27)}

c) {(-5, 12), (9, -8)}

d) {(1, 2, 5), (2, -3, 8)}

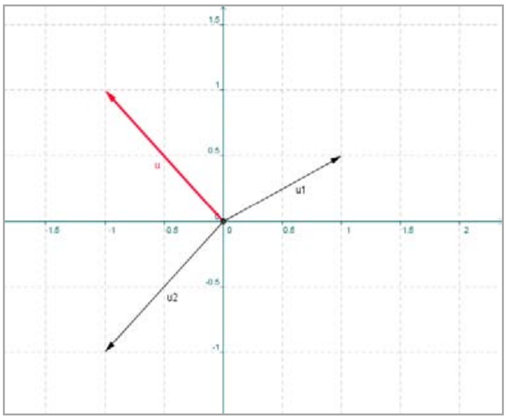
**C2**. Dados los vectores $\boldsymbol{a}$ = (0,3), $\boldsymbol{b}$ = (4,0), $\boldsymbol{c}$ = (-1,2)

a) Evalúe las coordenadas del vector $\boldsymbol{u} = 3\,(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ en la base $B = \{\boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}\}$

b) Represente gráficamente los vectores.

c) Indique, justificando su respuesta, si los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{u}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

**C3**. a) A partir de los datos de cada una de las siguientes figuras, determine en cada caso, las coordenadas del vector $\boldsymbol{u}$ en la base dada por los vectores $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$. Grafique.



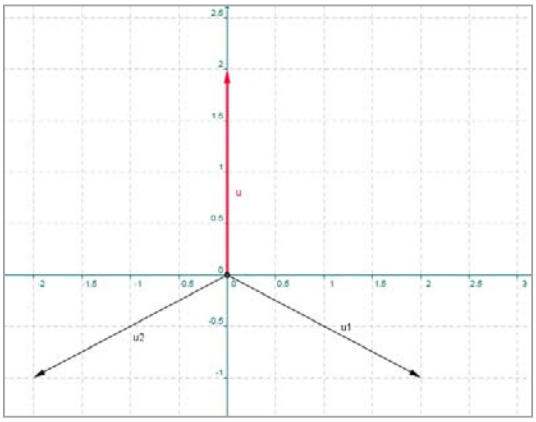




*Figura* 4.1. Datos del Ejercicio C3.

b) Verifique su respuesta empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI - Cambio de base* en el Capítulo 1 del [*Libro Interactivo Geometría Dinámica*].

C4. Dados los vectores $\boldsymbol{w}$ = (2,4), $\boldsymbol{v_1}$ = (-1,-1) y $\boldsymbol{v_2}$ = (-0.5,0.5)

a) Evalúe las coordenadas del vector $\boldsymbol{w}$ en la base $B = \{\boldsymbol{v_1}; \boldsymbol{v_2}\}$ y represente gráficamente.

b) Evalúe las coordenadas del vector $\boldsymbol{u}$ sabiendo que $(\boldsymbol{u})_B$=(4,-3).

c) Verifique sus respuestas empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI-Cambio de base* en el Capítulo 1 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

## 4.2. VECTORES GEOMÉTRICOS. PRODUCTO ESCALAR

C5. En la Figura se muestra una pirámide regular, cuyas aristas miden 3 unidades cada una. Utilizando álgebra vectorial determine:

a) Las coordenadas del vértice E de la pirámide, siendo la arista BE paralela al vector $\boldsymbol{u}$ = (-3, -3, 3 $\sqrt{2}$).

b) La altura h de la pirámide.

c) El ángulo entre las aristas BE y CE.

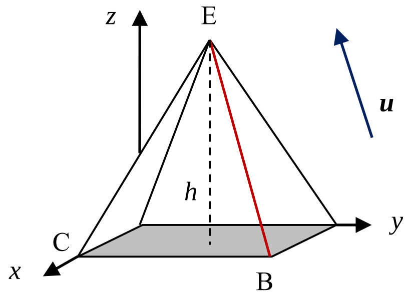



*Figura* 4.2. Representación gráfica del Ejercicio C5.

C6. Dados los vectores: $\boldsymbol{w}$ = (4 , -2), aplicado en el punto A (-2,3) y $\boldsymbol{v}$ = (0.5 , 0.5), aplicado en el punto B (2,-3):

a) Determine el vector proyección de $\boldsymbol{w}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{v}$ y represente gráficamente.

b) Verifique su respuesta empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Proyección,* en el Capítulo 1 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica*. En dicho Recurso se designa componente de $\boldsymbol{w}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{v}$, al valor de $k$ tal que:

$\boldsymbol{proyw_v} = \boldsymbol{m} = k\,\boldsymbol{v}$ , es decir , $k = \frac{\boldsymbol{w}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$

C7. Dado el vector $\boldsymbol{v}$=(6,2):

a) Determine las coordenadas de dicho vector en la base $B_1$={(3, -4);(4, 3)}

b) Represente gráficamente los vectores del inciso anterior. Interprete gráfica y analíticamente el vector $(\boldsymbol{v})_B$

c) Efectúe los cambios necesarios en los vectores de la base dada, para obtener una nueva base que resulte ortonormal. Justifique su respuesta.

**C8**. Dados los vectores: $\boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \boldsymbol{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \boldsymbol{c} = (0, 0, 1)$

a) Verifique que $B = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ es una *base ortonormal* de $\mathbb{R}^3$. Justifique su respuesta.

b) Determine las coordenadas del vector $\boldsymbol{v}$ = (4, 4, 8) en la base $B = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$

c) Indique, justificando su respuesta, si $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v}\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

d) Evalúe la *proyección ortogonal* del vector $\boldsymbol{v}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{c}$.

## 4.3. PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO MIXTO

**C9**. Dados:

a) Tres vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$, no coplanares, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\boldsymbol{w}$, demuestre la forma de calcular el volumen del paralelepípedo que tiene a los tres vectores como aristas concurrentes.

b) Los puntos A(2, 2, 1) m, B(4, 3, 2) m, C(2, 4, 2) m y D(2, 2, 4)m, calcule el volumen del tetraedro de aristas $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AD}$.

c) Calcule el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AD}$.

**C10**. Dados los puntos A (0, 0, 0) m, B (3, 0, 6) m, C (- 3, 0, 6) m y D (0, 9, 0) m, usando vectores y las operaciones apropiadas, evalúe:

a) El área del triángulo de vértices A, B y C.

b) El volumen del prisma de base triangular de aristas AB, AC y AD.

c) Indique, justificando su respuesta, si $\{\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}, \boldsymbol{BC}\}$ es conjunto LD o LI.

## 4.4. PLANOS Y RECTAS

**C11**. a) Deduzca una expresión que permita determinar la distancia más corta de un punto dato $P_0$ $(x_0, y_0, z_0)$ al plano de ecuación: $Ax+By+Cz+D = 0$

b) Calcule la distancia del origen de coordenadas al plano cuya ecuación vectorial paramétrica está dada por: $\boldsymbol{OP}$ = (2, 6, 1) + μ (1, 0, 1) + β (2, 3, 0). $\mu, \beta \in \mathbb{R}$

c) Encuentre la ecuación de un plano que diste 4 unidades del plano cuya ecuación general es $\pi$: $-x + 2y + 2z + 3 = 0$. ¿Es único el plano hallado?

**C12**. Dados los planos: $\pi_1$: $3x - 2z + 4 = 0$ ; $\pi_2$: $y + z + 3 = 0$

a) Determine la ecuación de la familia de planos que pasa por la intersección de los planos dados.

b) Halle la ecuación del plano $\pi_3$ que pasa por la intersección de los dos planos dados y además pasa por el punto Q (0,0,7)

c) Complete la expresión: El plano $\pi_1$ es ..... al eje $y$; El plano $\pi_2$ es ..... al plano $yz$.

d) Represente gráficamente los planos $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$ y verifique las respuestas dadas en el inciso anterior

**C13**. Dada la función $y=f(x)$, real y continua en el intervalo $[x_A , x_B]$, en el que $f(x)$ tiene un cero. (es decir: $f(x_A).f(x_B)<0$ )

a) Obtenga la ecuación de la recta $L$ que une los puntos A ($x_A$, $y_A$) y B ($x_B$, $y_B$) de la curva.

b) Determine la abscisa para la cual la recta L del inciso anterior intersecta al eje de las abscisas $x$.

c) Indique sobre qué intervalo repetiría el procedimiento indicado en los incisos a) y b) para obtener una mejor aproximación a la raíz de $f(x) = 0$

**C14**. Dada la función $y=f(x)$, real y continua en el intervalo $[x_A , x_B]$, en el que $f(x)$ tiene un cero. (es decir: $f(x_A).f(x_B)<0$ ).

a) Obtenga la ecuación de la recta $L$ tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto A($x_A$ , $y_A$)

b) Determine la abscisa para la cual la recta $L$ del inciso anterior intersecta al eje de las $x$.

c) Indique un procedimiento para obtener una mejor estimación de la raíz de $f(x)= 0$.

**C15**. Dadas las siguientes rectas: $L_1: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $L_2: \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

a) Encuentre la ecuación vectorial paramétrica y las ecuaciones simétricas de la recta $L_2$. Identifique los números directores.

b) Indique justificando su respuesta, si las rectas dadas son paralelas, secantes o alabeadas

c) Determine la ecuación de un plano paralelo a las rectas $L_1$ y $L_2$ y que diste $\sqrt{32}$ del punto Q (1, 0, 0). ¿Es único dicho plano?

d) Determine la proyección del punto R (24, 12, 36) sobre el plano $xy$, paralelamente a la recta $L_2$

**C16**. Dadas las siguientes rectas: $L_1$: (x, y, z) = (0, 6, 2) + μ (0, -2, 2) $\mu \in \mathbb{R}$

$L_2$: (x, y, z) = (12, 2, 4) + β (0, 1, 2) $\beta \in \mathbb{R}$

a) Determine la distancia entre las rectas dadas $L_1$ y $L_2$.

b) Determine coordenadas del punto R de intersección de la recta $L_2$ con el plano *xy*.

c) Determine la ecuación de un plano $\pi_1$ perpendicular a la recta $L_1$ y que se encuentra a $\sqrt{2}$ unidades del punto Q (2,1,1). ¿Es único dicho plano?

**C17**. Dada la recta $L_1$ que pasa por el punto $P_1$ (1.5,0,0) y tiene por vector director a $\boldsymbol{u}$ = (0,-5,3), y el plano $\pi_1$ que pasa por Q (-4,3,4) y cuyo ventor normal es $\boldsymbol{n}$ = (5,0,0):

a) Determine la posición relativa entre la recta y el plano dados y represente gráficamente.

b) Verifique su respuesta empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Posiciones relativas entre recta y plano,* contenido en el Capítulo 2 del [*Libro Interactivo Geometría Dinámica*].

**C18**. Dada la recta $L_1$ que pasa por el punto $P_1$ (5,0,5) y tiene por vector director al vector $\boldsymbol{d_{L_1}}$ = (5,0,0) y la recta $L_2$ que pasa por el punto $P_2$ (5,5,0) y tiene por vector director al vector $\boldsymbol{d_{L_2}}$ = (3,-3,0):

a) Determine la posición relativa entre las rectas dadas y represente gráficamente.

b) Verifique su respuesta empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Posiciones relativas entre rectas,* del Capítulo 2 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

**C19**. La *Figura* 4.4 muestra una estructura de acero definida por los puntos:

A(0, 0, 12); B(6, 0, 12); C(0, 0, 0); D(6, 0, 0); E(6, -6, 0); F(0, -6, 0) y H(3, 0, 12).

a) Obtenga la ecuación del plano $\pi_1$ que pasa por los puntos F, E y H. Indique la posición relativa entre $\pi_1$ y el eje *z*.

b) Indique la posición relativa entre las rectas $L_1$ y $L_2$, siendo $L_1$ la recta que pasa por H y E, y $L_2$ la recta paralela al eje *z* que pasa por D.

.

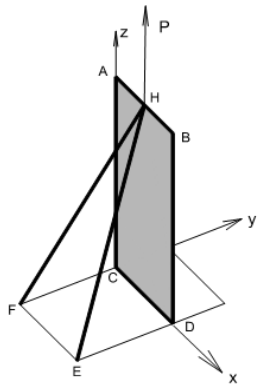



*Figura* 4.4. Representación gráfica del Ejercicio C19.

c) Para las rectas $L_1$ y $L_2$, encuentre su punto de intersección, o la distancia mínima entre ellas, según corresponda. (Exprese su respuesta aproximando con un decimal).

d) Encuentre el ángulo entre el panel ABCD y la recta $L1$.

Justifique sus respuestas utilizando operaciones exclusivamente vectoriales.

## 4.5. CIRCUNFERENCIAS

### C20.

a) Escriba la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por la intersección de las circunferencias $C_1: x^2 + y^2 - 8x + 8y + 7 = 0$ y $C_2: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$

b) Determine la ecuación de la circunferencia $C_3$ que pertenece a dicha familia y cuyo centro se encuentra sobre el eje $x$.

c) Halle la ecuación del eje radical de las dos circunferencias dadas y evalúe la longitud de la cuerda común a las mismas.

d) Verifique, gráfica y analíticamente, que el eje radical es perpendicular a la recta que une los centros de las circunferencias dadas.

**C21.** Demuestre que la recta tangente a una circunferencia de centro C($h$,$k$) y radio $r$, en un punto cualquiera T ($x_T$,$y_T$), es perpendicular al segmento de recta que une el centro C con el punto de tangencia T.

**C22.** Halle la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es C (2, –4) y es tangente a la recta $L$: $x - y = 0$. Represente gráficamente.

**C23.** Determine gráfica y analíticamente las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia de ecuación $C_1: x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0$ que pasan por el punto exterior Q (-7,-3).

## 4.6. PARÁBOLAS

**C24.** Determine los elementos de las parábolas dadas por las siguientes ecuaciones y represente gráficamente:

a) $x^2 = 12y$

b) $y^2 = 16x$

c) $(x - 3)^2 = -8(y - 4)$

d) $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$

**C25**. Halle el lugar geométrico de la cónica tal que la distancia desde uno cualquiera de sus puntos hasta el punto R (1,4) sea la misma que la distancia hasta la recta L de ecuación L: $y - 6 = 0$. Represente gráficamente.

**C26**. Se cuenta con un terreno de un ancho disponible de 70 m para desarrollar la cubierta parabólica de un estadio polideportivo.

a) ¿Cuál es la altura que alcanzará el arco en su centro si el lado recto de la parábola que lo representa es de 100 m?

b) ¿A qué distancia de los extremos es posible colocar una estructura de 6 m de altura?

c) Indique ecuaciones paramétricas que permitan describir al arco y halle con las mismas la altura de un punto situado a 10 m del centro.

**C27**. Determine la familia de parábolas de eje focal coincidente con el eje $y$ y cuyo vértice es el punto V (0,4).

**C28**. La estructura reticulada de la figura está formada por dos arcos parabólicos y posee una longitud entre los apoyos Q y R de 90m. La altura máxima de ambos arcos es de 50m y 65m respectivamente. Los montantes verticales se encuentran a una distancia horizontal de 15m entre sí.

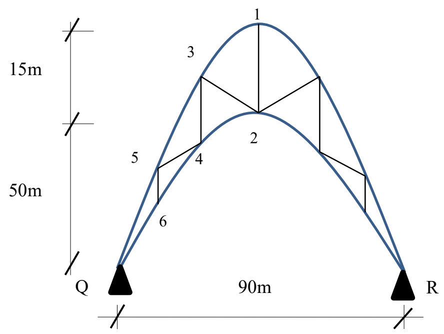



*Figura* 4.5. Representación gráfica del Ejercicio C28.

a) Seleccione un sistema de coordenadas apropiado y determine las ecuaciones de los dos arcos.

b) Calcule la longitud de los montantes 3-4, 5-6 y la longitud de la diagonal 4-5.

c) Utilice el software GeoGebra para verificar sus respuestas.

**C29**. En el diseño geométrico de un tobogán de 20 m de altura, se ha determinado que el perfil del mismo esté formado por la unión de un segmento parabólico al inicio (con eje focal coincidente con la escalera vertical de ascenso) seguido por un segmento recto que llega hasta el suelo. Se quiere aprovechar al máximo el espacio disponible del terreno, por lo cual se exige que el pie del tobogán se encuentre a 40 m de la mencionada escalera (punto Q). Los ingenieros han determinado que, a fin de que los niños puedan adquirir velocidad, pero conservando intacta la seguridad, el parámetro de la parábola al comienzo es $p = -20$.

a) Elija un sistema de referencia adecuado y exprese la ecuación cartesiana de la parábola.

b) Encuentre la ecuación de la recta a la que pertenece el segmento recto Y determine el punto de unión entre los dos segmentos y la ecuación del lugar geométrico del tobogán.

c) Verifique la pendiente de la recta utilizando derivación implícita de cónicas.

d) Verifique los incisos B y C utilizando GeoGebra.

## 4.7. ELIPSES E HIPÉRBOLAS

**C30**. Halle la ecuación general de una elipse, cuyo centro es C (1, 1), uno de sus vértices es V (1, 6) y su excentricidad vale 0,6. Represente gráficamente, indicando sus elementos.

**C31**. La base de un arco semielíptico tiene 22 metros de amplitud, en tanto que la altura en correspondencia con el eje de simetría es de 8 metros.

a) Seleccione un sistema de coordenadas adecuado y determine la ecuación que representa la forma del arco.

b) Calcule la altura del arco en correspondencia con los focos.

c) Determine el valor de la pendiente de la recta tangente estando a 2 metros de uno de los extremos.

d) Represente gráficamente.

**C32**.Una cúpula antigua tiene una sección vertical semielíptica. La amplitud de la base de dicha sección vertical es de 14 m y su altura en correspondencia con el eje de simetría es de 4 m. Si un ingeniero se sitúa en uno de sus focos ¿a qué altura se encuentra la cúpula? Represente gráficamente.

**C33**. Determine una familia de elipses cuyos focos son: $F_1$ (3,-2) y $F_2$ (3,6).

**C34**. Verifique la respuesta dada en el ejercicio C23 con la ayuda del *Recurso Geométrico Interactivo RGI – Tangentes a una elipse por un punto exterior,* contenido en el Capítulo 4 del Libro Interactivo Geometría Dinámica.

**C35**. Determine gráfica y analíticamente las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse $E$ por el punto exterior Q (10,4). La elipse $E$ es tal que sus focos son los puntos $F_1$ (-4,5) y $F_2$ (2,5) y pasa por el punto $P_0$ (2,2). Verifique la respuesta con la ayuda del *Recurso*

*Geométrico Interactivo RGI–Tangentes a una elipse por un punto exterior*, contenido en el Capítulo 4 del Libro Interactivo Geometría Dinámica.

**C36**. Halle la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (3, –1), su centro es el origen, su eje focal es el eje $x$ y una de sus asíntotas es la recta $L$: $2x + 3\sqrt{2}y = 0$. Grafique.

**C37**. Dada la ecuación: $x^2 - y^2 + 4x - 4y - 4 = 0$

a) Identifique la cónica y todos sus elementos.

b) Determine el ángulo que forman las rectas $L_1$ y $L_2$, siendo $L_1$ y $L_2$ las rectas tangentes a la cónica en los puntos en los que ésta intersecta a la cuerda focal que pasa por el foco de menor abscisa.

c) Grafique la cónica (indicando todos sus elementos) y las rectas $L_1$ y $L_2$.

d) Verifique sus respuestas representando gráficamente la cónica con el software GeoGebra y utilizando los *Comandos Tangente* y *Ángulo*.

**C38**. Halle la ecuación y los elementos de la hipérbola de centro en C (3, 2), foco en F (13, 2) y de excentricidad 5/4. Represente.

**C39**. Dada la ecuación cuadrática: $9x^2 - 16y^2 - 36x + 64y - 172 = 0$

a) Identifique la cónica y todos sus elementos.

b) Determine el ángulo que forman entre sí las rectas tangentes a la cónica, $L_2$ y $L_3$, en los puntos de intersección de la misma con la recta $L_1$: $y = 6$

c) Grafique la cónica y las rectas $L_1$, $L_2$ y $L_3$ .

**C40**. Determine gráfica y analíticamente las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola $H$ por el punto exterior Q (0,6). La hipérbola $H$ es tal que sus focos son los puntos $F_1$ (3,1) y $F_2$ (-2,1) y pasa por el punto $P_0$ (-2,-1). Verifique la respuesta con la ayuda del *Recurso Geométrico Interactivo RGI – Tangentes a una hipérbola por un punto exterior*, contenido en el Capítulo 4 del Libro Interactivo Geometría Dinámica.

**C41**. Deduzca una expresión que permita calcular el lado recto de una hipérbola de centro C (h,k), semiejes a y b y eje focal paralelo al eje $y$.

**C42**. Evalúe la pendiente de la recta tangente en un punto extremo de un lado recto para la parábola, la elipse y la hipérbola. ¿Qué conclusiones obtiene?

**C43**. Dada la elipse de centro en el origen de coordenadas y eje focal el eje de abscisas verifique la *propiedad de reflexión* en un punto extremo del lado recto correspondiente al foco $F_1$ (c,0).

## 4.8. SUPERFICIES

**C44**. Utilice los Recursos Geométricos Interactivos contenidos en el Capítulo 5 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica* para estudiar y comparar las *superficies cuádricas* con y sin centro. Elabore un cuadro comparativo que sintetice sus conclusiones.

**C45**. Identifique las siguientes superficies cuádricas (dar el nombre e indicar si se trata de una superficie cuádrica con o sin centro). Represente gráficamente.

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$

b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$

c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$

d) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$

e) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z$

**C46**. Represente gráficamente las siguientes *superficies cuádricas*, indicando en cada caso sus trazas y si se trata o no de una *cuádrica de revolución*. Justifique apropiadamente sus respuestas y verifique las mismas utilizando los *Recursos Geométricos Interactivos RGI – Superficies*, del Capítulo 5 del Libro Interactivo Geometría Dinámica.

a) Elipsoide de semiejes $a$=8, $b$=4, $c$=5

b) Hiperboloide de una hoja de semiejes $a$=3, $b$=3, $c$=2.5

c) Hiperboloide dos hojas de semiejes $a$=1.5, $b$=2, $c$=1.5

d) Paraboloide elíptico de semiejes $a$=1.75, $b$=1.25, $c$=4

e) Paraboloide hiperbólico de semiejes $a$=1.5, $b$=1.5, $c$=3

**C47**. Se desea construir una cubierta de generatriz semielíptica para un centro cultural, que cubra un espacio circular de 100 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 40m. Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho centro cultural.

**C48**. a) Dada la superficie $x^2 + y^2 = -4\,(z - 3)$, con $z \geq 0$, determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección con el plano $x + 3z - 8 = 0$.

b) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva que resulta de la proyección sobre el plano $xy$ de la curva hallada en el inciso (a).

c) Represente gráficamente.

d) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando los comandos *Interseca Recorridos* y *Curva* del software GeoGebra.

**C49**. Realice las actividades indicadas en el *Recurso Geométrico Interactivo RGI – Paraboloide Hiperbólico* del Capítulo de *Superficies y Secciones*, Capítulo 6 del Libro Interactivo Geometría Dinámica.

## 4.9. LUGARES GEOMÉTRICOS en COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS y ESFÉRICAS

**C50**. Determine la ecuación en coordenadas polares de una elipse con excentricidad $e = 0.8$, parámetro $p=5$ y directriz perpendicular al eje polar a la derecha del polo. Represente gráficamente. Verifique sus respuestas (gráfica y analítica) empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Cónicas en coordenadas Polares*, incluído en el Capítulo 4 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

**C51**. Determine la ecuación en coordenadas polares de una parábola con, parámetro $p=4.4$ y directriz paralela al eje polar debajo del polo. Represente gráficamente. Verifique sus respuestas (gráfica y analítica) empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Cónicas en coordenadas Polares*, incluido en el Capítulo 4 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

**C52**. Deduzca las fórmulas de transformación que expresen coordenadas cilíndricas en términos de coordenadas rectangulares y viceversa.

**C53**. Trace la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en *coordenadas cilíndricas*:

a) $\rho = 10$

b) $\theta = \frac{\pi}{6}$

c) $z = 10$

**C54**. Dada la ecuación en coordenadas cilíndricas: $\rho(2cos\theta + 5sen\theta) + 8z = 0$

a) Obtenga la ecuación en coordenadas cartesianas

b) Obtenga la ecuación en coordenadas esféricas

c) Represente gráficamente.

## 4.10. ROTACIONES y TRASLACIONES en el PLANO y en el ESPACIO

**C55**. Dada la ecuación cuadrática: $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 10 = 0$

Halle un sistema de coordenadas respecto del cual la cónica tenga su forma normal, halle la forma normal, identifique la cónica y grafíquela.

**C56**. Para los siguientes valores y vectores propios correspondientes a la matriz de la forma cuadrática asociada a la ecuación de una cónica, y los datos indicados de dicha ecuación en el sistema coordenado $xy$: identifique la cónica, indique la ecuación de la misma en el nuevo sistema coordenado y represente gráficamente $\lambda_1$=4 y $\lambda_2$=-3

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \ldots.; \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \;\; ; \;\; f = 24$$

**C57**. Teniendo en cuenta la información del siguiente gráfico, halle la ecuación de la cónica en el sistema coordenado $xy$.

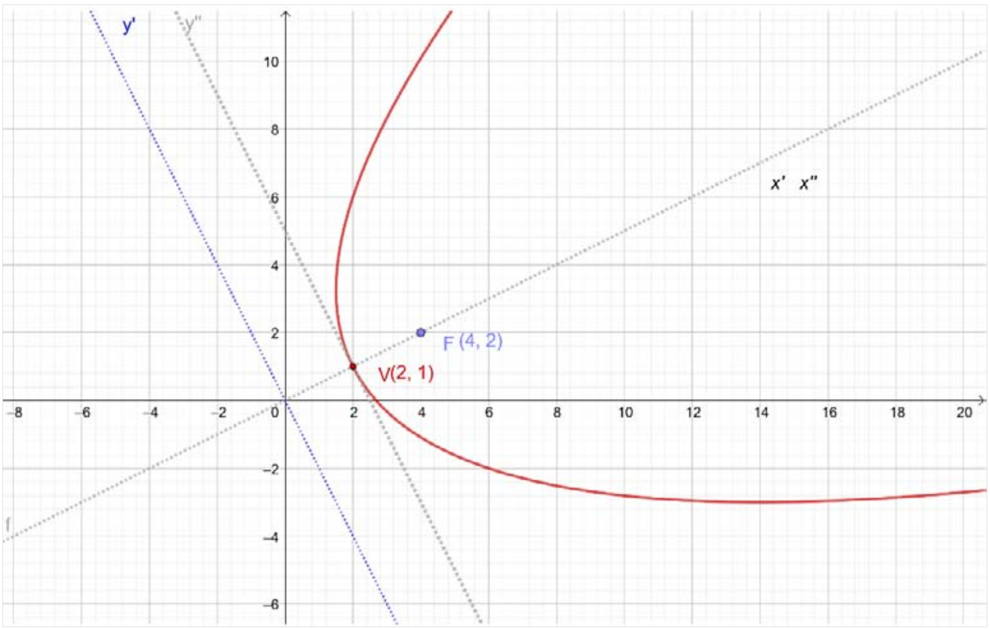



*Figura* 4.6. Representación gráfica del Ejercicio C56.

**C58**. Dada la ecuación cuadrática: $2xy - z = 0$

Halle un sistema de coordenadas respecto del cual la cuádrica tenga su forma normal, halle la forma normal, identifique la superficie cuádrica y grafíquela.

**C59**. Para los siguientes valores y vectores propios correspondientes a la matriz de la forma cuadrática asociada a la ecuación de una superficie cuádrica, y los datos indicados de dicha ecuación en el sistema coordenado $xyz$: identifique la superficie, indique la ecuación de la misma en el nuevo sistema coordenado y represente gráficamente en el nuevo sistema coordenado.

$$\lambda_1=-3 \quad ; \quad \lambda_2=4 \quad ; \quad \lambda_3=5 \quad ; \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}; \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}; \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# 5. RESPUESTAS Y/O RESOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

*Al estudiante:*

El presente Capítulo cuenta con respuestas y algunas resoluciones sintéticas de los ejercicios complementarios, para que puedas validar las tuyas. Sólo en algunos casos especiales encontrarás el desarrollo completo, tanto gráfica como analíticamente. Antes de leer las respuestas, te sugerimos resolver cada ejercicio en forma completa, realizar los gráficos en lápiz y papel y verificar la coherencia gráfico-analítica de tus resoluciones. En tu carpeta de trabajo deben quedar todas las justificaciones y los desarrollos completos de los ejercicios, incluyendo los gráficos, aun cuando no estén aquí indicados.

## 5.1. ESPACIOS VECTORIALES

### C1.

a) No es base de $\mathbb{R}^2$.

b) No es base de $\mathbb{R}^2$.

c) Es base de $\mathbb{R}^2$.

d) No es base de $\mathbb{R}^2$.

### C2.

a) El vector $\boldsymbol{u} = (-12\,,9)$, por lo tanto $(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{B}} = \left(-\frac{15}{8}, \frac{9}{2}\right)$.

b) Forman una base de $\mathbb{R}^2$.

### C3.

Caso I: $(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{B}} = (-4, -3)$

Caso II: $(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{B}} = (-1, -1)$

### C4.

a) $(\boldsymbol{w})_{\boldsymbol{B}} = (-3{,}2)$

b) $\boldsymbol{u} = (-2.5, -5.5)$

## 5.2. VECTORES GEOMÉTRICOS PRODUCTO ESCALAR

### C5.

a) Las coordenadas del vértice E son $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) La altura de la pirámide es $h = \frac{3\sqrt{2}}{2}[L]$ .

c) El ángulo entre las aristas BE y CE mide 60°.

## C6.

$\overrightarrow{\boldsymbol{proy_v w}} = (1{,}1)$

## C7.

a) $(\boldsymbol{v})_{B_1} = \left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$

c) Los vectores $\boldsymbol{u_1}\ y\ \boldsymbol{u_2}$ son ortogonales. Al normalizarlos se obtiene una BON de $\mathbb{R}^2$ dada por: $B_2 = \left\{\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}$

## C8.

a) Los tres vectores son ortogonales entre sí y tienen norma uno, por lo tanto, es BON de $\mathbb{R}^3$

b) $(\boldsymbol{v})_B = (0\,, 4\sqrt{2}\,, 8)$

c) Son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ LI, entonces generan a $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto forman una base de $\mathbb{R}^3$.

d) $Proy_{\boldsymbol{c}}\, \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}\,.\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|} = (0\,, 4\sqrt{2}\,, 8).(0{,}0{,}1) = 8$

# 5.3. PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO MIXTO

## C9.

a) Ver Capítulo 1 de *Geometría Analítica para Ciencias e Ingeniería* [*Raichman, Totter*].

b) El volumen del tetraedro es $2m^3$.

c) El ángulo entre $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AD}$ es aproximadamente 63°**.**

## C10.

a) $A = 18m^2$

b) $V = 162m^3$

c) Los vectores $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}\ y\ \boldsymbol{BC}$ son linealmente dependientes ya que su producto mixto es nulo.

# 5.4. PLANOS Y RECTAS

## C11.

a) Ver Capítulo 2 del Texto Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías, [*Raichman,* *Totter*].

b) La distancia del origen al plano dado es $\frac{9}{\sqrt{22}}[L]$.

c) Existen dos planos que distan a 4 unidades del plano $\pi$, cuyas ecuaciones generales son:
$\pi_1: -x+2y+2z-9=0 \qquad \pi_2: -x+2y+2z+15=0$

## C12.

a) La ecuación de la familia reducida de planos que pasa por la intersección de $\pi_1 y\ \pi_2$ es: $3x-2z+4+\lambda(y+z+3)=0 \quad \lambda \epsilon \mathbb{R}$

b) $\pi_3: 3x+y-z+7=0$

c) El plano $\pi_1$ es paralelo al eje $y$; el plano $\pi_2$ es perpendicular al plano $yz$.

## C13.

Se realiza una interpretación geométrica con los datos del enunciado:

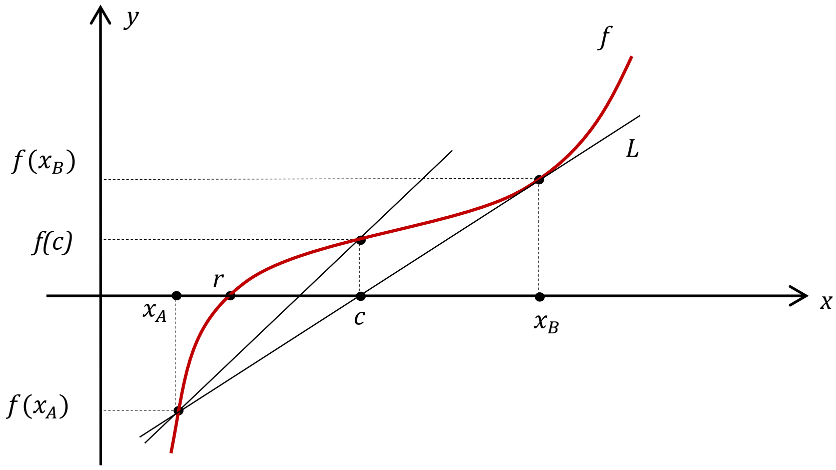



*Figura* 5.1. Representación gráfica del Ejercicio C13.

a) La recta $L$ une los puntos $(x_A, f(x_A))$ y $(x_B, f(x_B))$, por lo tanto su pendiente está dada por: $m=\frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}$. Por lo tanto, la ecuación de la recta $L$ puede escribirse como:

$$L: g(x)=\left[\frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}\right](x-x_A)+f(x_A)$$

b) La recta $L$ intersecta al eje de las abscisas $x$ cuando $g(c)=0$. Por lo tanto, se determina la abscisa del punto $(c,0)$, a partir de la ecuación de la recta $L$:

$$0=\left[\frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}\right](c-x_A)+f(x_A)$$

$$c=\frac{f(x_B)x_A-f(x_A)x_B}{f(x_B)-f(x_A)}$$

c) Para obtener una mejor aproximación de la raíz de $f(x)$=0, se procede de la siguiente manera:

Si $f(c)$ tiene distinto signo que $f(x_A)$, se repite el procedimiento indicado en los incisos anteriores para el intervalo $[x_A, c]$.

Si $f(c)$ tiene distinto signo que $f(x_B)$, se repite el procedimiento indicado en los incisos anteriores para el intervalo $[c, x_B\ ]$.

Este método de aproximación de raíces de ecuaciones no lineales se denomina Método de Regula Falsi y se implementa en la asignatura Métodos Numéricos.

## C14.

Se realiza una interpretación geométrica con los datos del enunciado:

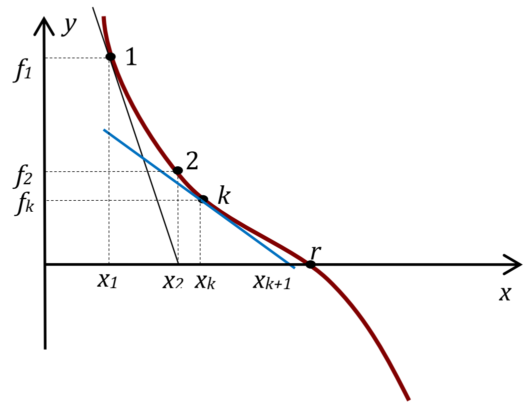



*Figura* 5.2. Representación gráfica del Ejercicio C14.

a) Analíticamente la recta $L$ pasa por el punto $[x_k, f(x_k)]$, y su pendiente se puede calcular como$f'(x_k)$. Por lo tanto, la ecuación de la recta $L$ resulta:

$L$: $g(x) - f(x_k) = f'(x_k)\ (x - x_k)$

b) La recta $L$ intersecta al eje de abscisas $x$ cuando $g(x_{k+1}) = 0$. Se determina la abscisa del punto $(x_{k+1}, 0)$ a partir de la ecuación de la recta $L$:

$$0 - f(x_k) = f'(x_k)\ (x_{k+1} - x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

c) A los efectos de obtener una mejor estimación de la raíz de $f(x)$=0, se repite el procedimiento anterior con la recta que pasa por el punto $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. Este método de aproximación de raíces de ecuaciones no lineales se denomina Método de Newton Raphson y se implementa en la asignatura Métodos Numéricos.

## C15.

a) La ecuación vectorial paramétrica de $L_2$: $(x, y, z) = (0,1,0) + t(-1,3,-1)\quad t\epsilon\ \mathbb{R}$.

Las ecuaciones simétricas de la recta $L_2$: $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}$.

Los números directores son: $u_x = -1, u_2 = 3\ y\ u_3 = -1$.

b) $L_1\ y\ L_2$ son rectas alabeadas.

c) Existen dos planos paralelos a $L_1\ y\ L_2$ que disten $\sqrt{32}$ unidades del punto $Q$, cuyas ecuaciones generales son: $\pi_1 : x - z + 7 = 0$ ; $\pi_2 : x - z - 9 = 0$.

d) La proyección de $R$ en el plano $xy$ es R'$(-12\ ;\ 120\ ;\ 0)$.

## C16.

a) La distancia entre $L_1 y\ L_2$ es $d = 12\ [L]$.

b) $R(12{,}0{,}0)$

c) Hay dos planos perpendiculares a $L_1$ que distan $\sqrt{2}$ unidades del punto $Q$, cuyas ecuaciones son: $\pi_1 = -2y + 2z + 4 = 0$ y $\pi_2 = -2y + 2z - 4 = 0$.

## C17.

a) Se tiene $L_1: (x, y, z) = (1.5{,}0{,}0) + \beta(0, -5{,}3)\ \ con\ \beta \in \mathbb{R}$ y $\pi_1: 5x + 20 = 0$, son paralelos no coincidentes.

## C18.

a) $\boldsymbol{d_{L1}} \neq k\boldsymbol{d_{L2}}$por lo tanto no son paralelas, luego $(\boldsymbol{d_{L1}} \wedge \boldsymbol{d_{L2}}).\boldsymbol{P_1P_2} = 75$ entonces las rectas son alabeadas.

## C19.

a) Se obtienen dos vectores paralelos al plano $\pi_1$: $\boldsymbol{EF} = (-6{,}0{,}0)$ y $\boldsymbol{HF} = (-3, -6, -12)$.

Luego $\boldsymbol{n_{\pi 1}} = (\boldsymbol{EF}\ \wedge \boldsymbol{HF}\ ) = (0, -72{,}36)$ .

Se concluye que la ecuación del plano es $\pi_1: -72y + 36z - 432 = 0$. El plano $\pi_1$ y el eje z son secantes.

b) Se tiene la recta $L_1: (x, y, z) = (6, -6{,}0) + \alpha(3, -6. -12)\ con\ \alpha \in R$ y la recta $L_2: (x, y, z) = (6{,}0{,}0) + \beta(0{,}0{,}1)\ con\ \beta\ \epsilon\ \mathbb{R}$. Como $\boldsymbol{d_{L1}} \neq k\boldsymbol{d_{L2}}$ no son paralelas, luego $(\boldsymbol{d_{L1}} \wedge \boldsymbol{d_{L2}}).\boldsymbol{P_1P_2} = -18$ , entonces las rectas son alabeadas.

La distancia entre las rectas $L_1 y\ L_2$ es $d \approx 2.7[L]$.

c) El ángulo comprendido entre el panel y la recta $L_1$es: $\beta \approx 64°$ o $\alpha \approx 26°$ .

# 5.5. CIRCUNFERENCIAS

## C20.

a) Familia de circunferencias que pasan por la intersección de $C_1\ y\ C_2$:

$x^2 + y^2 - 8x + 8y + 7 + \mu(x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23) = 0\ con\ \mu \in \mathbb{R}$

b) $C_3: x^2 + y^2 + \frac{16}{3}x - 33 = 0$

c) La ecuación del eje radical es $-5x + 3y + 15 = 0$. La longitud de la cuerda común a las circunferencias es $\|\boldsymbol{P_1P_2}\| \approx 8.16[L]$.

d) La recta que pasa por los centros de las circunferencias $C_1$ y $C_2$, está dada por: $y = -\frac{3}{5}x - \frac{8}{5}$, Es una recta perpendicular al eje radical ya que sus pendientes son inversas y opuestas.

## C21.

La ecuación de la circunferencia que tiene centro en $C(h,k)$ y radio $r$ es

$\mathcal{C}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y el vector $\boldsymbol{CT} = (x_T - h, y_T - k)$.

Como se debe probar que $\boldsymbol{CT}$ es perpendicular a la recta tangente, se determina el vector director de la misma, $\boldsymbol{d_L}$ , derivando implícitamente $\mathcal{C}$ , $y' = -\frac{x-h}{y-k}$ evaluada en el punto $T(x_T, y_T)$ se tiene $y'_T = \frac{h-x_T}{y_T-k}$ .

Por lo tanto $\boldsymbol{d_L} = (y_T - k, h - x_T)$.

Para demostrar que $\boldsymbol{d_L}$ es perpendicular a $\boldsymbol{CT}$, se calcula el producto escalar:

$\boldsymbol{d_L}.\boldsymbol{CT} = (y_T - k, h - x_T)\boldsymbol{.}\,(x_T - h, y_T - k)$

$\boldsymbol{d_L}.\boldsymbol{CT} = y_T x_T - hy_T - kx_T + kh + hy_T - kh - y_T x_T + kx_T$

$\boldsymbol{d_L}.\boldsymbol{CT} = 0$

Queda demostrado que la recta tangente a la circunferencia de centro en $C(h,k)$ y radio $r$ , es perpendicular al segmento que une el centro con el punto de tangencia.

## C22.

La ecuación de la circunferencia es: $(x-2)^2 + (x+4)^2 = 18$.

## C23.

La ecuación general de la circunferencia es $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0$ al completar cuadrados, se obtiene la ecuación cartesiana:

$(x+4)^2 + (y-5)^2 = 3^2$ luego $C(-4,5)$ y $r = 3$.

La familia de rectas (no verticales) que pasan por el punto $Q(-7,-3)$ resulta: $y + 3 = m(x+7)$ con $m \in \mathbb{R}$ , cuya ecuación general es

$mx - y + 7m - 3 = 0$ con $m \in \mathbb{R}$.

La distancia del centro de la circunferencia, $C(-4,5)$, a la recta tangente es igual al radio, por lo tanto:

$r = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$3 = \frac{|m(-4) - 1(5) + 7m - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}$

Al resolver la ecuación, se obtiene $m=\frac{55}{48}$ por lo tanto $L_1: y=\frac{55}{48}x+5$.

La única recta que pertenece a la familia, que es tangente a la circunferencia y que además pasa por $Q$ es $L_1$.

Ahora se verifica si la recta vertical que pasa por $Q$ , es decir $x=-7$ es tangente a la circunferencia, obteniendo si existe la intersección entre ambos lugares geométricos:

$$\begin{cases} x^2+y^2+8x-10y+32=0 \\ x=-7 \end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtiene una única solución que es el punto $T(-7{,}5)$. Por lo tanto, las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por el punto $Q$ son:

$L_1: y=\frac{55}{48}x+5$ y $L_2: x=-7$.

## 5.6. PARÁBOLAS

### C24.

a) $x^2=12y$

Eje focal: eje $y$ $p=6$

Vértice: $V(0,0)$ Foco: $F(0;3)$

Directriz: $D: y=-3$

Lado Recto: $|LR|=12$

Puntos extremos del lado recto:

$A(-6;3)$ y $A'(6;3)$

b) $y^2=16x$

Eje focal: eje $x$ $p=8$

Vértice: $V(0,0)$ Foco: $F(4;0)$

Directriz: $D: x=-4$

Lado Recto: $|LR|=16$

Puntos extremos del lado recto:

$A(4;8)$ y $A'(4;-8)$

c) $(x-3)^2=-8(y-4)$

Eje focal:
paralelo al eje $y$
$p=-4$

Vértice: $V(3,4)$ Foco: $F(3;2)$

Directriz: Lado Recto:

$D: y=6$ $|LR|=8$

Extremos del lado recto:

$A(7;2)$ y $A'(7;-2)$

d) $y^2+4x+2y+9=0$

Eje focal:
paralelo al eje $x$
$p=-2$

Vértice: Foco: $F(-3;-1)$
$V(-2,-1)$

Directriz: Lado Recto:

$D: x=-1$ $|LR|=4$

Puntos extremos del lado recto:

$A(-3,1)$ y $A'(-3,-3)$

## C25.

La condición impuesta coincide con la definición de parábola, la ecuación que responde a los datos es: $(x-1)^2=-4(y-5)$.

## C26.

Considerando un sistema de referencia dónde el eje $x$ coincide con el nivel de suelo y el eje $y$ con el eje focal de la parábola la forma de la ecuación que describe la sección transversal de la cubierta parabólica es:

$x^2=2p(y-k)$; con $V(0,k)$.

Se conoce que $|LR|=|2p|=100$, por lo tanto, se obtiene que $p=-50$.

En el sistema de referencia elegido, la parábola pasa por los puntos $B(-35,0)$ y $C(35,0)$. Luego $35^2=-100(0-k)$ y se obtiene $k=12{,}25$.

La ecuación de la parábola que describe la sección transversal de la cubierta resulta:

$x^2=-100(y-12{,}25)$ para $y\geq 0$

a) La altura máxima que alcanzará el arco es $12{,}25m$ desde el nivel del suelo.

b) Si se necesita colocar una estructura de $6m$ de altura, se determina la distancia a los extremos sustituyendo $y = 6$ en la ecuación obtenida en a):

$x^2 = -100(6 - 12{,}25)$

Luego $x = 25$ o $x = -25$. Por lo tanto, se dispone de una altura de 6m a una distancia de 10m de los extremos.

c) Las ecuaciones paramétricas que permitan describir el arco son:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{-100} + 12{,}25 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Para $t = 10$, se obtiene $y = 11{,}25$. Es decir que la altura de un punto situado a la $10m$ del centro es $11{,}25m$.

## C27.

La familia de parábolas de eje focal coincidente con el eje $y$, cuyo vértice es el punto $\mathrm{V}(0{,}4)$ es:

$x^2 = 2\,t\,(y - 4) \qquad t \in \mathbb{R}.$

## C28.

a) Se trabaja con el eje $x$ en coincidencia con el nivel de los apoyos y con el eje $y$ en coincidencia con los puntos de mayor altura las parábolas (vértices). Siendo el eje $y$ el eje focal de ambas parábolas.

La ecuación de la parábola correspondiente al arco superior es:

$x^2 = -31{,}16(y - 65)$ con $0 \leq y \leq 65.$

La ecuación de la parábola correspondiente al arco inferior es:

$x^2 = -40{,}50(y - 50)$ con $0 \leq y \leq 50.$

b) Se determinan las coordenadas de los puntos pertenecientes a las parábolas cuyas abscisas son $x = -15m$ y $x = -30m$ (sabiendo que los montantes se encuentran distanciados $15m$ en horizontal):

Obtenemos: $P_3(-15; 57{,}58)$, $P_4(-15; 44{,}44)$ , $P_5(-30; 36{,}12)$ y $P_6(-30; 27{,}78)$

Las longitudes de los montantes se determinan como: $\|\boldsymbol{P_3P_4}\| = 13{,}34m$ $\|\boldsymbol{P_5P_6}\| = 8{,}34m$ y la longitud de la diagonal 4-5 es: $\|\boldsymbol{P_4P_5}\| = 17{,}15m$.

## C29.

a) Elaborado el croquis del problema, se ve que es posible colocar el origen del sistema de coordenadas cartesianas en varios puntos de interés (punto O ó B de la figura). Lo importante es la consistencia en las ecuaciones derivadas. En este caso, se elige como origen del sistema de referencia al vértice de la parábola, punto B, que es el punto más alto del tobogán.

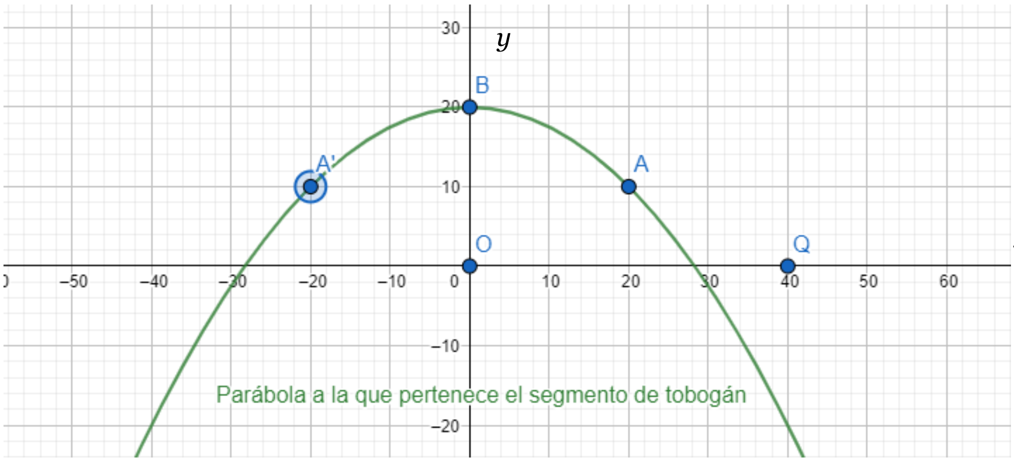



*Figura* 5.3. Representación gráfica del Ejercicio C29.a.

Para el esbozo de la gráfica en forma aproximada, recuérdese que el vértice V (0,20) equidista $|\frac{p}{2}|$ tanto de la recta directriz como del parámetro. Por lo tanto, el foco de la parábola tiene coordenadas (0, 10). Perpendicular al eje focal y pasando por el foco, sabemos que el lado recto mide:

$LR = |2p| = 40$

Lo que permite ubicar los puntos A (20,10) y A' (-20,10) de la parábola, y hacer un gráfico estimado de esta. Reemplazando en la ecuación cartesiana de la parábola de eje focal coincidente con el eje 'y' se obtiene la ecuación de la parábola:

$2p(y - k) = (x - h)^2$

$-40(y - 20) = x^2$

b) La familia de rectas que pasa por el punto Q$(x_0, y_0)$ es, utilizando la forma punto pendiente de las mismas, $(y - y_0) = m(x - x_0)$:

$y = m(x - 40)$

Para encontrar el punto de encuentro entre el segmento parabólico y el segmento recto, se plantea la intersección de ambos lugares geométricos:

$$\begin{cases} -40(y - 20) = x^2 \\ y = m(x - 40) \end{cases}$$

Reacomodando las ecuaciones y despejando en la de abajo la variable 'y':

$$\begin{cases} x^2 + 40y - 800 = 0 \quad (1) \\ y = mx - 40m \qquad\quad (2) \end{cases}$$

Sustituyendo (2) en (1)

$x^2 + 40(mx - 40m - 20) = 0$

$x^2 + 40mx - 1600m - 800 = 0 \quad (3)$

La cual es una sola ecuación con dos incógnitas. Sin embargo, se interpreta del problema que el segmento recto es tangente al segmento parabólico, ya que sino el tobogán presentaría un quiebre en el diseño y no una transición suave, algo que no es admisible. Por tanto, puede aplicarse a la ecuación (3) la condición de tangencia, es decir, que el discriminante de la ecuación cuadrática sea nulo ( $b^2 - 4ac = 0$ ), con los coeficientes:

$a = 1$: $b = 40m$; $c = -1600m - 800$

Reemplazando:

$$(40m)^2 - 4.1.(-1600m - 800) = 0$$

$$1600m^2 + 6400m + 3200 = 0$$

Teniendo esta ecuación cuadrática en la variable $m$, se resuelve de la siguiente manera:

$$m_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6400 + \sqrt{(6400)^2 - 4.1.3200}}{2.1}$$

$$m_1 = -2 - \sqrt{2}$$

$$m_2 = -2 + \sqrt{2}$$

Al existir dos rectas tangentes a la parábola que pasan por el punto Q, se buscan los puntos de intersección de ambas rectas con la parábola, y se descarta el que no posea significado físico para el problema de interés:

$$\begin{cases} y_1 = \left(-2 - \sqrt{2}\right).(x_1 - 40) & (4) \\ {x_1}^2 + 40y_1 - 800 = 0 & (5) \end{cases}$$

Sustituyendo (4) en (5)

$${x_1}^2 + 40\left(-2 - \sqrt{2}\right).(x_1 - 40) - 800 = 0$$

$${x_1}^2 + 40\left(-2 - \sqrt{2}\right)x_1 + 40\left(80 - 40\sqrt{2}\right) - 800 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-40\left(-2 - \sqrt{2}\right) + \sqrt{\left(40\left(-2 - \sqrt{2}\right)\right)^2 - 4.1.\left(40\left(80 - 40\sqrt{2}\right) - 800\right)}}{2.1}$$

$$x_1 = 68{,}28$$

Como se ve, es imposible que el punto de intersección esté en la abscisa 68,28 ya que allí el tobogán no existe. Por tanto, se calcula el punto de intersección con la otra pendiente:

$${x_2}^2 + 40\left(-2 - \sqrt{2}\right).(x_2 - 40) - 800 = 0$$

$${x_2}^2 + 40\left(-2 - \sqrt{2}\right)x_2 + 40\left(80 - 40\sqrt{2}\right) - 800 = 0$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-40(-2+\sqrt{2}) + \sqrt{(40(-2+\sqrt{2}))^2 - 4.1.(40(80+40\sqrt{2}) - 800)}}{2.1}$$

$x_2 = 11{,}715$

Para dicha abscisa, con la ecuación de la recta (aunque puede efectuarse también con la ecuación de la parábola), se busca la ordenada correspondiente:

$y_2 = (-2+\sqrt{2})(x_2 - 40)$

$y_2 = 16{,}57$

Por lo tanto, el punto de intersección de ambos segmentos es P (11,715; 16,57).

Finalmente, el lugar geométrico que ocupa el tobogán resulta:

$$\begin{cases} -40(y-20) = x^2 \quad , & 0 < x \leq 11{,}715 \\ y = (-2+\sqrt{2})(x-40), & 11{,}715 < x \leq 40 \end{cases}$$

c) Derivando implícitamente la ecuación de la parábola (eje focal // al eje ‘y’):

$\frac{d}{dx}(2p(y-k)) = \frac{d}{dx}x^2$

$2py' = 2x$

$y' = \dfrac{x}{p}$

Reemplazando la abscisa por la correspondiente al punto de tangencia, $y'_T = \frac{x_T}{p} = \frac{11{,}715}{-20}$

$y'_T = -0{,}5857 \cong -2+\sqrt{2}$

Que es el mismo valor de la pendiente $m_2$.

d)

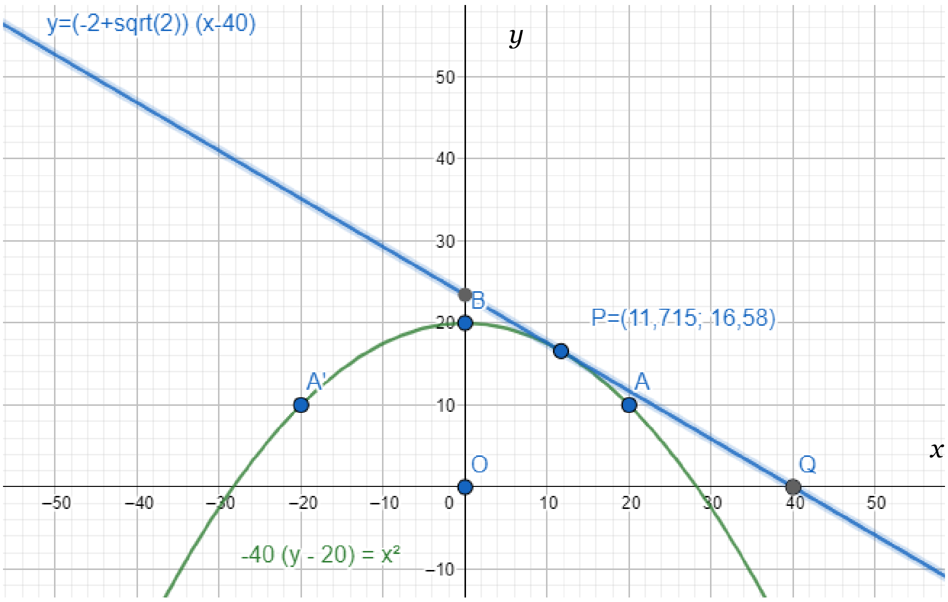



*Figura* 5.4. Representación gráfica del Ejercicio C29.c.

# 5.7. ELIPSES E HIPÉRBOLAS

## C30.

Siendo $C(1{,}1)$ y unos de sus vértices $V(1{,}6)$, existe dos opciones:

i) Elipse con eje focal paralelo al eje $y$: $\frac{(y-1)^2}{5^2}+\frac{(x-1)^2}{4^2}=1$

ii) Elipse con eje focal paralelo al eje $x$: $\frac{(x-1)^2}{6{,}25^2}+\frac{(y-1)^2}{5^2}=1$

## C31.

a) Se elige el origen del sistema de coordenadas en el centro del arco semielíptico, con el eje $y$ en coincidencia con el eje de simetría y el eje $x$ en coincidencia con el nivel del suelo. Luego $a=\frac{22m}{2}=11\,m$ y por lo tanto $b=8\,m$. Por lo tanto, la ecuación del arco semielíptico es:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{11^2}+\dfrac{y^2}{8^2}=1 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

b) La altura en correspondencia con los focos es el valor de la ordenada para la abscisa $x=c$. Por lo tanto, se calcula $c$ de la siguiente manera:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{11^2-8^2}=\sqrt{57}m\cong 7{,}55\,m$$

Al reemplazar $x=7{,}55$ en la ecuación del arco se obtiene la altura en correspondencia con los focos:

$$y=8\sqrt{1-\frac{x^2}{11^2}}=8\sqrt{1-\frac{57}{11^2}}=\frac{64}{11}\,m\ \cong 5{,}82\,m$$

c) Se deriva implícitamente para encontrar la pendiente de la recta tangente:

$$\frac{2x}{11^2}+\frac{2y\,y'}{8^2}=0$$

$$y'=-\frac{8^2\,x}{11^2\,y}$$

Los extremos se corresponden con un valor de $11m$ para la variable $x$, por lo que a 2 $m$ del extremo, $x=9$. Se calcula la ordenada del punto $(9,y)$:

$$y=8\sqrt{1-\frac{9^2}{11^2}}=\frac{16\sqrt{10}}{11}\cong 4{,}60\,m$$

Luego se calcula la pendiente de la recta tangente al sustituir $(9;4{,}6)$ en la derivada primera:

$$y'=-\frac{8^2\,x}{11^2\,y}=-\frac{8^2\,9}{11^2\,4{,}60}=-1{,}035$$

Se concluye que la pendiente de la recta estando a $2m$ de uno de los extremos es aproximadamente $-1{,}035$.

## C32.

Si un ingeniero se sitúa en uno de los focos, la cúpula estará aproximadamente a $2{,}29m$ de altura.

## C33.

Se determina el centro de la elipse como el punto medio entre los dos focos:

$$\boldsymbol{OF_1} = (3, -2)$$

$$\boldsymbol{OF_2} = (3, 6)$$

$$\boldsymbol{F_1C} = \frac{\boldsymbol{OF_2} - \boldsymbol{OF_1}}{2} = \frac{(3,6) - (3,-2)}{2} = (0, 4)$$

$$\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OF_1} + \boldsymbol{F_1C} = (3, 2)$$

$$c = \frac{\|\boldsymbol{F_1F_2}\|}{2} = \frac{\|\boldsymbol{OF_2} - \boldsymbol{OF_1}\|}{2} = 4$$

Luego $c = 4$ y permanece constante para cualquier elipse de la familia, por lo tanto, se pueden considerar como parámetros $a$ o $b$.

Teniendo en cuenta que el eje focal es $x = 3$ (paralelo al eje y) y el centro C(3,2), si se toma como parámetro el valor del semieje menor $b$ se tiene como ecuación de la familia de elipses:

$$\frac{(x-3)^2}{b^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2 + 4^2} = 1 \quad , \qquad b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Si se considera como parámetro el valor del semieje mayor $a$ la ecuación de la familia es:

$$\frac{(x-3)^2}{a^2 - 4^2} + \frac{(y-2)^2}{a^2} = 1 \quad , \qquad a \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$$

## C34.

Recurso Geométrico Interactivo RGI – Tangentes a una elipse por un punto exterior, Capítulo 3 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

## C35.

Como datos se tienen $F_1(-4{,}5)$ $y$ $F_2(2{,}5)$ , a partir de ellos se determina $c$:

$$c = \frac{\|\boldsymbol{F_1F_2}\|}{2} = \frac{\|\boldsymbol{OF_2} - \boldsymbol{OF_1}\|}{2} = 3$$

Luego el centro es $C(-1, 5)$, y la forma de la ecuación de la cónica es

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-5)^2}{b^2} = 1$$

Se conoce un punto de la elipse $P_0(2{,}2)$, al ser su abscisa igual a la del foco, entonces $P_0$ es uno de los extremos del lado recto. Por lo tanto:

$$\frac{|LR|}{2} = \frac{b^2}{a} = \|\boldsymbol{F_2 P_0}\|$$

$$\frac{b^2}{a} = \|(0,-3)\| = 3$$

De esta última expresión y la relación de los semiejes $b^2 = a^2 - 3^3$ se calcula el valor de $a$:

$$3 = \frac{a^2 - 9}{a}$$

$$a^2 - 3a - 9 = 0$$

$$a = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \cong 4{,}854$$

Al conocer el valor del semieje mayor, se determina el valor del semieje menor de la elipse:

$$b = \sqrt{a^2 - 9} = 3\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cong 3{,}816$$

Luego la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x+1)^2}{4{,}854^2} + \frac{(y-5)^2}{3{,}816^2} = 1$$

Para que resulten más sencillos los cálculos en el desarrollo de las ecuaciones de las rectas tangentes , se trabajará con la ecuación general de la elipse, y al finalizar se sustituyen los valores de $a\ y\ b$, obtenidos anteriormente. Se calcula la derivada primera de la ecuación de la elipse para encontrar las pendientes de las rectas tangentes que pasan el punto exterior $Q(10{,}4)$:

$$y' = -\frac{b^2(x+1)}{a^2(y-5)}$$

Se define $T(x_T, y_T)$ como el punto de tangencia: Luego el vector $\boldsymbol{QT}$, dado por sus componentes $\boldsymbol{QT} = (x_T - 10, y_T - 4)$, es un vector director de la recta tangente. Por lo tanto, se puede expresar la siguiente igualdad:

$$y' = -\frac{b^2(x_T+1)}{a^2(y_T-5)} = \frac{y_T - 4}{x_T - 10}$$

Al trabajar algebraicamente se obtiene la siguiente ecuación:

$$b^2x_T^2 + a^2y_T^2 - 9b^2x_T - 9a^2y_T + 20a^2 - 10b^2 = 0 \quad [1]$$

Como $T(x_T, y_T)$ pertenece a la elipse satisface su ecuación, es decir:

$$b^2x_T^2 + a^2y_T^2 + 2b^2x_T - 10a^2y_T + 25a^2 + b^2 - a^2b^2 = 0 \qquad [2]$$

Se determina un sistema de ecuaciones con las ecuaciones [1] y [2]

$$\begin{cases} b^2x_T^2 + a^2y_T^2 + 2b^2x_T - 10a^2y_T + 25a^2 + b^2 - a^2b^2 = 0 \\ b^2x_T^2 + a^2y_T^2 - 9b^2x_T - 9a^2y_T + 20a^2 - 10b^2 = 0 \end{cases}$$

Al restar miembro a miembro ambas ecuaciones se obtiene $y_T = \frac{11b^2}{a^2}x_T + 5 + \frac{11b^2}{a^2} - b^2$

Remplazamos en la ecuación general de la elipse:

$b^2x_T^2 + 2b^2x_T + b^2 + a^2(y_T - 5)^2 - a^2b^2 = 0$

$$b^2x_T^2 + 2b^2x_T + b^2 + a^2(\frac{11b^2}{a^2}x_T + 5 + \frac{11b^2}{a^2} - b^2 - 5)^2 - a^2b^2 = 0$$

Al sustituir los valores de $a$ y $b$, y agrupar términos semejantes se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$(25.673{,}91)x_T^2 - 58.578{,}26x_T + 33.137{,}07 = 0$

Cuyas soluciones aproximadas son:

$x_{T1} = 1{,}037, \qquad y_{T1} = 1{,}536$

$x_{T2} = 1{,}24, \qquad y_{T2} = 8{,}385$

Con esta información de las coordenadas de los puntos de tangencia, es posible escribir ecuaciones de las rectas tangentes $L_1$ y $L_2$ que pasan por el punto exterior $Q(10, 4)$:

$$m_1 = \frac{y_{T1} - 4}{x_{T1} - 10} = 0{,}275$$

$L_1: y = 0{,}275x + 1{,}25$

$$m_2 = \frac{y_{T2} - 4}{x_{T2} - 10} = -0{,}50$$

$L_2: y = -0{,}5x + 9$

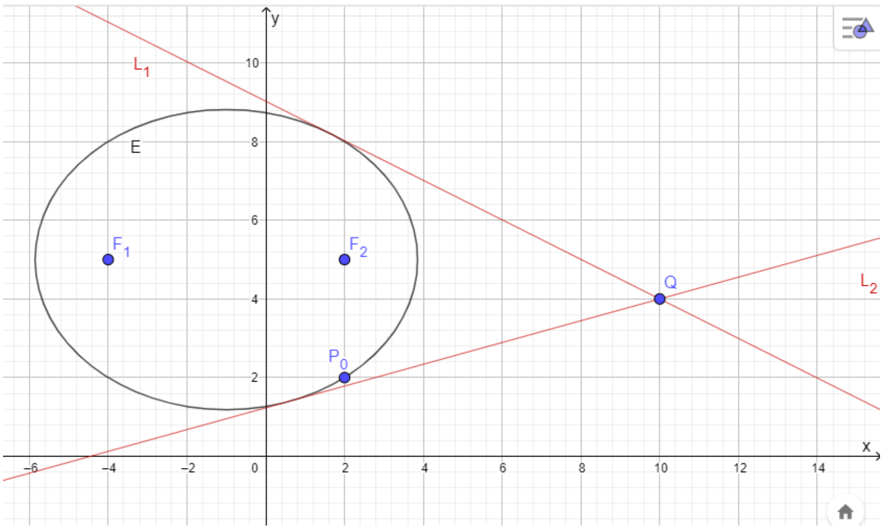



*Figura* 5.5. Representación gráfica del Ejercicio C35.

# C36.

La ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} - y^2 = 1$.

## C37.

a) Para identificar de qué cónica se trata, es necesario completar cuadrados y encontrar su ecuación cartesiana:

$$\frac{(x+2)^2}{2^2}-\frac{(y+2)^2}{2^2}=1$$

Por lo tanto se trata de una hipérbola equilátera con semieje real $a=2$, semieje imaginario: $b=2$, eje focal $y=-2$, distancia focal $c=2\sqrt{2}$, su centro es $C(-2,-2)$, los focos $F_1(-4{,}82,-2)$ y $F_2(0{,}82,-2)$, vértices $V_1(-4,-2)$ , $V_2(0,-2)$, $V_3(-2,-4)$ y $V_4(-2,0)$, $|LR|=4$, extremos del lado recto $B(-4{,}82\,,0)$ , $B\'(-4{,}82\,,-4)$ $y$ $A(0{,}82\,,0)$ y $A\'(0{,}82\,,-4)$.

Ecuaciones de las asíntotas: $y=x$ ; $y=-x-4$.

b) El foco de menor abscisa es $F_1(-4{,}82,-2)$, y los extremos del lado recto correspondientes son $B(-4{,}82\,,0)$ y $B\'(-4{,}82\,,-4)$.

Se deriva implícitamente la ecuación de la hipérbola para determinar los vectores directores de las rectas $L_1$ $y$ $L_2$: $2x-2y\,y\'+4-4y\'=0$

$$y\'=\frac{x+2}{y+2}$$

Sea $L_1$ la recta tangente en el punto $B$, luego su pendiente es $y\'=\frac{-4{,}82+2}{0+2}=-\sqrt{2}$, por lo tanto, un vector director está dado por: $\boldsymbol{d_{L1}}=(1,-\sqrt{2})$. Sea $L_2$ la recta tangente en el punto $B$’, luego su pendiente es $y\'=\frac{-4{,}82+2}{-4+2}=\sqrt{2}$, por lo tanto, un vector director está dado por: $\boldsymbol{d_{L_2}}=(1,\sqrt{2})$. El ángulo comprendido entre las rectas se calcula como

$cos(\theta)=\frac{\boldsymbol{d_{L1}}.\boldsymbol{d_{L2}}}{\|\boldsymbol{d_{L1}}\|\,\|\boldsymbol{d_{L2}}\|}=-\frac{1}{3}$. Luego $\theta=109°28\'16{,}4\'\'$

c)

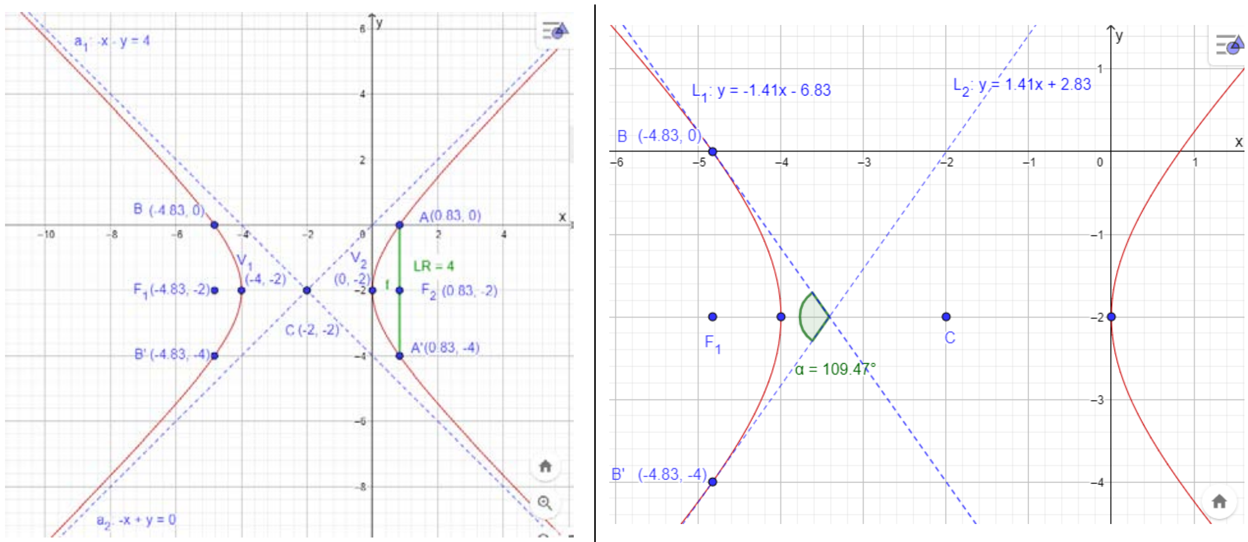



Gráfico inciso (a) Gráfico inciso (b)

*Figura* 5.6. Representación gráfica del Ejercicio C37.

## C38.

La ecuación de la hipérbola es $\frac{(x-3)^2}{64}-\frac{(y-2)^2}{36}=1$, cuyos elementos son:

Centro: $C(3,2)$; Focos: $F_1(13{,}2)$ , $F_2(-7,2)$; vértices: $V_1(11,2)$ , $V_2(-5,2)$, $V_3(3,8)$, $V_4(3,-4)$;$|LR|=9$; Puntos extremos del lado recto: $A(-7\,,6.5)$ , $A´(-7\,,-2.5)$ $B(13\,,6.5)$ y $B´(13\,,-2.5)$;

Ecuaciones de las asíntotas: $y=\frac{3}{4}x-1/4$ ; $y=-\frac{3}{4}x+17/4$.

## C39.

a) La cónica es una hipérbola de ecuación cartesiana $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$

Centro: $C(2,2)$; focos: $F_1(7{,}2)$ , $F_2(-3,2)$; vértices: $V_1(2,5)$ , $V_2(2,-1)$ $V_3(6,2)$ , $V_4(-2,2)$; $|LR|=4.5$; extremos del lado recto $A(7;4{,}5), A'(7;-0{,}25)$, $B(-3;4{,}5) y\, B'(-3;-0{,}25)$; asíntotas: $y=\frac{3}{4}x+1/2$ , $y=-\frac{3}{4}x+7/2$.

b) El ángulo comprendido entre las rectas tangentes a la cónica en los puntos de intersección con $L_1$ es $\theta\approx 86{,}3°$.

## C40.

La ecuación de la hipérbola es $\frac{(x-0.5)^2}{2.86}-\frac{(y-1)^2}{3.39}=1$ , de la cual se deducen las ecuaciones de las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $Q(0{,}6)$:

L1: $y=\ -2.48\,x+6$

L2: $y=4.41\,x+6$

## C41.

La ecuación de una hipérbola con centro en $C(h,k)$,y eje focal paralelo al eje $y\ es$ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$.

Por definición el lado recto es la cuerda focal perpendicular al eje focal, por lo tanto si evaluamos la ecuación de la cónica en la ordenada del foco $(h,c+k\,)$, se obtienen las abscisas de los extremos del lado recto:

$A(h+\frac{b^2}{a}\,,c+k)$ , $A´(h-\frac{b^2}{a}\,,c+k)$ .

Luego $|LR|=\|\boldsymbol{AA´}\|=2\frac{b^2}{a}$

## C42.

*Parábola:*

Sea una parábola de ecuación $y^2=2px$, tal como se indica en la *Figura* 5.7.

$y$

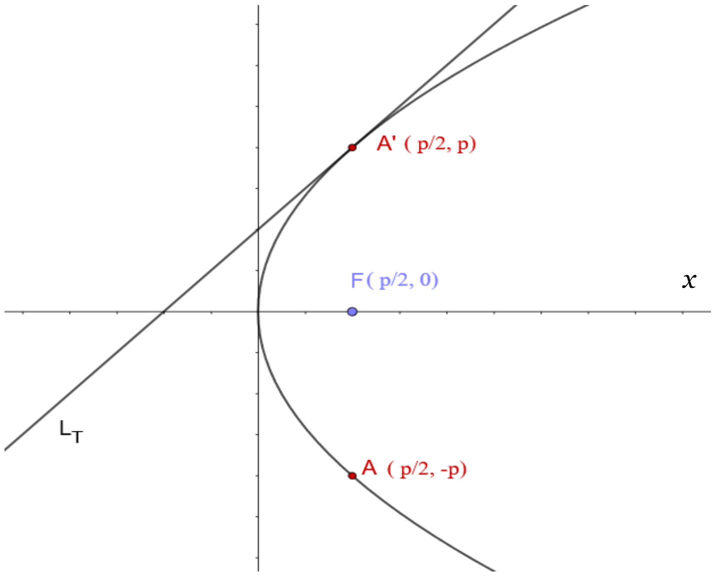



*Figura* 5.7. Representación gráfica del Ejercicio C41.a.

La pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la misma está dada por: $y' = \frac{p}{y}$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente a la parábola en los puntos extremos del lado recto será 1 y -1, según el extremo del lado recto que se considere.

*Elipse*

Sea una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tal como se indica en la *Figura* 5.8.

La pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la misma está dada por:

$y' = \frac{-xb^2}{ya^2}$.

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en los puntos extremos del lado recto de una elipse será $\frac{c}{a}$ y $-\frac{c}{a}$ , según el extremo del lado recto que se considere.

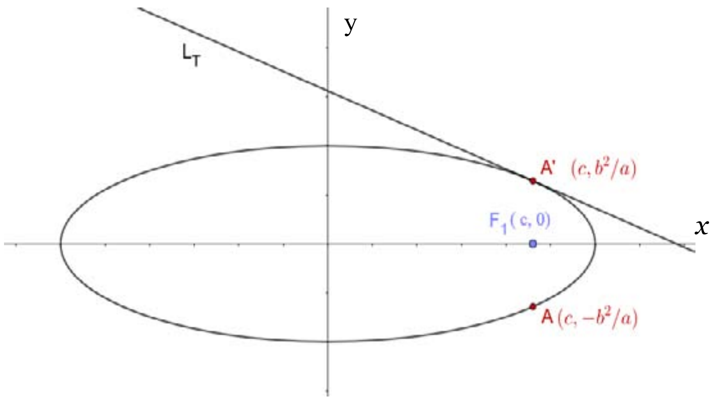



*Figura* 5.8. Representación gráfica del Ejercicio C42.b.

*Hipérbola*

Se realiza un análisis similar a los anteriores y se concluye que la pendiente de la recta tangente en los puntos extremos del lado recto de una hipérbola con eje focal el eje $x$, será $\frac{c}{a}$ y $-\frac{c}{a}$, según el extremo del lado recto que se considere.

# C43.

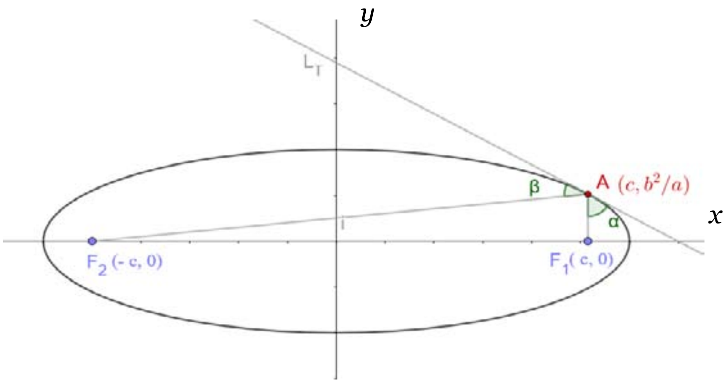



*Figura* 5.9. Representación gráfica del Ejercicio C43.

Sea $L_T$ la recta tangente a la elipse en el extremo del lado recto correspondiente al foco $F_1(c, 0)$, en particular $A(c, b^2/a)$ .

Se dirige un haz de luz que sale del foco F2.

El objetivo es demostrar que los ángulos de incidencia y reflexión $\alpha$ y $\beta$ respectivamente que forma la recta tangente con los rayos y cada uno de los focos de la elipse, son congruentes.

El ángulo $\alpha$, se puede calcular a partir de

$$\cos\alpha = \frac{\langle \boldsymbol{d_L}, \boldsymbol{AF_1} \rangle}{\|\boldsymbol{AF_1}\|\|\boldsymbol{d_L}\|}$$

El ángulo $\beta$ se determina a partir de la expresión:

$$\cos\beta = \frac{\langle \boldsymbol{d_L}, \boldsymbol{AF_2} \rangle}{\|\boldsymbol{AF_2}\|\|\boldsymbol{d_L}\|}.$$

Se tienen como datos la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Por lo tanto, el centro de dicha cónica es $C(0,0)$ y las coordenadas de los focos son: $F_1(c, 0)\ y\ F_2(-c, 0)$.

La ecuación de la recta tangente en $A$ será

$$L_T: y - \frac{b^2}{a} = m(x - c)$$

Donde la pendiente $m$ es igual a $y'$ evaluada en $A$.

Al derivar implícitamente y despejar la variable $y'$ de la ecuación de la elipse, se obtiene $y' = \frac{-xb^2}{ya^2}$.

Ahora se puede determinar:

$m = y'_A$, es decir $m = -\frac{c}{a}$

Luego un vector director de dicha recta será

$\boldsymbol{d_L} = (a, -c\,)$

Determinamos los vectores

$\boldsymbol{AF_1} = (0, -b^2/a)$ y $\boldsymbol{AF_2} = (-2c, -b^2/a)$.

Con la información y los datos que se han detallado se debe probar que $\alpha$ y $\beta$ son congruentes, o lo que es equivalente:

$\| \boldsymbol{d_L} \| \cos\alpha = \| \boldsymbol{d_L} \| \cos\beta$

Se desarrolla el primer miembro:

$$\| \boldsymbol{d_L} \| \cos\alpha = \frac{\langle \boldsymbol{d_L}, \boldsymbol{AF_1} \;\rangle}{\| \boldsymbol{AF_1} \|} = \frac{\langle (a, -c), (0, -b^2/a) \rangle}{\sqrt{(-b^2/a)^2}} = \frac{cb^2/a}{b^2/a} = c$$

Para el desarrollo del segundo miembro, se utiliza como vector director de la recta tangente a

$-\boldsymbol{d_L} = (-a, c\,)$

El módulo del vector $\boldsymbol{AF_2}$ está dado por

$\| \boldsymbol{AF_2} \| = \frac{2a^2-b^2}{a}$

que se obtiene a partir de la definición de elipse donde

$\| \boldsymbol{AF_2} \| + \| \boldsymbol{AF_1} \| = 2a$.

Reemplazamos en la expresión $\| \boldsymbol{d_L} \| \cos\beta$, y obtenemos:

$$\| \boldsymbol{d_L} \| \cos\beta = \frac{\langle \boldsymbol{d_L}, \boldsymbol{AF_2} \;\rangle}{\| \boldsymbol{AF_2} \|} = \frac{\langle (-a,\ c), (-2c, -b^2/a) \rangle}{\dfrac{2a^2-b^2}{a}} = \frac{2ac - cb^2/a}{\dfrac{2a^2-b^2}{a}} = \frac{c\,\dfrac{2a^2-b^2}{a}}{\dfrac{2a^2-b^2}{a}} = c$$

Se concluye que

$\| \boldsymbol{d_L} \| \cos\alpha = \| \boldsymbol{d_L} \| \cos\beta$,

Es decir, $\alpha$ y $\beta$ son congruentes.

## 5.8. SUPERFICIES

### C44.

Ver el Capítulo de Superficies en el Texto *Geometría Analítica para Ciencias e Ingeniería*, [*Raichman, Totter*].

# C45.

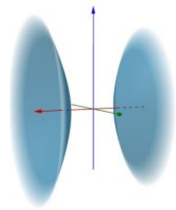
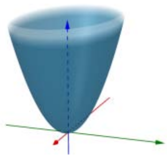
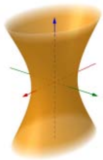
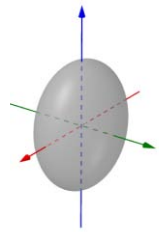
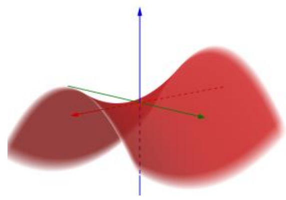
| **Ecuación** | **Nombre** | **Clasificación** | **Representación gráfica de la superficie** |
|---|---|---|---|
| $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ | Hiperboloide de dos Hojas | **SCCC**. Superficie Cuádrica con centro |  |
| $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$ | Paraboloide Elíptico | **SCSC**. Superficie Cuádrica sin centro |  |
| $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ | Hiperboloide de una Hoja | **SCCC**. Superficie Cuádrica con centro |  |
| $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$ | Elipsoide | **SCCC**. Superficie Cuádrica con centro |  |
| $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z$ | Paraboloide Hiperbólico | **SCSC**. Superficie Cuádrica sin centro |  |

*Tabla* 5.1. Solución del Ejercicio C45.

# C46.

a) Elipsoide de semiejes $a$=8, $b$=4, $c$=5: no es una superficie de revolución.

b) Hiperboloide de una hoja de semiejes $a$=3, $b$=3, $c$=2.5: adoptando como eje de la superficie al eje $z$, se trata de una superficie de revolución.

c) Hiperboloide dos hojas de semiejes $a$=1.5, $b$=2, $c$=1.5: eligiendo como eje de la superficie al eje $y$, se trata de una superficie de revolución.

d) Paraboloide elíptico de semiejes $a$=1.75, $b$=1.25, $c$=4: adoptando como eje de la superficie al eje $z$, se trata de una superficie de revolución.

e) Paraboloide hiperbólico de semiejes $a$=1.5, $b$=1.5, $c$=3: no es una superficie de revolución.

## C47.

Se selecciona el origen de coordenadas en el centro de la elipse y se representa la *semielipse* solicitada en el plano $yz$. Con este sistema de referencia seleccionado la *semielipse* se corresponde con $a$=50m; $b$=40m; $c$=30m. Luego la ecuación de la *semielipse* en coordenadas cartesianas será:

$\frac{y^2}{2500}+\frac{z^2}{1600}=1 \quad \forall\, z \geq 0$; en el plano $x$=0

La cubierta solicitada es un *semielipsoide de revolución* con eje de revolución el eje $z$, cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{2500}+\frac{y^2}{2500}+\frac{z^2}{1600}=1 \quad \forall\, z \geq 0$$

## C48.

a) Ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección solicitada:

($x$,$y$,$z$)=(0.67-1.33 cos($t$) , 1.33 sen($t$) , 2.44+0.44cos(t)) , $t$ ε [0,2π)

b) Ecuación vectorial paramétrica de la curva proyección sobre el plano $xy$ :

($x$,$y$,$z$)=(0.67-1.33 cos($t$), 1.33 sen($t$),0), $t$ ε [0,2π)

## C49.

Recurso Geométrico Interactivo *RGI – Paraboloide Hiperbólico*, en el Capítulo 6 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

# 5.9. LUGARES GEOMÉTRICOS EN COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

## C50.

La ecuación de la elipse en las condiciones indicadas es:

$\rho=\frac{4}{1+0.8cos\theta}$ .

## C51.

La ecuación de la parábola en las condiciones indicadas es:

$\rho=\frac{4.4}{1-sen\theta}$.

## C52.

Ver Capítulo asociado a este eje temático en el Texto *Geometría Analítica para Ciencias e Ingeniería,* [*Raichman, Totter*].

## C53.

a) $\rho = 10$ Cilindro circular recto

b) $\theta = \pi/6$ Semiplano en el primer y quinto octante.

c) $z = 10$ Plano paralelo al plano $xy$

## C54.

a) $2x+5y+8z=0$

b) $\rho(2(sen\varphi cos\theta\ ) + 5(sen\varphi sen\theta) + 8(cos\varphi)) = 0$

c) Se trata de un plano que pasa por el origen de coordenadas.

# 5.10. ROTACIONES Y TRASLACIONES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

## C55.

La cónica es una hipérbola. Si se trabaja con un nuevo sistema de ejes coordenados cuyos vectores directores son las columnas de la siguiente matriz $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Entonces, la ecuación de la hipérbola en el nuevo sistema de ejes coordenados, resulta:

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

## C56.

La cónica es una hipérbola. Si se trabaja con un nuevo sistema de ejes coordenados cuyos vectores directores son las columnas de la siguiente matriz $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

La ecuación en el nuevo sistema de ejes coordenados es:

$$-3(x' - 1/6)^2 + 4\ (y' + \frac{5}{8})^2 + 22.5 = 0$$

# C57.

A partir de la información del vértice y el foco se determina el parámetro $p$ de la parábola:

$$\frac{p}{2} = \|\boldsymbol{VF}\|$$

$$\mathrm{p} = 2.\|(2{,}1)\|$$

$$p = 2\sqrt{5}$$

La dirección de los ejes $x'$ y $x''$ está dada por el vector $\boldsymbol{b_1} = (2, 1)$.

La dirección de los ejes $y'$ e $y''$ está dada por el vector: $\boldsymbol{b_2} = (-1{,}2)$.

Con esta información se obtienen los vectores unitarios en ambas direcciones que serán las columnas de la matriz $\boldsymbol{P}$ de transformación ortogonal de coordenadas.

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{\boldsymbol{b_1}}{\|\boldsymbol{b_1}\|} = \frac{(2, 1)}{\sqrt{5}}$$

$$\boldsymbol{u_1} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\boldsymbol{u_2} = \frac{\boldsymbol{b_2}}{\|\boldsymbol{b_2}\|} = \frac{(-1, 2)}{\sqrt{5}}$$

$$\boldsymbol{u_2} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Luego $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, verificando que $|\boldsymbol{P}| = 1$.

El eje focal de la parábola coincide con el eje $x''$, por lo que la ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas $x''y''$ es:

$$y''^2 = 4\sqrt{5}\, x'' \qquad [1]$$

Para determinar las ecuaciones de traslación, se necesitan las coordenadas del vértice $V(2{,}1)$ en el sistema de coordenadas $x'y'$.

La ecuación de transformación de coordenadas está dada por $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X'}$, a partir de ella se obtienen las coordenadas del vértice en el sistema $x'y'$ como $\mathbf{X}' = \boldsymbol{P}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{X}$, obteniendo que:

$$V_{x'y'}(\sqrt{5}, 0)$$

Luego las ecuaciones de traslación del sistema $x''y''$ respecto de $x'y'$ son:

$$\begin{cases} x'' = x' - \sqrt{5} \\ y'' = y' \end{cases} \qquad [2]$$

Sustituyendo [2] en [1], se obtiene la ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas x'y':

$$y'^2 = 4\sqrt{5}\,(x' - \sqrt{5})$$

Operando algebraicamente:

$y'^2 - 4\sqrt{5}x' + 20 = 0$ [3]

Analizando la ecuación de la cónica [3] en el sistema $x'y'$ y relacionando este resultado con el teorema de los ejes principales en $\mathbb{R}^2$, obtenemos que $f = 20$ y los valores de propios de la matriz $\boldsymbol{A}$ son $0$ $y$ $1$. Por lo tanto $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

También se deduce la matriz $\boldsymbol{K'} = [-4\sqrt{5} \quad 0]$.

Conociendo las matrices $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{D}$, obtenemos la matriz $\boldsymbol{A}$ a partir de la ecuación

$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{D}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Se calcula la matriz $\boldsymbol{K}$, a partir de la ecuación $\boldsymbol{K'} = \boldsymbol{KP}$:

$\boldsymbol{K} = [-8 \quad -4]$

Conociendo las matrices $\boldsymbol{A}$ $y$ $\boldsymbol{K}$, y el término independiente $f = 20$, se determina una ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas $xy$ :

$$\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}xy + \frac{4}{5}\,y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$$

## C58.

La superficie cuádrica es un paraboloide hiperbólico. Si se trabaja con un nuevo sistema de ejes coordenados cuyos vectores directores son las columnas de la siguiente matriz $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, la ecuación en el nuevo sistema de ejes coordenados es:

$.y'^2 - z'^2 = x'$

## C59.

La superficie es un hiperboloide de dos hojas. Si se trabaja con un nuevo sistema de ejes coordenados cuyos vectores directores son las columnas de la siguiente matriz $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, la ecuación en el nuevo sistema de ejes coordenados es:

$$\frac{-x''^2}{\frac{156}{25}} - \frac{y''^2}{\frac{39}{5}} + \frac{z''^2}{\frac{52}{5}} = 1.$$

# 6. TRABAJO INTEGRADOR DE CONTENIDOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

## 6.1. INTRODUCCIÓN

A partir de la resolución de un problema de aplicación de interés, en este Trabajo Integrador de Contenidos de Geometría Analítica, se busca que los estudiantes:

- Planifiquen y desarrollen estrategias para la resolución de problemas geométricos a partir de la identificación de los datos, la representación de los mismos y el establecimiento de relaciones, integrando los conocimientos adquiridos en una situación problema concreta.
- Analicen e interpreten resultados.
- Sean metódicos en la exposición y en el registro de la información;
- Se comuniquen con precisión y claridad en forma oral y escrita.

El problema integrador se refiere al cierre de un espacio definido por una planta dada, en el que se trabaja en una primera etapa con dos cubiertas planas, formulando problemas que incluyen contenidos de vectores, rectas y planos. Se plantea luego la necesidad de utilizar un paraboloide hiperbólico para dicha cubierta, involucrando contenidos referidos a cónicas y superficies cuádricas.

A medida que se avanza en los desarrollos de los contenidos del curso, el estudiante resuelve cada parte del problema integrador, cuyas respuestas podrá ir cotejando con las incluidas al final de este documento. Así mismo se sugiere al estudiante la materialización de un modelo en escala reducida, (maqueta), a los efectos de visualizar apropiadamente cada aspecto del problema y para ir corroborando los resultados obtenidos en las resoluciones gráficas y analíticas.

La realización del Trabajo Integrador de Contenidos durante el desarrollo del curso promueve el aprendizaje significativo para un mejor rendimiento en las instancias de evaluaciones parciales durante el cursado. Por otra parte, el examen final de la asignatura es una instancia de evaluación planteada como una actividad de síntesis e integradora de los contenidos. La condición de aprobación del examen final implica el dominio de los contenidos conceptuales y procedimentales de todas las unidades temáticas del programa de la asignatura, así como también de las aplicaciones prácticas y la articulación de contenidos entre sí, trabajados durante el cursado.

## 6.2. DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO INTEGRADOR DE CONTENIDOS.

Se necesita realizar el cerramiento de un espacio cuya planta (proyección sobre el plano $xy$) tiene forma romboidal de diagonales iguales de longitudes $2a$ (ver $Figura$ 6.1.a). Se tienen 4 puntales de longitud fija igual a 3,0 m cada uno de ellos, que se designan del siguiente modo, tal como muestra la Figura 4.1.b:

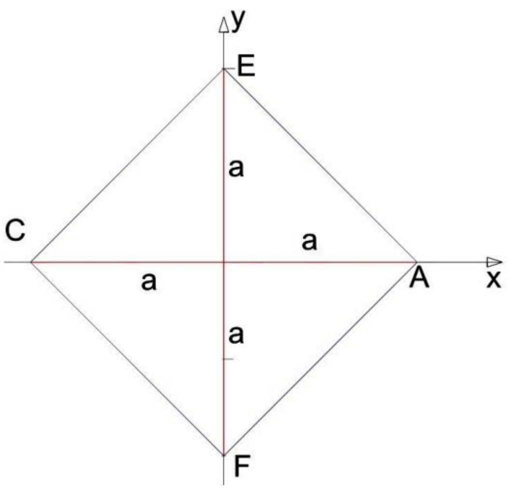
$Puntal$ 1: se extiende desde el punto A hasta el punto B.

$Puntal$ 2: se extiende desde el punto B hasta el punto C.

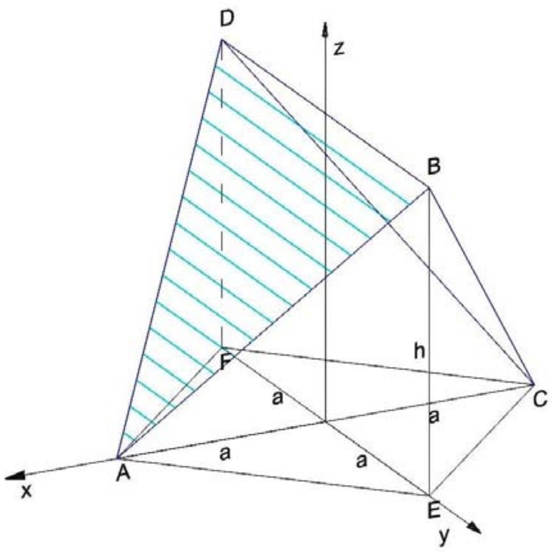
$Puntal$ 3: se extiende desde el punto C hasta el punto D

$Puntal$ 4: se extiende desde el punto D hasta el punto A.

Desde los puntos B y D se extienden pasando por A y por C dos cubiertas planas. Las paredes también serán superficies planas.




a) Vista en Planta




b) Puntales y selección del sistema de coordenadas

$Figura$ 6.1. Representación del problema en estudio.

## 6.3. PARTE I: VECTORES

**I.a**. Recordando que los puntales tienen longitud fija y considerando que la altura del punto B($h$) es igual a la longitud de la diagonal de la base romboidal, determine la posición de los extremos de los mismos (puntos A, B, C y D) para lograr un volumen interior de $2\sqrt{6}$ m$^3$.

I.b. Determine la longitud de las diagonales de la base romboidal.

I.c. Determine el área de las 2 cubiertas planas que se delimitan entre los puntos A, B y D y entre los puntos C, B y D.

I.d. Determine el ángulo que forman todos los puntales entre sí.

## 6.4. PARTE II: PLANOS

II.a. Determine las ecuaciones de los planos donde estarán contenidos los puntos de las 2 hojas que componen la cubierta. (ver *Figura* 6.2).

II.b. Determine el ángulo que forman dichos planos entre sí.

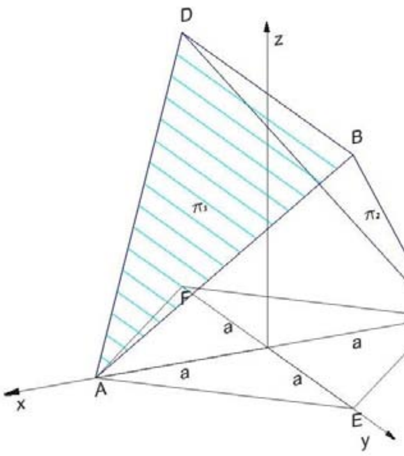



*Figura* 6.2. Planos que conforman la cubierta.

II.c. Escriba la ecuación de la familia de planos que pasa por la intersección de ambos planos.

II.d. Determine la ecuación del plano que pertenece a la familia de planos que pasa por la intersección de ambos planos y que sea plano bisector de los mismos. Identifique qué plano resulta.

II.e. Determine la distancia desde el centro del espacio interior (origen de coordenadas) hasta las cubiertas.

II.f. Determine en cada cubierta cuál es el punto del plano desde donde se mide dicha distancia.

## 6.5. PARTE III: RECTAS

III.a. Determine las ecuaciones de las 4 rectas que contienen a los puntales. Llamaremos $L_1$ a la recta que contiene al puntal 1, $L_2$ la que contiene al puntal 2, $L_3$ la que contiene al puntal 3 y $L_4$ a la recta que contiene al puntal 4.

III.b. Identifique la posición relativa de estas 4 rectas entre sí, tomadas de a pares.

III.c. Determine el ángulo que forman dichas rectas, tomadas de a pares.

III.d. i) Determine la distancia entre las mismas, tomadas de a pares. ii) Encuentre los puntos en cada recta desde donde se miden las distancias calculadas.

III.e. i) Encuentre la intersección de las rectas $L_1$ y $L_3$ con el plano $z = \sqrt{6}/2$ (llamaremos a estos puntos M a la intersección entre el plano y $L_1$ y P a la intersección del plano con $L_3$). ii) Encuentre la intersección de las rectas $L_1$ y $L_3$ con el plano $z = \sqrt{6}/4$ (llamaremos a estos puntos K en $L_1$ y R en $L_3$). iii) Encuentre la intersección de las rectas $L_1$ y $L_3$ con el plano $z = 3\sqrt{6}/4$ (llamaremos a estos puntos N a la intersección con $L_1$ y Q a la intersección entre el plano y $L_3$). Represente gráficamente.

III.f. Halle las distancias entre los puntos N y R, entre M y P y entre K y Q.

III.g. Llamaremos $L_5$ a la recta que pasa por los puntos N y R, $L_6$ a la recta que pasa por los puntos M y P y $L_7$ a la recta que pasa por los puntos K y Q. Determine las ecuaciones de estas 3 rectas.

## 6.6. Parte IV: SECCIONES CÓNICAS

Por motivos arquitectónicos y de optimización del tiempo de montaje y simplificación de dicho proceso, se ha decidido cambiar las superficies planas que formaban la cubierta por una superficie cuádrica denominada paraboloide hiperbólico ($Figura$ 6.3.a). Sabiendo que la intersección de dicha superficie con los planos coordenados $xz$ e $yz$, son parábolas, (ver $Figura$ 6.3.b) es necesario resolver lo siguiente:

**IV.a**. Determine las ecuaciones de las parábolas mencionadas, de modo tal que la altura interior sea $\sqrt{6}/2$. Halle los elementos característicos de las parábolas determinadas. Al vértice común de ambas parábolas le llamaremos V.

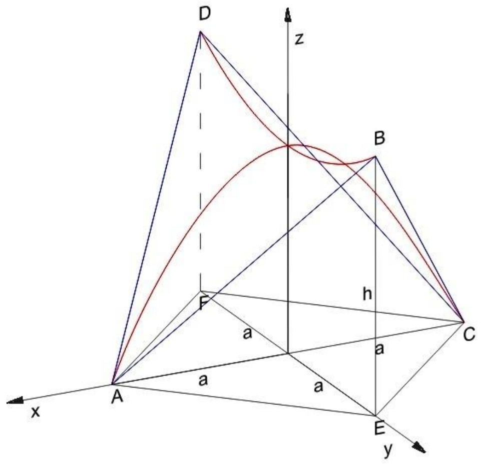



*Figura* 6.3.a. Paraboloide hiperbólico.

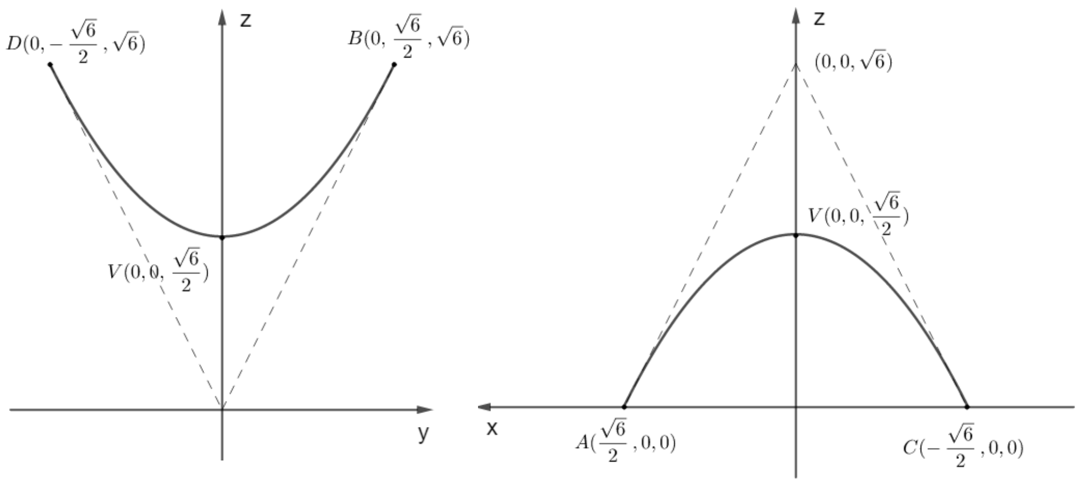



*Figura* 6.3.b. Intersección de la superficie con los planos coordenados.

**IV.b**. La cubierta a construir estará debajo de una línea Eléctrica de Media Tensión que puede ser modelizada a través de una recta, a la que llamaremos $L_8$. Sabemos que esta recta pasa por los puntos (5,0,7) y (-7, 0, 10). Determine la mínima distancia entre la recta $L_8$ y la parábola que pasa por los puntos A y C (contenida en el plano $xz$) y verifique que es superior a los 3m exigidos como distancia de seguridad.

## 6.7. PARTE V: SUPERFICIES CUÁDRICAS

**V.a**. Halle la ecuación de la superficie cuádrica que contiene a la cubierta en estudio (*Figura* 6.4.)

**V.b**. Determine la intersección de la superficie con el plano z = $\sqrt{6}/2$.

**V.c**. Indique si las rectas $L_5$, $L_6$ y $L_7$ del problema III.e pertenecen o no a la superficie cuádrica. Justifique apropiadamente su respuesta.

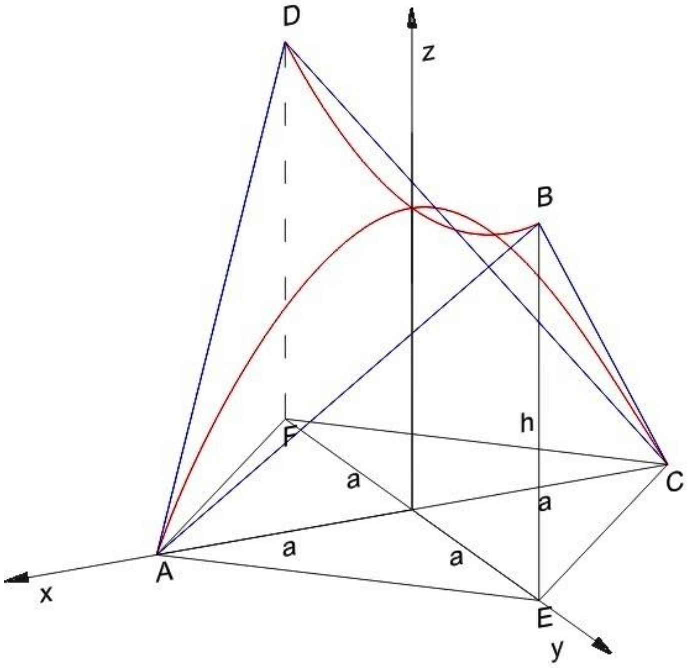



*Figura* 6.4. Cubierta en estudio.

## 6.8. Parte VI: COORDENADAS ESFÉRICAS

**VI.a**. Determine las ecuaciones del paraboloide hiperbólico en coordenadas esféricas.

**VI.b**. Determine las coordenadas de los puntos A, B, C y D en el sistema de referencia planteado.

**VI.c**. Determine las coordenadas de los siguientes puntos pertenecientes a la superficie.

| **Punto** | **ρ** | **φ** | **θ** |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | | $\pi/6$ | 0 |
| $S_2$ | | $\pi/4$ | 0 |
| $S_3$ | | $2\pi/3$ | 0 |
| $S_4$ | 1,732 | | $\pi/4$ |
| $S_5$ | 1,268 | $\pi/4$ | |
| Punto M | | | |

## 6.9. RESPUESTAS.

## PARTE I: Vectores

### I.a.

Posición de los extremos de los puntales (puntos A, B, C y D) para lograr un volumen interior de $2\sqrt{6}$ m³ :

$A(\frac{\sqrt{6}}{2},0,0)$ ; $B(0,\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{6})$ ; $C(-\frac{\sqrt{6}}{2},0,0)$ ; $D(0,-\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{6})$

Otros puntos:

$E(0,\frac{\sqrt{6}}{2},0)$ ; $F(0,-\frac{\sqrt{6}}{2},0)$

### I.b.

Longitud de las diagonales de la base romboidal: $2a=\sqrt{6}$

### I.c.

Área de las 2 cubiertas planas: Área = $3\sqrt{5} \cong 6{,}7082$ m²

### I.d.

Ángulo que forman los puntales entre sí:

Puntales:

Puntal 1: $\boldsymbol{AB}=\sqrt{6}(-1/2\,,1/2\,,1)$ Puntal 2: $\boldsymbol{AD}=\sqrt{6}(-1/2\,,-1/2\,,1)$

Puntal 3: $\boldsymbol{CB}=\sqrt{6}(1/2\,,1/2\,,1)$ Puntal 4: $\boldsymbol{CD}=\sqrt{6}(1/2\,,-1/2\,,1))$

Ángulos:

$\boldsymbol{AB}\ y\ \boldsymbol{CB}\ :\ \varphi_{12}=\arccos(2/3)=48^{o}\ 11`\ 23``\ (0{,}841\ rad)$

$\boldsymbol{CB}\ y\ \boldsymbol{CD}\ :\ \varphi_{23} = \arccos\left(2/_3\right) = 48^o\ 11`\ 23``(0{,}841\ rad)$

$\boldsymbol{CD}\ y\ \boldsymbol{AD}:\ \varphi_{34} = \arccos\left(2/_3\right) = 48^o\ 11`\ 23``(0{,}841\ rad)$

$\boldsymbol{AB}\ y\ \boldsymbol{AD}:\ \varphi_{14} = \arccos\left(2/_3\right) = 48^o\ 11`\ 23``(0{,}841\ rad)$

$\boldsymbol{AB}\ y\ \boldsymbol{CD}\ :\ \varphi_{13} = \arccos\left(1/_3\right) = 70^o\ 31`\ 43{,}61``(1{,}23\ rad)$

$\boldsymbol{CB}\ y\ \boldsymbol{AD}\ :\ \varphi_{24} = \arccos\left(1/_3\right) = 70^o\ 31`\ 43{,}61``(1{,}23\ rad)$

## PARTE II : Planos

### II.a.

Ecuaciones de los planos donde estarán contenidos los puntos de las 2 hojas que componen la cubierta:

$$\pi_1: x + \frac{1}{2}\,z - \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$$

$$\pi_2: -x + \frac{1}{2}\,z - \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$$

### II.b.

Ángulo que forman dichos planos entre sí:

$\theta_{12} = \arccos\left(-3/_5\right) = 126^o\ 52`\ 11{,}63``$

*Observación*: Si $\pi_2: x - \frac{1}{2}\,z + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0,\ \theta_{12} = \arccos\left(3/_5\right) \cong 53^o$

### II.c.

Ecuación de la familia de planos que pasa por la intersección de ambos planos:

Familia completa: $k_1\left(x + \frac{1}{2}\,z - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + k_2\left(-x + \frac{1}{2}\,z - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 0\ ;\ k_1, k_2\ \in \mathbb{R}$

Familia reducida: $\left(x + \frac{1}{2}\,z - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + k\left(-x + \frac{1}{2}\,z - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 0\ ;\ k \in \mathbb{R}$

$(1-k)x + \ (1+k)\ \frac{1}{2}\,z - (1+k)\frac{\sqrt{6}}{2} = 0\ ;\ k \in \mathbb{R}$

### II.d.

Ecuación del plano que pertenece a la familia de planos que pasa por la intersección de ambos planos y que sea plano bisector de los mismos.

$x = 0$ (plano $yz$)

### II.e.

Distancia desde el centro del espacio interior (origen de coordenadas) hasta las cubiertas:

d=$\|\boldsymbol{OP_1}\| = \frac{\sqrt{6}\sqrt{5}}{5} = \sqrt{\frac{6}{5}} \cong 1{,}09$ m

## II.f.

Puntos de los planos desde donde se mide dicha distancia:

$en\ \pi_1 :\ P_1 = (\frac{2\sqrt{6}}{5}, 0\ , \frac{\sqrt{6}}{5})$

$en\ \pi_2 :\ P_2 = (-\frac{2\sqrt{6}}{5}, 0\ , \frac{\sqrt{6}}{5})$

# PARTE III: Rectas

## III.a.

Ecuaciones de las 4 rectas que contienen a los puntales.

Llamaremos L1 a la recta que contiene al puntal 1, L2 la que contiene al puntal 2, L3 la que contiene al puntal 3 y L4 a la recta que contiene al puntal 4:

$$L_1 : (\,x, y, z\,) = \left({}^{\sqrt{6}}/_{2}\ , 0\ , 0\right) + k_1 \left(-{}^{1}/_{2}\ , {}^{1}/_{2} , 1\right)\ ;\ k_1\ \in \mathbb{R}$$

$$L_2 : (\,x, y, z\,) = \left(-{}^{\sqrt{6}}/_{2}\ , 0\ , 0\right) + k_2 \left({}^{1}/_{2}\ , {}^{1}/_{2} , 1\right)\ ;\ k_2\ \in \mathbb{R}$$

$$L_3 : (\,x, y, z\,) = \left(-{}^{\sqrt{6}}/_{2}\ , 0\ , 0\right) + k_3 \left({}^{1}/_{2}\ , -\ {}^{1}/_{2} , 1\right);\ k_3\ \in \mathbb{R}$$

$$L_4 : (\,x, y, z\,) = \left({}^{\sqrt{6}}/_{2}\ , 0\ , 0\right) + k_4 \left(-{}^{1}/_{2}\ , -{}^{1}/_{2} , 1\right)\ ;\ k_4\ \in \mathbb{R}$$

## III.b.

Posición relativa de estas 4 rectas entre sí, tomadas de a pares:

$L_1\ y\ L_2$: secantes; $L_1\ y\ L_3$: alabeadas; $L_1\ y\ L_4$: secantes; $L_2\ y\ L_3$: secantes; $L_2\ y\ L_4$: alabeadas; $L_3\ y\ L_4$: secantes.

## III.c.

Ángulo que forman dichas rectas, tomadas de a pares:

Angulo entre:

$$L_1\ \ y\ \ L_2 :\ \varphi_{12} = \arccos\left({}^{2}/_{3}\right) = 48^{o}\ 11`\ 23``\ (0{,}841\ rad)$$

$$L_1\ \ y\ \ L_3 :\ \varphi_{13} = \arccos\left({}^{1}/_{3}\right) = 70^{o}\ 31`\ 43{,}61``\ (1{,}23\ rad)$$

$$L_1\ \ y\ \ L_4 :\ \varphi_{14} = \arccos\left({}^{2}/_{3}\right) = 48^{o}\ 11`\ 23``\ (0{,}841\ rad)$$

$$L_2\ \ y\ \ L_3 :\ \varphi_{23} = \arccos\left({}^{2}/_{3}\right) = 48^{o}\ 11`\ 23``\ (0{,}841\ rad)$$

$L_2\ \ y\ \ L_4$: $\varphi_{24} = \arccos(1/3) = 70^o\ 31`\ 43{,}61``(1{,}23\ rad)$

$L_3\ \ y\ \ L_4$: $\varphi_{34} = \arccos(2/3) = 48^o\ 11`\ 23``\ (0{,}841\ rad)$

# III.d.

i) Distancia entre las mismas, tomadas de a pares:

$L_1\ \ y\ \ L_2$: $d_{12} = 0$ (punto de intersección: B)

$L_1\ \ y\ \ L_3$: $d_{13} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$ m

$L_1\ \ y\ \ L_4$: $d_{14} = 0$ (punto de intersección: A)

$L_2\ \ y\ \ L_3$: $d_{23} = 0$ (punto de intersección: C)

$L_2\ \ y\ \ L_4$: $d_{24} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$ m

$L_3\ \ y\ \ L_4$: $d_{34} = 0$ (punto de intersección: D)

ii) Puntos de medición de la mínima distancia entre:

Entre las rectas $L_1\ \ y\ \ L_3$:

Vector normal a ambas rectas: $\boldsymbol{n_{13}} = (1, -1{,}0)$

Plano que contiene a $L_1 y\ es\ paralelo\ a\ \boldsymbol{n_{13}}$: $\quad \pi: -x + y - z + \sqrt{6}/2 = 0$

Punto desde donde se mide la distancia en L3: (Intersección entre π y L3):

en $L_3$ : $P_3(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2})$

en $L_1$ : $P_1(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2})$

*Observación*: $\|\boldsymbol{P_1P_3}\| = d_{13} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$ m

Entre las rectas $L_2\ \ y\ \ L_4$:

Vector normal a ambas rectas: $\boldsymbol{n_{24}} = (1, -1{,}0)$

Plano que contiene a $L_2 y\ es\ paralelo\ a\ \ \boldsymbol{n_{24}}$: $\quad \pi`: x + y - z + \sqrt{6}/2 = 0$

Punto desde donde se mide la distancia en L3: (Intersección entre π` y L4):

*en* $L_4$ : $P_4(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2})$

*en* $L_2$ : $P_2(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2})$

*Observación*: $\|\boldsymbol{P_2P_4}\| = d_{24} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$ m

# III.e.

Intersecciones:

b) Rectas $L_1$ y $L_3$ con el plano $z = \sqrt{6}/2$

En $L_1$: $M(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ En $L_3$: $P(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2})$

*Observación*: se trata de los puntos $P_1$ y $P_3$

ii) Rectas $L_1$ y $L_3$ con el plano z = $\sqrt{6}/4$

En $L_1$: $K(\frac{3\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{4})$ En $L_3$: $R(-\frac{3\sqrt{6}}{8}, -\frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{4})$

iii) Rectas $L_1$ y $L_3$ con el plano z = $3\sqrt{6}/4$

En $L_1$: $N(\frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{3\sqrt{6}}{8}, \frac{3\sqrt{6}}{4})$ En $L_3$: $Q(-\frac{\sqrt{6}}{8}, -\frac{3\sqrt{6}}{8}, \frac{3\sqrt{6}}{4})$

## III.f.

Distancias entre los puntos N y R, entre M y P y entre K y Q.

$\|\boldsymbol{MP}\| = \sqrt{3} \cong 1{,}73$ m

$\|\boldsymbol{NR}\| = \sqrt{18}/2 \cong 2{,}12$ m

$\|\boldsymbol{KQ}\| = \sqrt{18}/2 \cong 2{,}12$ m

## III.g.

Ecuaciones de las rectas $L_5$ , $L_6$ , $L_7$ :

$L_5$ : recta que pasa por los puntos N y R

$$L_5: (x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{3\sqrt{6}}{8}, \frac{3\sqrt{6}}{4}\right) + k_5\,(1, 1, 1)\ ;\ k_5 \in \mathbb{R}$$

$L_6$ : recta que pasa por los puntos M y P

$$L_6: (x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + k_6(1, 1, 0)\ ;\ k_6 \in \mathbb{R}$$

$L_7$ : recta que pasa por los puntos K y Q

$$L_7: (x, y, z) = \left(\frac{3\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right) + k_7\,(1, 1, -1)\ ;\ k_7 \in \mathbb{R}$$

# PARTE IV: Secciones cónicas

## IV.a.

Ecuaciones de las parábolas:

En el plano $xz$: $\begin{cases} -\frac{\sqrt{6}}{2}\left(z - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$

En el plano $yz$: $\begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{2}\left(z - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$

## IV.b.

Recta $L_8$ : $(x, y, z) = (5{,}0\,,7) + k_8\,(4\,,0,-1)$ ; $k_8 \in \mathbb{R}$

Punto T de la parábola en el que la recta tangente tiene igual pendiente que la recta $L_8$

T$\left(\frac{\sqrt{6}}{16}, 0\,, \frac{63\sqrt{6}}{128}\right)$. Distancia de T a la recta $L_8$: d= 6.8 m. Luego, la mínima distancia entre la recta $L_8$ y la parábola que pasa por los puntos A y C es d= 6.8 m.

# PARTE V: Superficies cuádricas

## V.a.

Ecuación de la superficie cuádrica que contiene a la cubierta en estudio:

$$-\frac{x^2}{\sqrt{6}/_2} + \frac{y^2}{\sqrt{6}/_2} = \left(z - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$ Paraboloide hiperbólico

## V.b.

Intersección de la superficie con el plano $z = \sqrt{6}/2$

$$L_9: (x, y, z) = \left(0\,,0\,,\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + k_9(1\,,1,0)\ ;\ k_9 \in \mathbb{R}$$

$$L_{10}: (x, y, z) = \left(0\,,0\,,\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + k_{10}(1\,,-1,0)\ ;\ k_{10} \in \mathbb{R}$$

## V.c.

Las rectas $L_5$, $L_6$ y $L_7$ del problema III.e pertenecen a la superficie cuádrica.

$L_6$ pertenece a la superficie ya que el punto M de $L_6$ es también punto de $L_9$

$$M\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \in L_9 \ y\ \boldsymbol{dl_6} = \boldsymbol{dl_9}$$

$L_5$ pertenece a la superficie ya que para todo valor de $k_5 \in \mathbb{R}$ los puntos de $L_5$ cumplen la ecuación de la superficie: $\frac{\sqrt{6}}{2}k_5 + \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}k_5 + \frac{3}{4}$

$L_7$ pertenece a la superficie ya que para todo valor de $k_7 \in \mathbb{R}$ los puntos de $L_7$ cumplen la ecuación de la superficie: $-\frac{\sqrt{6}}{2}k_7 - \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{6}}{2}k_7 - \frac{3}{4}$

# PARTE VI: Coordenadas esféricas

## VI.a.

Ecuación del paraboloide hiperbólico en coordenadas esféricas:

$$\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\,(1 - 2cos^2\theta) - \rho\frac{\sqrt{6}}{2}cos\varphi + 3/2 = 0$$

También:

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \,(sen^2\theta - cos^2\theta) - \rho \frac{\sqrt{6}}{2} cos\varphi + 3/2 = 0$$

## VI.b.

Coordenadas de los puntos A, B, C y D:

| Punto | ρ | φ | θ |
|---|---|---|---|
| Punto A | $\sqrt{6}/_2$ | $\pi/_2$ | 0 |
| Punto B | $\sqrt{30}/_2$ | $\pi/_2 - \arctan(2) \cong 0{,}46365$ | $\pi/_2$ |
| Punto C | $\sqrt{6}/_2$ | $\pi/_2$ | π |
| Punto D | $\sqrt{30}/_2$ | $\pi/_2 - \arctan(2) \cong 0{,}46365$ | $3\pi/_2$ |

## VI.c.

Coordenadas de los puntos dados:

| Punto | ρ | φ | θ |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | 1,12 | $\pi/_6$ | 0 |
| $S_2$ | 1,07 | $\pi/_4$ | 0 |
| $S_3$ | 1.88 | $2\pi/_3$ | 0 |
| $S_4$ | 1,732 | $\pi/_4$ | $\pi/_4$ |
| $S_5$ | 1,268 | $\pi/_4$ | $\pi/_6$ |
| Punto M | 3/2 | $\pi/_2 - \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right) \cong 0{,}6155$ | $\pi/_4$ |

# 7. PROBLEMA DE ARTICULACIÓN

## 7.1. OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD DE ARTICULACIÓN

Se plantea la resolución de un problema de aplicación de interés que permite articular actividades entre las asignaturas *Geometría Analítica* y *Estabilidad* II de la carrera de Ingeniería Civil. Esta actividad de articulación puede extenderse a otros espacios curriculares, tales como Estática y Resistencia de Materiales de las carreras de Ingeniería Industrial, de Petróleos y en Mecatrónica.

A partir de estas actividades de articulación se busca:

- Potenciar los procesos comprensivos y reflexivos de contenidos específicos de *Geometría Analítica* y otros espacios curriculares, a partir de la resolución de problemas de articulación de interés para el estudiante de acuerdo a la carrera por él elegida.
- Promover en el estudiante el desarrollo del interés por el conocimiento y el dominio de los instrumentos analíticos y de visualización geométrica práctica, propios de un ingeniero.
- Brindar herramientas geométricas adecuadas para su utilización en las etapas iniciales del proceso de diseño y/o verificación de una estructura simple de la Ingeniería.
-

## 7.2 PLANTEO DEL PROBLEMA A RESOLVER

### 7.2.1 Fundamentos.

En el ámbito de la ingeniería en general y de la Ingeniería Civil en particular, en muchas ocasiones se plantea la necesidad de realizar un *relevamiento* de una estructura determinada con diversos fines. Se entiende por relevamiento, la recolección *in-situ* de una serie de datos específicos de una estructura existente. Dichos datos son de diversa índole, tales como *dimensiones geométricas*, características de los materiales, estado de conservación de los elementos constituyentes, información del entorno de la estructura, entre otros.

Existen situaciones en las cuales, ya sea por la importancia de la estructura, la falta de disponibilidad de instrumentos de medición adecuados, o por falta de mano de obra necesaria para la realización del relevamiento completo y exhaustivo, es suficiente la realización de un *relevamiento aproximado* y *expeditivo* del problema.

## 7.2.2. Presentación del problema y ejemplo resuelto.

Se presenta la necesidad de relevar en forma aproximada las dimensiones de un letrero de señalización vial vertical, ubicado en una Ruta Nacional de la República Argentina.

El relevamiento es aproximado y consiste en un registro fotográfico del letrero y la medición de una longitud característica del mismo, que en el presente caso la constituye la altura de una marca determinada sobre la columna del letrero, ubicada a 1m de altura sobre el nivel del terreno. A partir de dichos datos y de la fotografía obtenida es posible determinar dimensiones y coordenadas de puntos específicos para ser utilizados en cálculos futuros.

## 7.2.3. Resolución del problema.

Se presenta el caso de relevamiento a partir de una *fotografía* del letrero en estudio, el cual se indica en este caso a partir de la *Figura* 7.1 a los efectos de lograr mayor claridad en el procedimiento a utilizar.

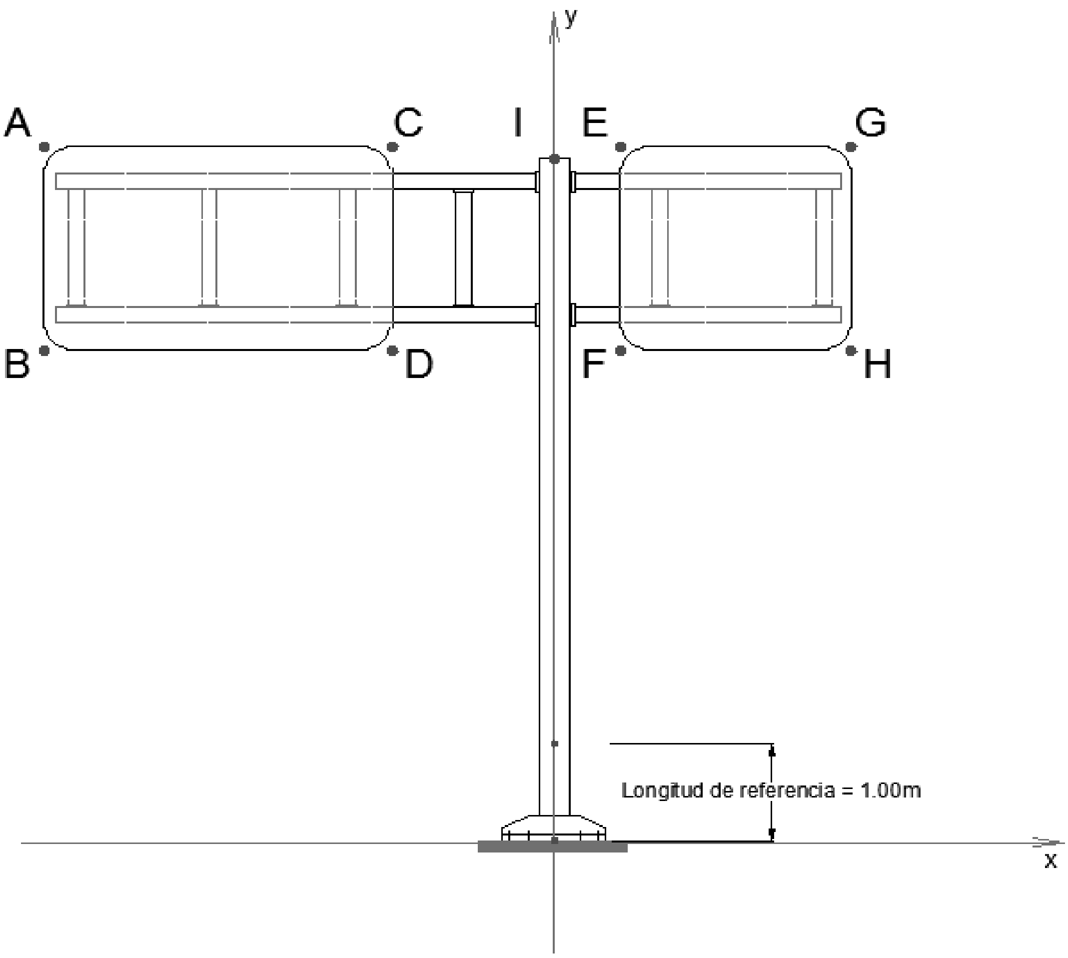
La resolución del problema planteado implica el seguimiento de los siguientes pasos:

1) En primer lugar, se selecciona un *sistema de referencia* con origen en un punto característico de la estructura a relevar. En este caso se selecciona el origen de coordenadas en la base del letrero y el eje $y$-$y$ coincidente con la columna de sostén del mismo.

2) Determinación de la *escala geométrica* no normalizada de la fotografía.

$$Escala = \beta = \frac{Longitud\ medida}{Longitud\ real}$$

En el presente caso: $\beta = \frac{1.6cm}{100cm} = 0.016$




Letrero señalización vial tipo Bandera doble bi-dintel

*Figura* 7.1. Representación gráfica del letrero en estudio.

3) Se determinan por medición directa sobre la fotografía, las coordenadas de cada uno de los puntos especiales de la estructura relevada. Es conveniente ordenar los datos en una planilla de cálculos tal como la indicada en la Figura 6.2.

**Relevamiento geométrico de un letrero de señalización vial**

**Letrero tipo bandera doble**

| Pto. Característico | Longitud medida | | Escala | Coordenadas | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Eje x-x cm | Eje y-y cm | $\beta$ | Eje x-x cm | Eje y-y cm |
| A | -8,00 | 11,50 | 0,016 | -500,00 | 718,75 |
| B | -8,00 | 8,00 | 0,016 | -500,00 | 500,00 |
| C | -2,60 | 11,50 | 0,016 | -162,50 | 718,75 |
| D | -2,60 | 8,00 | 0,016 | -162,50 | 500,00 |
| E | 1,20 | 11,50 | 0,016 | 75,00 | 718,75 |
| F | 1,20 | 8,00 | 0,016 | 75,00 | 500,00 |
| G | 4,70 | 11,50 | 0,016 | 293,75 | 718,75 |
| H | 4,70 | 8,00 | 0,016 | 293,75 | 500,00 |
| I | 0,00 | 11,20 | 0,016 | 0,00 | 700,00 |

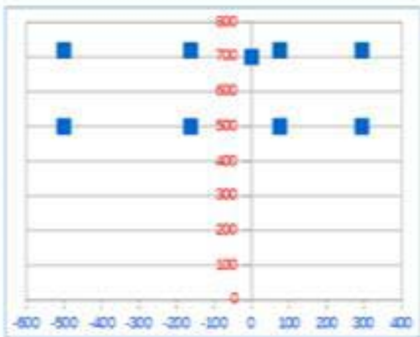



*Figura* 7.2. Representación gráfica del letrero en estudio.

Las coordenadas finales reales de los puntos se determinan dividiendo la longitud medida sobre la fotografía por el coeficiente de escala obtenido, tal como puede observarse en el ejemplo de la tabla presentada. Cabe señalar que también suele adoptarse un factor de escala tal que al multiplicarlo por el valor medido permite obtener la magnitud real.

4) Una vez obtenidos los valores de las coordenadas de los puntos característicos del letrero, es posible transformar el problema a su forma vectorial y calcular aquellas magnitudes que resulten necesarias para la estructura relevada.
Por ejemplo para obtener el área del letrero izquierdo es posible realizar los siguientes cálculos:

$$Área1 = \|AB \wedge AC\| = \left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -218.75 & 0 \\ 337.5 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right\| = \|337.5(218.75k)\| = \|73828.75k\|$$

$$Área1 = 73828.75cm^2 \cong 7.4m^2$$

## 7.2.4. Tareas a realizar:

De acuerdo a la letra inicial del apellido, cada estudiante resolverá un problema determinado, calculando en primer lugar, las coordenadas de los puntos característicos del letrero de señalización 1 que le corresponda. A continuación, y teniendo en cuenta las coordenadas de los puntos RT1, RT2, RT3 obtenidos a partir de un relevamiento del terreno, se determinarán las coordenadas de los puntos característicos del letrero de señalización 2, de iguales características que el primero, indicado en el corte longitudinal. Finalmente, se hallarán las ecuaciones cartesianas paramétricas de las rectas que contienen las columnas de ambos letreros y se calculará la distancia entre ellas. En las $Figura$ 7.3 a 7.10 se indican los ocho tipos de problemas a resolver.

| Problema | Letra inicial del Apellido |
|---|---|
| AGAE1 | A-B |
| AGAE2 | C-D |
| AGAE3 | E-F |
| AGAE4 | G-H |
| AGAE5 | I-M |
| AGAE6 | N-P |
| AGAE7 | Q-R |
| AGAE8 | R-Z |

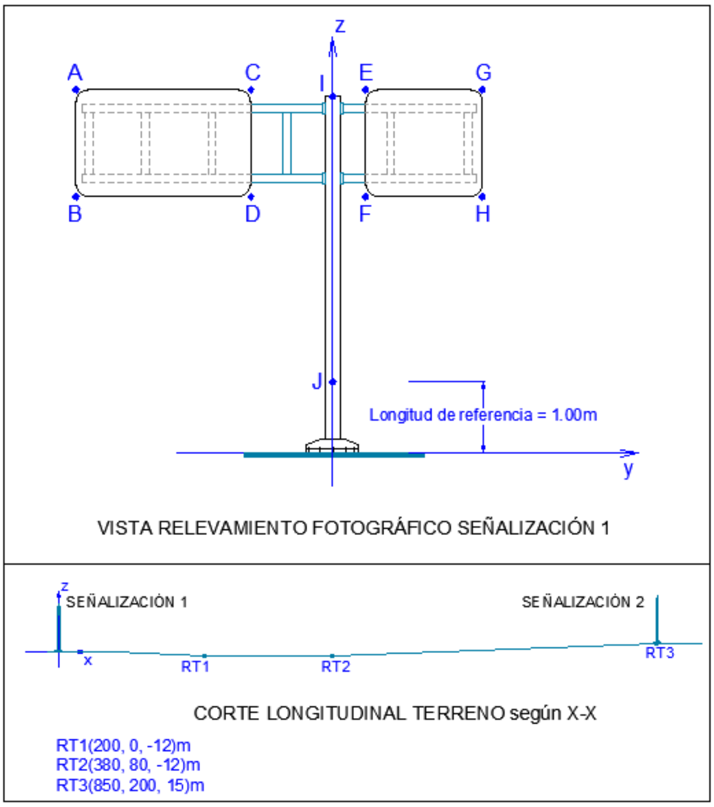



*Figura* 7.3. Problema AGAE1

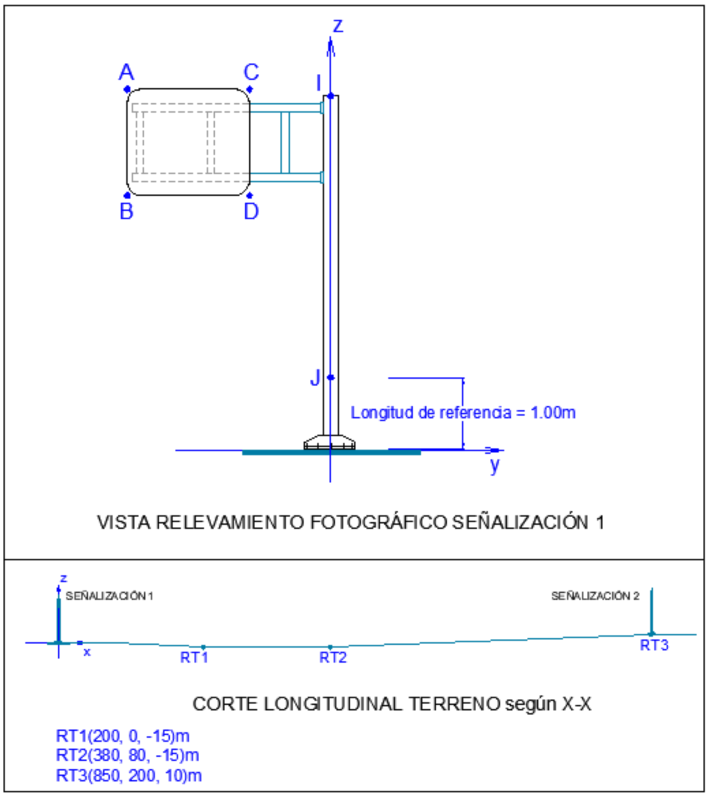



*Figura* 7.4. Problema AGAE2.

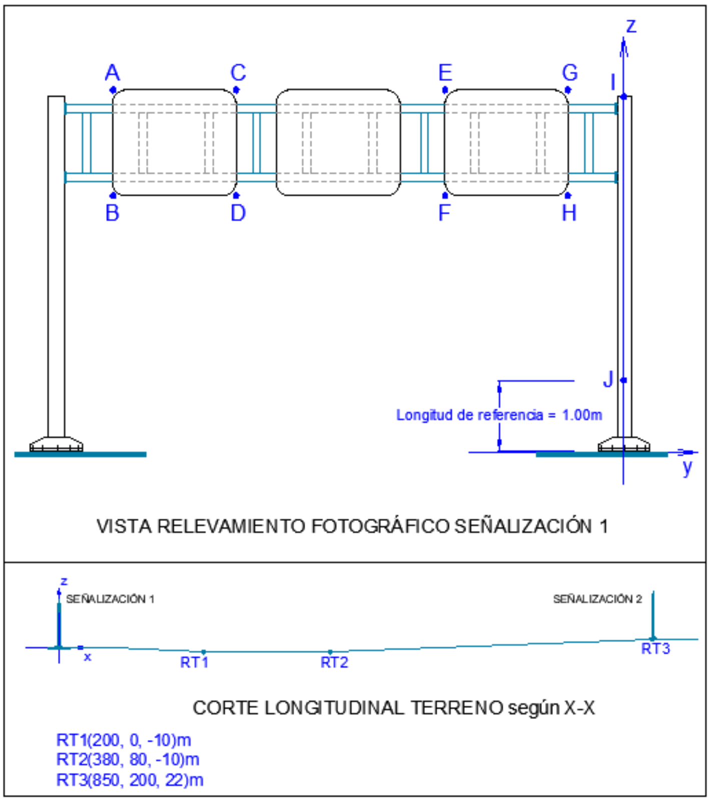



*Figura* 7.5. Problemas AGAE3.

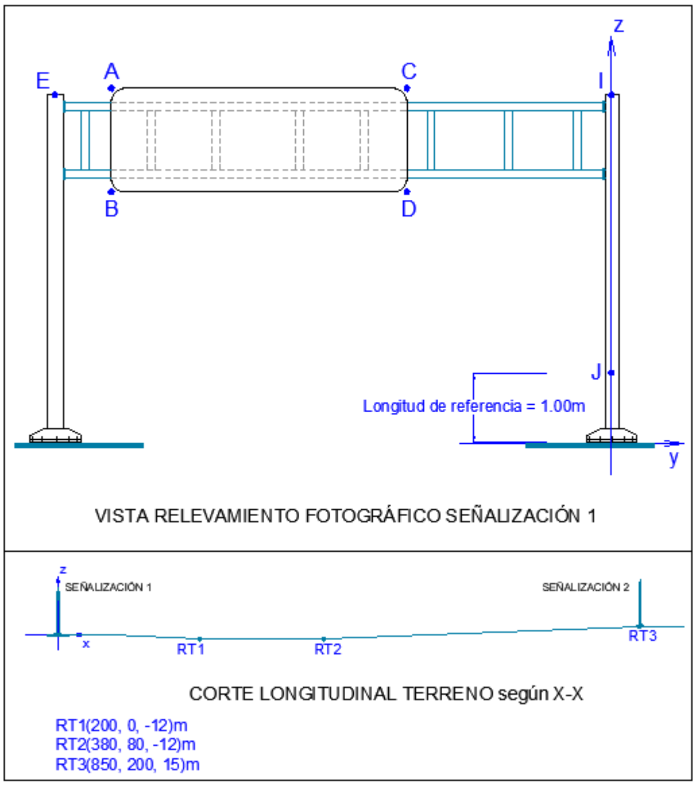



*Figura* 7.6. Problemas AGAE4.

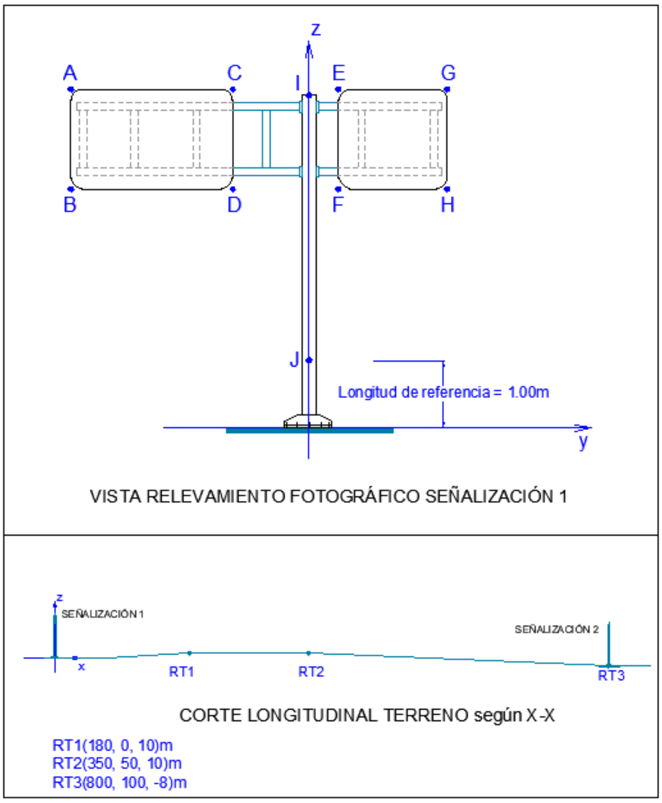



*Figura* 7.7. Problemas AGAE5

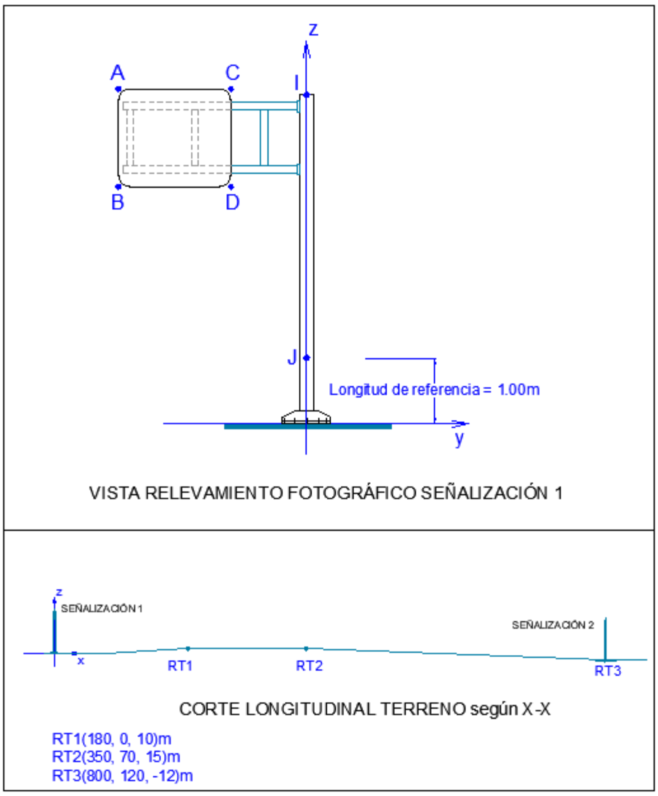



*Figura* 7.8. Problemas AGAE6.

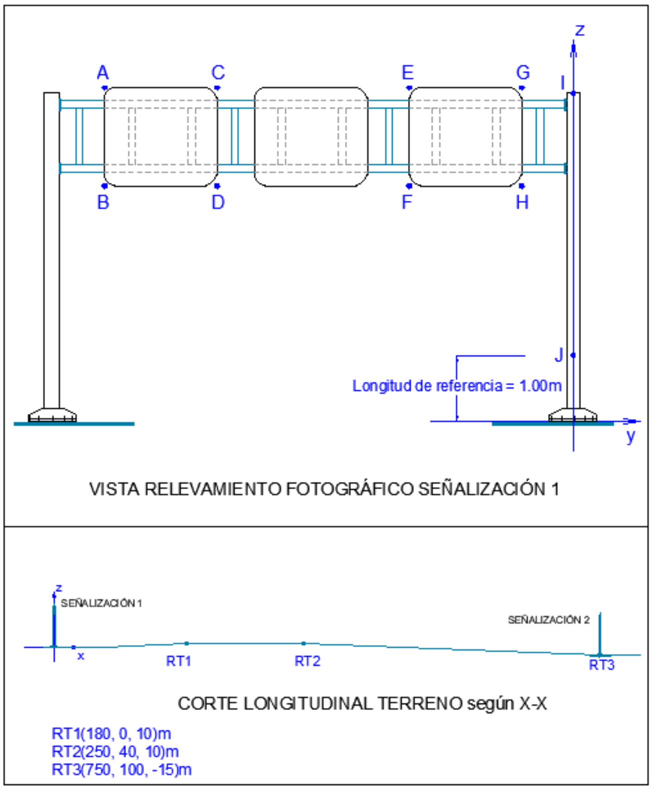



*Figura* 7.9. Problemas AGAE7.

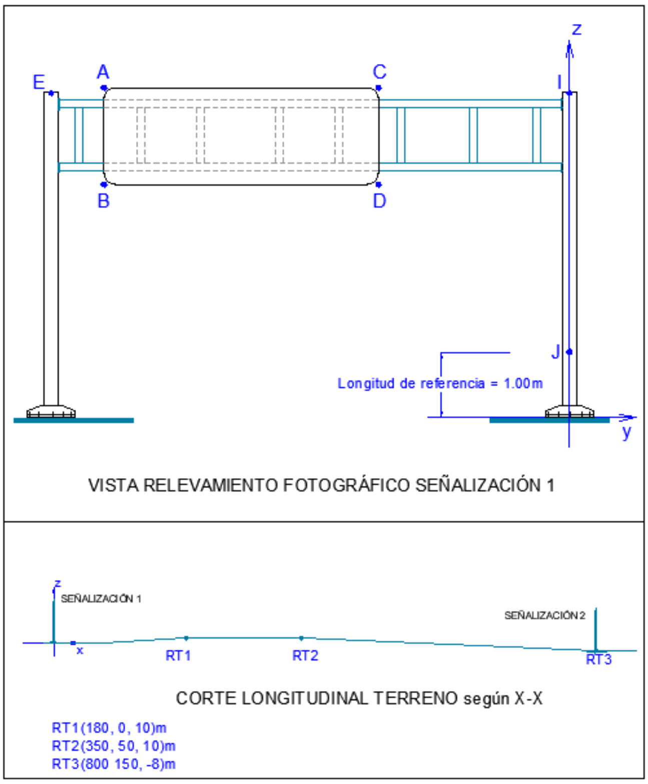



*Figura* 7.10. Problemas AGAE8.

# 8. REFERENCIAS

## 8.1. REFERENCIAS GENERALES


Downs, J.W.; *Practical Conic Sections* Dover Publications. Edición 2003.

Fuller, G., Tarwater, D.; *Geometría Analítica*. Addison Wesley Iberoamericana. Edición 1999.

GeoGebra. https://www.geogebra.org *Programa Dinámico para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Fecha de consulta: 22-12-2022.

Raichman, S., Totter, E.; (2016). *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*. Edición digital. Universidad Nacional de Cuyo. 220 páginas. Fecha de edición: Febrero de 2016. ISBN: 978-987-575-125-5. Dirección URL del libro: http://bdigital.uncu.edu.ar/7224. Fecha de consulta del libro: 10-01-2020.

Raichman, S., Totter, E., Codina, F., Molina G., Fitt, G.; Cascone A. (2022). *Geometría Dinámica para Ciencias e Ingenierías*. Libro Interactivo GeoGebra para el estudio de la Geometría Analítica para Ciencias Exactas, Ingenierías y Arquitectura. https://www.geogebra.org/m/zsvdbqju. Fecha de consulta del libro: 22-12-2022.

Raichman, S., Totter, E., Videla, D.,Collado, L., Codina, F., Molina, G., Cascone, A., Fitt, G. (2022). *Geometría analítica para Ciencias e Ingenierías: Problemas integradores y de aplicación*. 1a. edición ilustrada. Mendoza, Argentina: Editorial Qellqasqa. Fecha de publicación: 17 de Febrero de 2022. ISBN 978-987-4026-62-0. Dirección URL del libro: http://qellqasqa.com/omp/index.php/qellqasqa/catalog/book/ISBN%20978-987-4026-62-0. Fecha de consulta del libro: 22-12-2022.

Trias Pairó, J.; *Geometría para la Informática Gráfica y CAD*. Editorial Alfaomega. Edición 2005.


## 8.2. REFERENCIAS ASOCIADAS AL MODELO PEDAGÓGICO


CONFEDI, (2018). *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina*. "Libro Rojo de CONFEDI" - Aprobado por la Asamblea del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina Rosario - 1 de junio de 2018.

Felder R., Brent S.; (2003). *Learning by doing*. En: Chemical Engineering Education. [Online]. 3 (4). 282-283.

Felder R., Brent R.; (2007). *Cooperative Learning*. En: Active Learning: Models from the Analytical Sciences, P.A. Mabrouk, (ed.), Chapter 4. American Chemical Society. Symposium Series 970.

Molina V., Prieto Castillo D.; (1997). *El Aprendizaje en la Universidad*. Editorial de la Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza, Argentina.

Ozollo F., Orlando M. (2006). *Elaboración de materiales de aprendizaje*. [En línea]. Educación a Distancia, Rectorado Universidad Nacional de Cuyo. http://bdigital.uncu.edu.ar/1085. Fecha de consulta: 22-12-2022.

Perkins D.; (1999). *¿Qué es la Comprensión?* En: La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la Práctica. Compiladora: Stone Wiske, M. Editorial PAIDÓS. Colección Redes de Educación. Buenos Aires, Argentina.

Raichman, S., Cerezo, V., Barbini, M., (2017). *Integración de ayudantes alumnos en las Aulas Taller de Geometría Analítica*. IX Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería (EnIDI 2017). Eds.: Gitto J., Mercado G., Zaradnik R. Vol. 1. pp. 205-209, ISBN 978-987-575-185-9.

Raichman, S., Pacini, E., (2017). *Intervención educativa de articulación entre las asignaturas Introducción a la Programación y Geometría Analítica*, IX Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería (EnIDI 2017), Eds.: Gitto J., Mercado G., Zaradnik R. Vol. 1. pp. 194-198, ISBN 978-987-575-185-9. Mendoza.

Raichman, S., Sabulsky, G., Totter, E.; (2013). *Estrategias para el desarrollo de innovaciones educativas basadas en la utilización de Tecnologías de la Información y Comunicación*. En "Estrategias para el uso de tecnologías de información y comunicación en los procesos de aprendizaje", Orta, M., Verdejo, P (eds.). Innova Cesal, México.

Raichman, S., Mirasso, A.; (2018). *Modelos pedagógicos para el aprendizaje complejo y la formación en competencias en carreras de Ingeniería*. Ingeniería – Revista Académica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán, Vol. 22, No. 3, pp. 15-25 ISSN: 2448 - 8364. Fecha de consulta: 22-12-2022. http://www.revista.ingenieria.uady.mx/ojs/index.php/ingenieria/article/view/127

Raichman S., Totter E. (2010). *Modelo pedagógico de estrategias presenciales y virtuales para el desarrollo inicial del pensamiento complejo*. Innova Cesal. http://www.innovacesal.org/innova_public/archivos/publica/area06_tema01/108/archivos/PCC_ING_05_2010.pdf . Fecha de consulta: 22-12-2022.

Raichman, S., Totter, E., (2008). *Aula-Taller de Geometría Analítica en Carreras de Ingeniería*. Latin American and Caribbean Journal of Engineering Education, Vol. 2, Nº 1, pp. 7-12, LACJEE, ISSN 1935-0295.

Raichman S. Totter, E. Gargiulo H., Videla D.; (2014). *Aula-taller de Geometría Analítica en el marco de formación basada en competencias y su impacto en la permanencia de estudiantes de primer año en ingeniería,* Cuartas Jornadas Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas, IPECYT 2014, Eje 3. ISBN: 978-987-3662-01-0, http://redipecyt.fceia.unr.edu.ar/trabajos/E3069-Raichman.pdf. Fecha de consulta: 22-12-2022. Universidad Nacional de Rosario.

Raichman, S., Totter, E., Gargiulo, H., Videla, D., (2014). *Aula-taller de Geometría Analítica en el marco de formación basada en competencias y su impacto en la permanencia de estudiantes de primer año en ingeniería*. Cuartas Jornadas Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas, IPECYT 2014, Eje 3. ISBN: 978-987-3662-01-0, Univ. Nac. De Rosario.

Raichman, S., Totter, E., Videla, D., Collado, L., Codina, F., Molina, G., Cascone, I., (2018). *Recursos didácticos para el aprendizaje complejo de la Geometría Analítica*. I Jornada de Divulgación de la Carrera de Ingeniería Civil, Mendoza. http://bdigital.uncu.edu.ar/10949. Fecha de consulta: 22-12-2022.

Totter, E., Raichman, S.; (2009). *Creación de espacios virtuales de aprendizaje en el área Ciencias Básicas en carreras de Ingeniería*. Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, ISSN 1850-9959. Vol. 4, pp. 40-46. La Plata, Octubre de 2009.

# Geometría Analítica
## para Ciencias e Ingenierías

## *Actividades para el Aprendizaje*

ISBN 978–987–4026–82–8

EDICIÓN ARGENTINA