

Señal Compleja

Ing. Eduardo S. Serdoch

RESUMEN

La registraci3n y medici3n de fen3menos din3micos brinda la posibilidad de un enfoque m3s general para su interpretaci3n.

Basado en el trabajo que Tanner y Sheriff publicaron en Geophysics en 1979, sobre la conformaci3n de la traza s3smica compleja, se da aqu3 una visi3n de la fundamentaci3n dada por estos autores y se deja entrever una amplia gama de potencialidades en la aplicaci3n de este concepto.

La idea b3sica es que lo que medimos en un fen3meno din3mico, es solamente la parte real de una se1al de magnitud compleja mucho m3s general. Entonces si logramos obtener la parte imaginaria con un planteo matem3tico plausible, estamos frente a la posibilidad de manejar e interpretar el an3lisis de varios atributos que no est3n al alcance contando s3lo con la medici3n de la parte real; a saber: "fase instant3nea", "frecuencia instant3nea", "amplitud (fasor) de la se1al compleja" y obviamente, partes real e imaginaria. Es decir, cinco atributos en vez de uno. Una de las aplicaciones ensayadas por Tanner y Sheriff fue en el procesamiento de la se1al sismogr3fica para prospecci3n petrolera en la que los atributos "amplitud", "frecuencia" y "fase instant3nea" mostr3 una mayor coherencia para definir capas delgadas y acu1amientos o "pinch out" de estratos geol3gicos.

Queda abierto un interesante campo de investigaci3n al continuar la l3nea aqu3 esbozada, para que se profundice la b3squeda de su aplicaci3n en otros campos tales como; Comunicaciones, Sismolog3a Natural, Teor3a de Vibraciones, etc.

Luego de la formulaci3n de Sheriff y Tanner, C. Novogradsky dio la concepci3n matem3tica con mayor detalle y en este trabajo se da, adem3s de 3sta, la interpretaci3n del fen3meno desde el punto de vista de los fasores y otras consideraciones.

SUMMARY

The recording and measurement of dynamic phenomena enables more general approach for its interpretation.

Based on the work published by Tanner and Sheriff in the 80's about the complex seismic design, a look of principles exposed by these authors is given here and a wide range of potential applications of this concept may be seen.

The basic idea is that what we measure in a dynamic process is just a real part of a signal of a more general complex magnitude. Thus, if we are able to get the imaginary part with an acceptable mathematical scenario, we have the possibility of handling and interpreting the analysis of several attributes which would not be attainable with only the measurement of the real part; i.e.: "instant phase", "instant frequency", "amplitude (phasor) of the complex signal", and obviously, real and imaginary parts. That is to say, five attributes instead of one. One of the applications tested by Sheriff and Tanner was in the processing of the seismographic signal for petroleum prospecting where the term "instant phase" proved to be more coherent to define the "pinch out" of geological strata.

An interesting area for follow-up research remains open.

This would widen the research to apply it to other fields, such as: Communications, Natural Seismology, Vibration Theory, etc.

After Sheriff and Tanner's statement, Carlos Novogrudsky presented the Mathematical theory in greater detail and, in this work, further to Sheriff and Tanner's, interpretation of the phenomenon from the point of view of phasors and other considerations is explored.

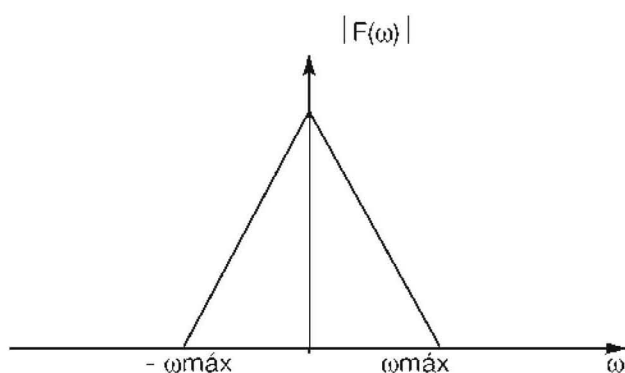
INTRODUCCIÓN

Cuando registramos fenómenos dinámicos con los instrumentos de adquisición de datos, obtenemos generalmente una grabación gráfica o magnética de desplazamiento, velocidad o aceleración de partícula, tensiones o corrientes eléctricas, campos magnéticos y otras magnitudes físicas que varían con el tiempo. Estos instrumentos estarían captando tan sólo la parte real de una magnitud que con mayor generalidad suponemos es "compleja", matemáticamente hablando.

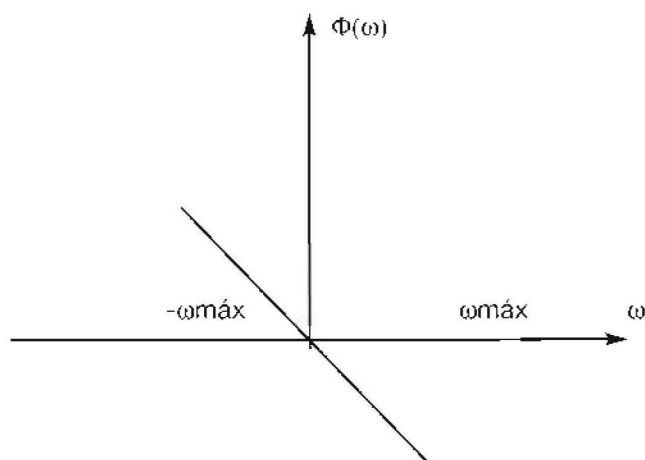
LAS SEÑALES REALES

TODA SEÑAL REAL TIENE:

ESPECTRO DE AMPLITUD "PAR"



Y ESPECTRO DE FASE "IMPAR"



DEMOSTRACIÓN (CASO DISCRETO)

Sea $x(n)$ una señal real (discreta) del tiempo.

Su transformada de Fourier es:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \quad 1)$$

(función compleja)

Hallemos ahora $X(-\Omega)$

$$X(-\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\Omega n} \quad 2)$$

Busquemos el conjugado de $X(-\Omega)$, denotado $X^*(-\Omega)$:

$$X^*(-\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \quad 3)$$

Así se verifica:

$$|X^*(-\Omega)| \cdot e^{j\phi(-\Omega)} = |X(\Omega)| \cdot e^{j\phi(\Omega)}$$

Y finalmente:

$$-\phi(-\Omega) = \phi(\Omega) \quad (\text{fase impar})$$

$$|X(-\Omega)| = |X(\Omega)| \quad (\text{amplitud par})$$

OBTENCIÓN DE LA SEÑAL COMPLEJA

La señal real registrada normalmente, es $x(n)$, la que a partir de su transformada Fourier, $X(\Omega)$, es:

$$\begin{aligned} (1) \quad x_r(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega + \int_0^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\int_0^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega + \int_0^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} X(-\Omega)e^{-j\Omega n} d\Omega + \int_0^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (|X(\Omega)| \cdot e^{j\phi(-\Omega)} \cdot e^{-j\Omega n} + |X(\Omega)| \cdot e^{j\phi(\Omega)} \cdot e^{j\Omega n}) \cdot d\Omega \end{aligned}$$

$$x_r(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\pi} 2|X(\Omega)| \cos(\Omega n + \Phi(\Omega)) d\Omega \quad (2)$$

Luego, la parte imaginaria $x_i(n)$ debe ser:

$$x_i(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\pi} 2|X(\Omega)| \text{sen}(\Omega n + \Phi(\Omega)) d\Omega \quad (3)$$

Sumando (2) + j (3), se obtiene la señal compleja $x_c(n)$.

$$x_c(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\pi} 2|X(\Omega)| e^{j\Phi(\Omega)} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\pi} 2 X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (4)$$

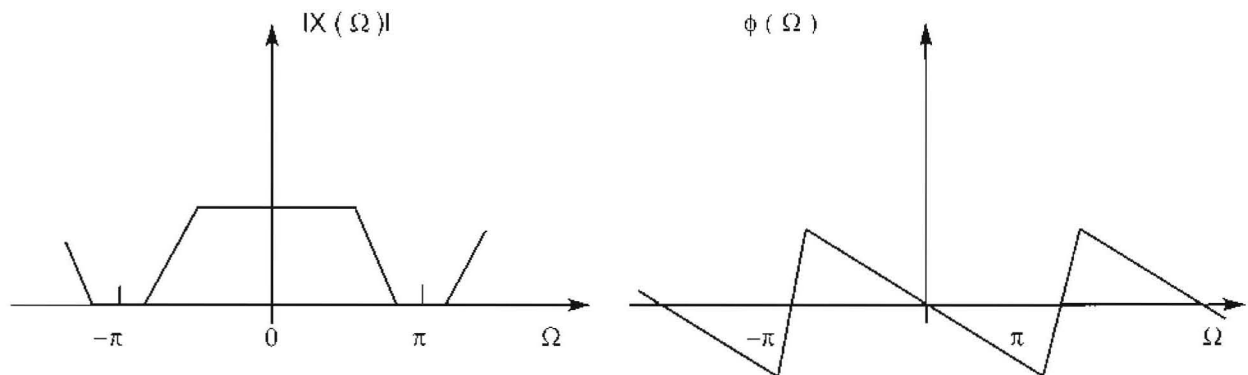
Comparando (1) con (4) se comprueba que:

LA SEÑAL COMPLEJA TIENE: "AMPLITUD DOBLE QUE LA DE LA SEÑAL REAL, PERO EN UN RANGO DE FRECUENCIAS POSITIVAS SOLAMENTE"

COMPRESIÓN GRÁFICA

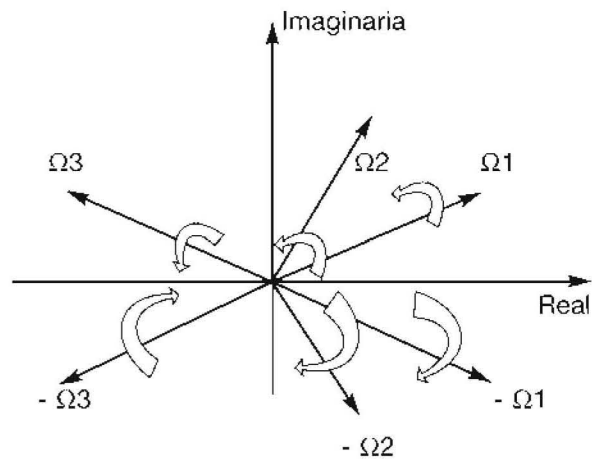
Analicemos los espectros de la señal real registrada.

Sea $X(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\Phi(\Omega)}$

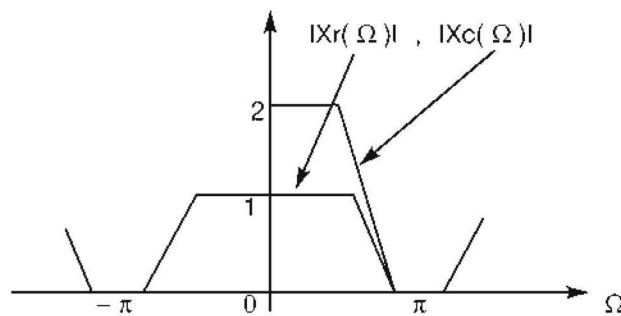


(espectros de amplitud y fase de la señal real $x_r[n]$)

Pero es muy útil observar que los fasores componentes giran de a pares con magnitudes iguales y con velocidades iguales y opuestas. Se cancelan a cada instante las partes imaginarias y se suman las partes reales. Así, el fenómeno visto, es real puro:

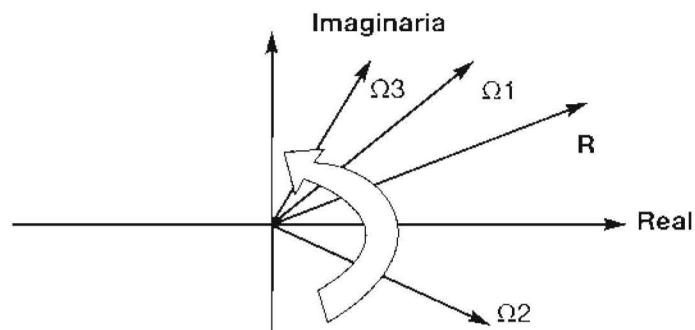


Fasores de igual módulo pero con fase y velocidad opuestas, cancelan sus componentes imaginarias en todo instante. En cambio, como la señal compleja tiene componentes de frecuencia solamente positiva (hemiespectro).



Es claro que las partes imaginarias no se cancelarán. Veamos:

La señal compleja se compone sólo de fasores que giran en sentido antihorario.



El vector resultante "R", tiene módulo, fase y frecuencia que varían, en general, de modo **NO LINEAL** con el tiempo por ser suma vectorial de vectores de distinta amplitud, fase y frecuencia.

EL OPERADOR DE HILBERT

Se demostró que:

$$X_c(n) = X_r(n) + j X_i(n)$$

Sus respectivas transformadas de Fourier dan:

$$X_c(\Omega) = X(\Omega) + j X_i(\Omega) = 2 X(\Omega) \quad ; \text{ en } 0 < \Omega < \pi$$

$$X_c(\Omega) = X(\Omega) + j X_i(\Omega) = 0 \quad ; \text{ en } -\pi < \Omega < 0$$

Entonces, observando la parte imaginaria en ambos intervalos es claro que:

$$X_i(\Omega) = -j X(\Omega) \quad 0 < \Omega < \pi$$

$$X_i(\Omega) = j X(\Omega) \quad -\pi < \Omega < 0$$

En consecuencia, el vínculo, $H(\Omega)$, entre el espectro de la parte real $X(\Omega)$ y el de la parte imaginaria $X_i(\Omega)$ es:

$$H(\Omega) = -j \quad \text{en} \quad 0 < \Omega < \pi$$

$$H(\Omega) = j \quad \text{en} \quad -\pi < \Omega < 0$$

$H(\Omega)$ será la transformada de Fourier de la serie de tiempo que convierte en imaginaria a la componente real registrada.

A partir de $H(\Omega)$ obtenemos $h(n)$, antitransformando:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 H(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega + \int_0^{\pi} H(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \right)$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 j e^{j\Omega n} d\Omega - \int_0^{\pi} j e^{j\Omega n} d\Omega \right)$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\pi} (e^{j\Omega n} - e^{-j\Omega n}) d\Omega$$

$$h(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}(\Omega n) d\Omega =$$

$$\boxed{= \frac{1 - \cos \pi n}{\pi n} = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\left(\frac{\pi n}{2}\right)} = h(n)}$$

Así:

$$\boxed{X_i(n) = X_r(n) * h(n)} \quad (5).$$

(el * denota convolución)

Disponiendo ahora de ambas componentes,

$X_r(n)$ y $X_i(n)$

se puede obtener:

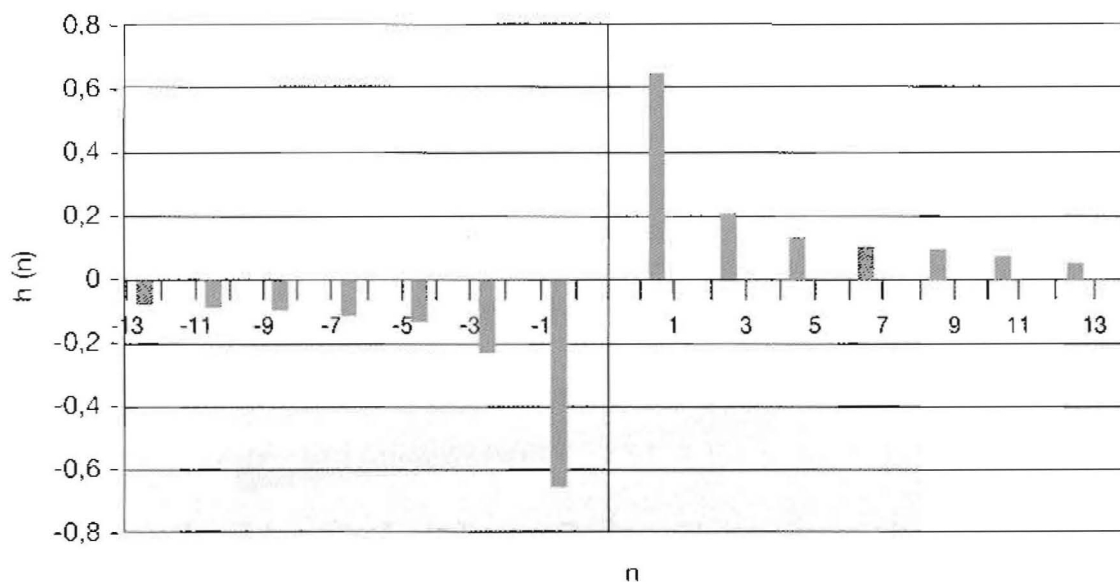
- 1) FASE INSTANTÁNEA: $\theta(n) = \arctan [X_i(n)/X_r(n)]$
- 2) FRECUENCIA INSTANTÁNEA: $\Omega(n) = d\theta/dn$
(por derivación numérica)
- 3) AMPLITUD (MÓDULO) INSTANTÁNEA:

$$A(n) = (X_r^2(n) + X_i^2(n))^{1/2}$$

AHORA SE CUENTA CON CINCO ATRIBUTOS EN VEZ DE UNO PARA PROCESAR LA INFORMACIÓN

La función obtenida $h(n)$, como lo expresa la ecuación (5), es el operador que nos permite obtener la parte imaginaria a partir de la señal real registrada. Su aspecto es el que se muestra en la siguiente figura.

OPERADOR DE HIKBERT: $H(n)$



APLICACIONES DE LA SEÑAL COMPLEJA

Esta teoría ha encontrado interesantes aplicaciones en la interpretación de señales destinadas a la prospección sísmica de hidrocarburos por el método de reflexión, en especial con la técnica 3D. Diferentes tipos de acontecimientos geológicos que no resultan obvios en una sección sísmica convencional (parte real de la señal sísmica), pueden ser detectados con mayor claridad en secciones sísmicas que muestran "amplitud", "frecuencia" y "fase" instantáneas e incluso pueden revelar detalles que pasarían totalmente inadvertidos en una sección sísmica corriente, donde sólo se muestra la parte real de la señal, es decir, la ondícula reflejada por el método tradicional.

Para ilustrar esta aseveración, se presenta a continuación una serie de figuras extraídas del trabajo de James Robertson y Henry Nogami titulado "Complex Seismic Trace Analysis of Thin Beds" (Geophysics: vol. 49 N° 4 Abril 1984, pág. 344). Allí se destaca el uso ventajoso de los atributos mencionados para definir mejor los acuñaientos (pinch out), lentes y estratos delgados. Capas de un espesor del orden de 1/2 período de la energía sísmica dominante, dan una gran anomalía de "amplitud instantánea". El atributo "frecuencia instantánea" alcanza también una gran anomalía por "sintonía" (tuning) para estratos de un espesor cercano a 1/4 del período manteniéndose alta aún para espesores menores. Acontecimientos donde la amplitud de la parte real no muestra cambios visibles, pueden dar fuertes variaciones de la "fase instantánea" lo cual evidencia con mayor claridad los detalles de continuidad lateral de los acuñaientos entre estratos, tan interesantes desde el punto de vista de posibles entrapamientos de hidrocarburos.

En primer lugar, figura 1, se muestra una sección sintética simulando un acuñaiento cuyo espesor (obviamente variable) es T. En las figuras 2, 3 y 4 se presentan las correspondientes secciones sísmicas sintéticas de amplitud, fase y frecuencia instantáneas, respectivamente: se destacan mejor los detalles del acuñaiento simulado.

En la figura 5 se presenta una sección sísmica convencional real en arenas delgadas de baja impedancia acústica. En la zona marcada como "de interés" no se observan aspectos relevantes. Sin embargo, en las figuras 6, 7 y 8 se revelan acuñaientos, "lentes" y mejor detección de espesores delgados, para los atributos: fase, amplitud y frecuencia instantáneas, respectivamente.

CONCLUSIÓN

Estos conceptos fueron aplicados a la prospección sísmica, arrojando una interesante perspectiva como aliados de la interpretación de las secciones sísmicas. Es más, queda claro que el uso de esta herramienta ofrece un amplio horizonte, pues toda señal real dinámica puede ser procesada con miras a hallar la "oculta" componente imaginaria, y especular con que el análisis de los otros atributos aporten, en cada caso, un relieve no mostrado por los datos convencionales.

Se ha presentado aquí con cierto detalle el fundamento matemático y algunas aplicaciones interesantes de esta herramienta que hoy en día es de gran ayuda para el geofísico intérprete que busca detalle en espesores finos. En momentos en que en muchos países como Argentina los yacimientos más grandes (y más obvios) ya han sido descubiertos, resulta importante contar con elemento sólido que permita definir estratigrafías complicadas para aprovechar al máximo las potencialidades del método sísmico 3 D, tanto más por el alto costo del mismo.

BIBLIOGRAFÍA

- Taner M. T., Koehler F. and Sheriff R. E. 1979 "Complex Seismic Trace Analysis". Geophysics vol. 44 p. 1041 - 1063.
- Robertson J. D. and Nogami H. H. "Complex Seismic Trace Analysis of Thin Beds". Geophysics vol. 49 p. 344 - 352.
- Novogradsky C. "Traza Compleja". Inédito (YPF).

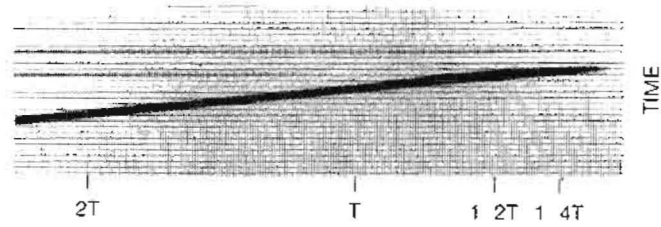


Figura 1

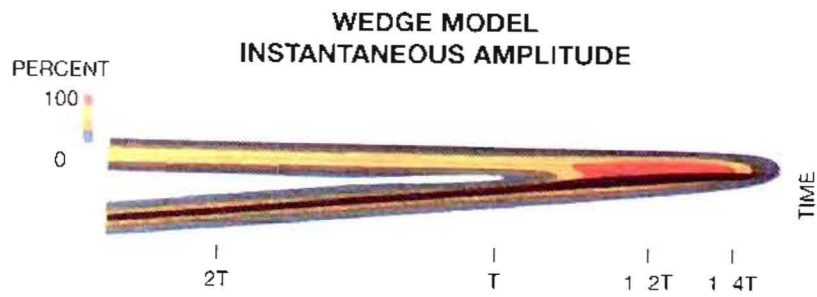


Figura 2
Instantaneous amplitude section of wedge model.

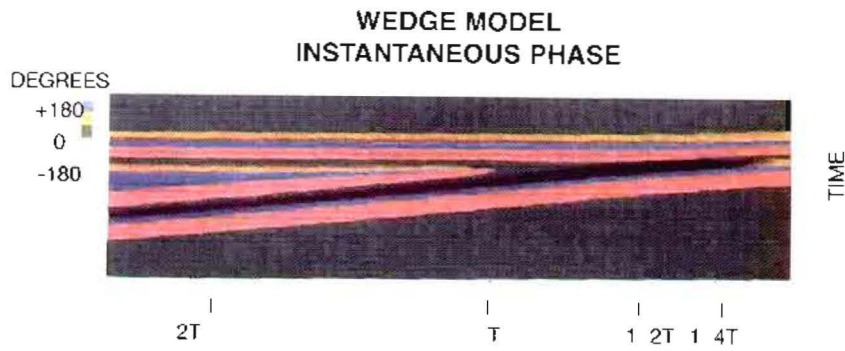


Figura 3
Instantaneous phase section of wedge model.

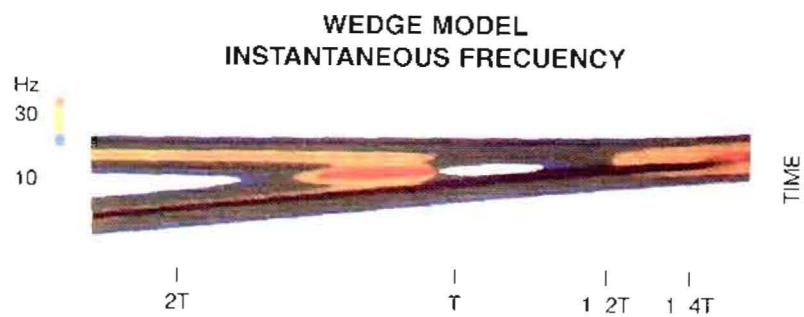


Figura 4

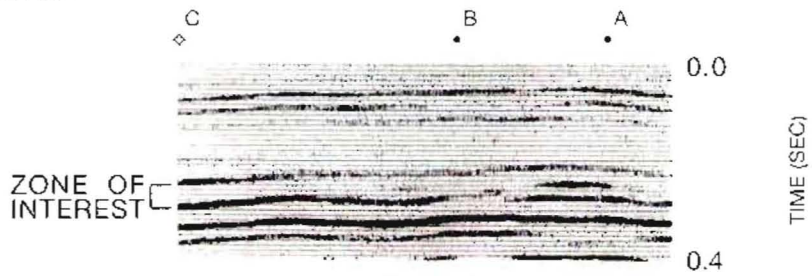


Figura 5

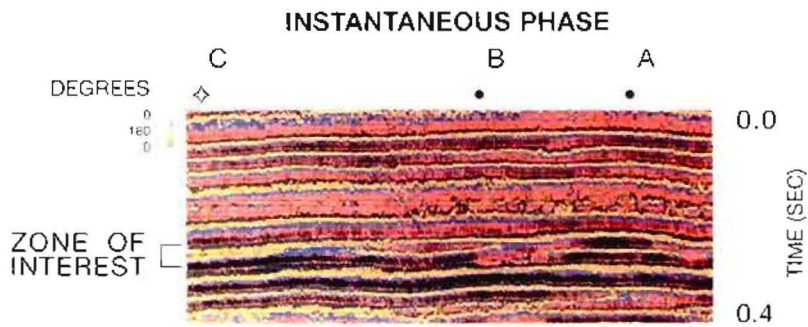


Figura 6

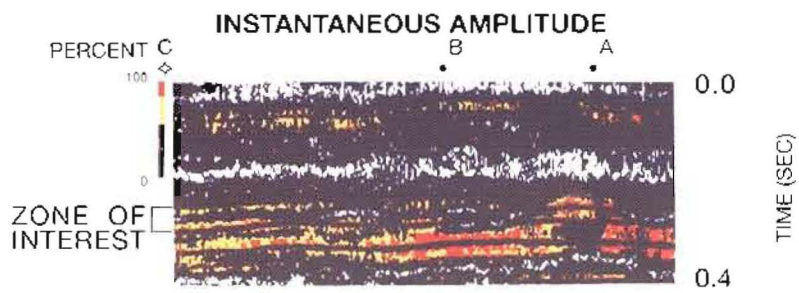


Figura 7

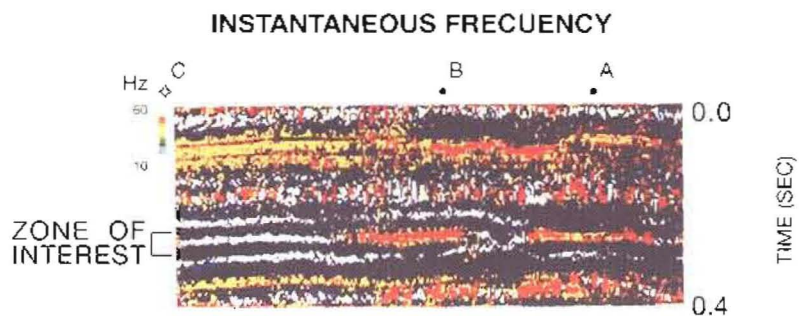


Figura 8