

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE CIENCIAS APLICADAS A LA INDUSTRIA
INGENIERÍA MECÁNICA

Proyecto Final:

**Estimación de zonas críticas de aneurismas
cerebrales mediante simulaciones de interacción
fluido-estructura**

Autores: Martinelli, Brando
Villegas, Brian

Título al que se aspira: Ingeniero Mecánico

Director: Daniel Millán, Dr.
Codirector: Nicolás Muzi, Ing.

San Rafael, Mendoza, 2025

Estimación de zonas críticas de aneurismas cerebrales mediante simulaciones de interacción fluido-estructura

Autores: Martinelli, Brando
Villegas, Brian

Título al que se aspira: Ingeniero Mecánico

Trabajo aprobado por:

Presidente: Eduardo Rodríguez, Ing.

Fecha

Vocal: Alejandro Bany, Ing.

Fecha

Tutor: Andrea Ridolfi, Dr.

Fecha

Director: Daniel Millán, Dr.

Fecha

Codirector: Nicolás Muzi, Ing.

Fecha

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE CIENCIAS APLICADAS A LA INDUSTRIA

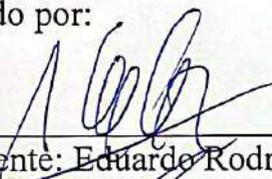
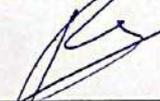
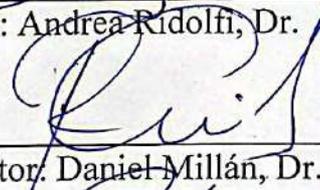
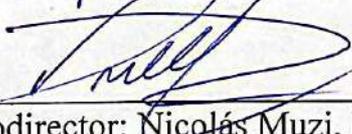
San Rafael, Mendoza, 2025

Estimación de zonas críticas de aneurismas cerebrales mediante simulaciones de interacción fluido-estructura

Autores: Martinelli, Brando
Villegas, Brian

Título al que se aspira: Ingeniero Mecánico

Trabajo aprobado por:

| | |
|---|---------------------|
|  Presidente: Eduardo Rodríguez, Ing. | 30/05/2025 Fecha |
|  Vocal: Alejandro Bany, Ing. | 30/05/2025 Fecha |
|  Tutor: Andrea Ridolfi, Dr. | 30/05/2025 Fecha |
|  Director: Daniel Millán, Dr. | 30/05/2025 Fecha |
|  Codirector: Nicolás Muzi, Ing. | 30/05/2025 Fecha |

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE CIENCIAS APLICADAS A LA INDUSTRIA

San Rafael, Mendoza, 2025

AGRADECIMIENTOS

Después de todos estos años transcurridos en esta facultad, quiero dar mis más sinceros y cálidos agradecimientos a todos mis profesores que me han acompañado en este camino y haberme formado no solo como profesional, sino como persona. Quiero hacer una mención especial a mi director Dr. Daniel Millán y mi codirector Ing. Nicolás Muzi y a todo el grupo MoCCAI, por inspirarme y ser un grupo muy valioso para mí. También, a la Ing. Analia Bonino, a la Ing. Luisa Tapia, a la Dra. Andrea Ridolfi, a la Prof. Francisca Julián, al Ing. Alejandro Gentile.

A mis compañeros y amigos de la facultad, que de no ser por ellos mi camino en la carrera no habría sido tan divertido y además por acompañarme en aquellos momentos difíciles en la carrera. Espero que yo también los haya podido ayudar de esa manera, como ellos lo hicieron por mí.

A mis compañeros, compañeras y mi profesora de ballroom, por haberme enseñado a seguir adelante y no rendirme.

A mis amigos, ya sean de la primaria, de la secundaria, que conozco por otros amigos, o que están lejos. Todos ellos tienen su lugar en mi corazón, por haberme apoyado en momentos muy difíciles sin importar el tiempo y el lugar, siempre dispuestos a darme una mano. Gracias por ser mi sostén incondicional y ser una de las cosas más importantes en mi vida.

A mi amigo y coautor de este proyecto Brian, por las risas, la buena onda y nunca dejarme que pierda el rumbo.

A mi familia, por estar siempre a mi lado y bancarme en todas las circunstancias. A mis abuelos, siempre dispuestos a escucharme y por el cariño que me han dado.

Por último, a mis padres y mi hermano, por darme siempre palabras de apoyo, por creer en mí y permitirme haber estudiado una carrera y mucho más. No hay las palabras suficientes para expresar el amor que les tengo, sólo espero algún día devolverles todo lo que me han dado y más.

Brando Martinelli.

Antes de concluir esta etapa de mi vida, quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que han estado a mi lado durante este camino.

En primer lugar, quiero dedicar un especial y profundo agradecimiento a mis padres, cuyo apoyo incondicional me ha llevado a cumplir este logro. Lo que han hecho y continúan haciendo por mí es impagable.

También quiero agradecer a mis hermanos y familia, por esas tardes compartidas que me ayudaron a disfrutar y a desconectarme, incluso en los momentos más difíciles de esta etapa.

A mi novia, Guadalupe, por acompañarme, por su cariño y por estar siempre a mi lado. Me enseñaste a valorar los pequeños detalles y a encontrar alegría incluso en los días difíciles. Tenerte como compañera de vida es un regalo de Dios que me fortalece ante cada desafío.

A mis compañeros y amigos de la facultad y de la secundaria: por hacer este camino más llevadero, por las risas y los estudios compartidos.

A los amigos que comparto con mi novia, los *perris*. Gracias por su apoyo y la buena onda que siempre nos han dado.

Un agradecimiento especial también para los profesores de esta facultad que han contribuido a mi formación, en particular a Andrea Ridolfi, Analia Bonino, Silvia Clavijo, Francisca Julián, Iván Ferrari y Diego Videla.

Por último, quiero agradecer profundamente a mi director Daniel Millán, y codirector Nicolás Muzi, quienes, desde hace más de tres años, me han formado con dedicación. Su ejemplo y enseñanza han sido importantes en mi formación profesional y personal. Ser parte del grupo MoCCAI ha sido una de las mejoras experiencias que he vivido en esta etapa. Agradezco a cada una de las personas que formaron parte de este equipo.

Brian Villegas.

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|--|-----------|
| CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1.1 INTRODUCCIÓN A LA PATOLOGÍA | 1 |
| 1.2 MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS PRINCIPALES..... | 4 |
| 1.3 BREVE HISTORIA DE LA OCLUSIÓN DE ANEURISMAS CEREBRALES | 5 |
| 1.4 IMÁGENES MÉDICAS | 6 |
| 1.4.1 Tipos de angiografías | 6 |
| 1.5 ESQUEMA DEL PROYECTO..... | 8 |
| CAPÍTULO 2 HEMODINÁMICA Y BIOMECÁNICA DE ANEURISMAS CEREBRALES | 10 |
| 2.1 COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LA SANGRE | 10 |
| 2.2 MECANOBIOLOGÍA DEL TEJIDO ARTERIAL | 12 |
| 2.3 COMPORTAMIENTO MECÁNICO DEL TEJIDO ARTERIAL..... | 15 |
| 2.4 ESPESOR DE LA PARED ARTERIAL Y DEL ANEURISMA..... | 17 |
| CAPÍTULO 3 FLUIDODINÁMICA DE ANEURISMAS CEREBRALES | 22 |
| 3.1 INTRODUCCIÓN..... | 22 |
| 3.2 MODELO HEMODINÁMICO..... | 22 |
| 3.2.1 Modelo vascular a partir de AneuriskWeb..... | 23 |
| 3.2.2 Dominio computacional | 25 |
| 3.2.3 Formulación matemática del flujo sanguíneo | 28 |
| 3.2.4 Condiciones de contorno | 31 |
| 3.2.5 Factores hemodinámicos de interés..... | 35 |
| 3.3 MODELO COMPUTACIONAL EN OPENFOAM..... | 36 |
| 3.4 FLUIDODINÁMICA DE UN CASO PARTICULAR DE ANEURISMA..... | 39 |
| 3.4.1 Influencia del modelo geométrico en los resultados | 42 |
| 3.4.2 Modelos newtonianos y no newtonianos | 43 |
| 3.4.3 Análisis del efecto transitorio en simulaciones con múltiples ciclos | 45 |
| CAPÍTULO 4 MECÁNICA DE LA PARED ARTERIAL | 48 |
| 4.1 INTRODUCCIÓN..... | 48 |
| 4.2 FUNDAMENTOS DE MECÁNICA DEL CONTINUO | 48 |
| 4.3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS | 51 |
| 4.4 MODELOS MATERIALES | 53 |
| 4.4.1 Modelo de Saint Venant-Kirchhoff..... | 54 |
| 4.4.2 Modelo de Ciarlet..... | 55 |

| | | |
|---|---|-----------|
| 4.4.3 | Modelo de Mooney-Rivlin | 55 |
| 4.5 | ESTADO PRETENSIONADO | 56 |
| 4.5.1 | Formulación Lagrangiana Actualizada Modificada | 56 |
| 4.5.2 | Pretensado mediante el segundo tensor de Piola-Kirchhoff..... | 57 |
| 4.5.3 | Algoritmo de Sellier | 59 |
| 4.6 | METODOLOGÍA PROPUESTA Y VALIDACIÓN..... | 60 |
| CAPÍTULO 5 INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA..... | | 64 |
| 5.1 | INTRODUCCIÓN..... | 64 |
| 5.2 | FUNDAMENTOS DE PRECICE | 64 |
| 5.2.1 | Comunicación..... | 65 |
| 5.2.2 | Esquemas de acoplamiento | 66 |
| 5.2.3 | Mapeo de datos..... | 67 |
| 5.2.4 | Pasos de tiempo no coincidentes | 71 |
| 5.2.5 | Interpolación de tiempo..... | 72 |
| 5.3 | INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA EN UN CASO DE REFERENCIA | 73 |
| 5.3.1 | Modelo material | 75 |
| 5.3.2 | Dominio computacional | 75 |
| 5.3.3 | Condiciones de contorno | 76 |
| 5.4 | RESULTADOS Y VALIDACIÓN | 77 |
| CAPÍTULO 6 ANÁLISIS DE UN CASO ESPECÍFICO DE ANEURISMA | | 82 |
| 6.1 | PREPARACIÓN DEL CASO..... | 82 |
| 6.1.1 | Modelo material | 83 |
| 6.1.2 | Dominios computacionales | 83 |
| 6.1.3 | Condiciones de contorno | 85 |
| 6.1.4 | Esquema de acoplamiento | 85 |
| 6.2 | RESULTADOS Y ESTIMACIÓN DE ZONAS CRÍTICAS..... | 86 |
| 6.3 | INFLUENCIA DEL SUPUESTO DE PARED RÍGIDA..... | 89 |
| 6.4 | INFLUENCIA DEL ESTADO PRETENSIONADO | 91 |
| CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES | | 95 |
| ANEXOS | | 97 |
| A | HERRAMIENTAS DE MALLADO | 97 |
| A.I | SNAPPYHEXMESH | 97 |
| B | SCRIPTS EN MATLAB | 103 |
| B.I | CONDICIÓN DE CONTORNO EN LA ENTRADA | 103 |

| | | |
|--------------------------|--|------------|
| B.II | CONDICIÓN DE CONTORNO EN LA SALIDA..... | 106 |
| B.III | VALIDACIÓN DEL CÓDIGO DE ESTADO PRETENSIONADO | 107 |
| B.VI | GENERACIÓN DE SUPERFICIE CERRADA DE LA PARED ARTERIAL..... | 113 |
| C | MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS..... | 115 |
| D | MÉTODOS NUMÉRICOS EN FEM | 122 |
| D.I | MÉTODO α | 122 |
| D.II | DESPLAZAMIENTO QUE MINIMIZA EL RESIDUO | 125 |
| REFERENCIAS | | 127 |

LISTA DE TABLAS

| | |
|---|----|
| Tabla 1.1. Técnicas de imagenología de aneurismas intracraneales. | 7 |
| Tabla 3.1. Parámetros del modelo de Casson utilizados en OpenFOAM. | 31 |
| Tabla 3.2. Valores de tiempos y amplitudes de los puntos característicos para las formas de onda del flujo sanguíneo de la ICA y la VA..... | 33 |
| Tabla 3.3. Comparación de valores máximos de WSS según la longitud de la arteria en la salida del aneurisma. | 43 |
| Tabla 5.1. Modelo material utilizado por cada autor para el cálculo de las deformaciones de la pared. También se especifican el número de elementos en la malla del fluido y del sólido. | 79 |
| Tabla 6.1. Parámetros materiales utilizados para el modelo de la sangre y la pared arterial. . | 83 |
| Tabla 6.2. Comparación de los valores máximos de WSS en las regiones del cuello y la cúpula del aneurisma para diferentes supuestos: suposición de pared rígida, pared deformable con estado pretensionado y pared deformable sin estado pretensionado. | 94 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1.1. Tipos de aneurismas..... | 1 |
| Figura 1.2. Sitios comunes de formación de aneurismas cerebrales | 2 |
| Figura 1.3. Anatomía de una aneurisma sacular | 2 |
| Figura 1.4. Posibles intervenciones de un aneurisma..... | 3 |
| Figura 1.5. Esquema del proyecto final integrador | 9 |
| Figura 2.1. Tipos de fluidos según la curva de viscosidad..... | 10 |
| Figura 2.2. Dependencia de la viscosidad con la tasa de corte y hematocrito | 11 |
| Figura 2.3. Esfuerzo cortante en función de la tasa de corte para el flujo sanguíneo | 12 |
| Figura 2.4. Estructura y composición celular de una arteria cerebral sana | 13 |
| Figura 2.5. Composición estructural y molecular de un aneurisma cerebral y su arteria madre | 14 |
| Figura 2.6. Principales capas que componen a la cabeza | 15 |
| Figura 2.7. Características principales del comportamiento mecánico del colágeno..... | 16 |
| Figura 2.8. Curva uniaxial de tensión-deformación en aneurismas y arterias cerebrales | 17 |
| Figura 2.9. Reclutamiento de fibras de colágeno mediante carga uniaxial | 18 |
| Figura 2.10. Correlación de la variación de la intensidad de la señal y la variación real del grosor en las biopsias de la pared del aneurisma..... | 19 |
| Figura 2.11. Muestra de tejido aneurismático en ensayo de tracción biaxial..... | 20 |
| Figura 2.12. Resultados mecánicos de un estudio biaxial | 20 |
| Figura 3.1. Pipeline de modelado CFD | 23 |
| Figura 3.2. Información geométrica y clínica de la base de datos AneuriskWeb | 24 |
| Figura 3.3. Modelo geométrico del caso C0034 de la base AneuriskWeb..... | 24 |
| Figura 3.4. Pasos para generar una malla volumétrica..... | 25 |
| Figura 3.5. Extracción de la región de interés a partir del modelo geométrico..... | 26 |
| Figura 3.6. Remallado de la superficie original | 26 |
| Figura 3.7. Remallado de la superficie cerrada | 26 |
| Figura 3.8. Refinamiento de la región del cuello | 27 |
| Figura 3.9. Malla volumétrica del aneurisma..... | 27 |

| | |
|---|----|
| Figura 3.10. Fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido | 28 |
| Figura 3.11. Curva de viscosidad aparente del modelo de Casson | 30 |
| Figura 3.12. Regiones sobre las que se imponen las condiciones de contorno | 31 |
| Figura 3.13. Forma de onda y puntos característicos del caudal en un ciclo cardíaco..... | 32 |
| Figura 3.14. Condición de contorno de velocidad en la entrada | 34 |
| Figura 3.15. Configuración propuesta para aplicar la condición de contorno de presión | 34 |
| Figura 3.16. Curva de variación de presión durante un ciclo cardíaco | 35 |
| Figura 3.17. Vector tracción que actúa sobre una superficie | 36 |
| Figura 3.18. Esquema de aplicación del FVM | 37 |
| Figura 3.19. Algoritmo PIMPLE..... | 39 |
| Figura 3.20. Líneas de corriente del caso C0034 durante el pico sistólico | 40 |
| Figura 3.21. Campo de WSS del caso C0034 durante el pico sistólico | 41 |
| Figura 3.22. Región del caso C0034 con valor máximo de WSS | 41 |
| Figura 3.23. Dominios computacionales con diferentes longitudes de la arteria distal | 42 |
| Figura 3.24. Campo de WSS con diferentes longitudes de la arteria distal | 42 |
| Figura 3.25. Campo de WSS en la cúpula del aneurisma con diferentes longitudes de la arteria | 43 |
| Figura 3.26. Curva de viscosidad para modelo newtoniano y de Casson | 44 |
| Figura 3.27. Curvas de WSS máximo del caso C0034 para modelo newtoniano y de Casson | 44 |
| Figura 3.28. Curvas de WSS máximo del caso C0005 para modelo newtoniano y de Casson | 45 |
| Figura 3.29. Curva de velocidad durante cuatro ciclos cardíacos | 46 |
| Figura 3.30. Valores máximos de WSS en el cuello y cúpula del aneurisma | 46 |
| Figura 3.31. Variación porcentual relativa de los valores máximos de WSS | 47 |
| Figura 4.1. Deformación de un sólido continuo | 49 |
| Figura 4.2. Fuerzas que actúan en un sólido continuo | 50 |
| Figura 4.3. Expansión tridimensional de un elemento shell en CalculiX | 53 |
| Figura 4.4. Método MULF | 57 |
| Figura 4.5. Configuración original y deformada para un problema bidimensional | 59 |

| | |
|---|----|
| Figura 4.6. Algoritmo de Sellier..... | 60 |
| Figura 4.7. Dimensiones de la geometría propuesta para validación..... | 61 |
| Figura 4.8. Malla de tetraedros para validar el código de estado pretensionado..... | 61 |
| Figura 4.9. Estado pretensionado del tubo sometido a presión interna..... | 62 |
| Figura 4.10. Campo de deformación del tubo sometido a presión interna a partir del estado pretensionado..... | 63 |
| Figura 4.11. Comparación entre estado pretensionado y configuración deformada bajo carga..... | 63 |
| Figura 4.12. Esfuerzos de von Mises de la configuración deformada..... | 63 |
| Figura 5.1. Acoplamiento entre OpenFOAM y CalculiX..... | 64 |
| Figura 5.2. Componentes funcionales básicos de preCICE..... | 65 |
| Figura 5.3. Esquema de inicialización de la comunicación en preCICE..... | 66 |
| Figura 5.4. Tipos de esquemas de acoplamiento en preCICE..... | 67 |
| Figura 5.5. Restricción de mapeo consistente..... | 68 |
| Figura 5.6. Restricción de mapeo conservadora..... | 69 |
| Figura 5.7. Métodos de mapeos de vecino más cercano y proyección más cercana..... | 69 |
| Figura 5.8. Representación unidimensional del mapeo con funciones de base radial..... | 70 |
| Figura 5.9. Esquema de ventana de tiempo fija..... | 71 |
| Figura 5.10. Esquema de ventana de tiempo definida por un participante..... | 71 |
| Figura 5.11. Esquema del proceso de subciclo sin interpolación..... | 72 |
| Figura 5.12. Esquema del proceso de subciclo con interpolación lineal..... | 73 |
| Figura 5.13. Esquema de configuración de preCICE para FSI..... | 74 |
| Figura 5.14. Representación conceptual de los términos de mallas en preCICE..... | 74 |
| Figura 5.15. Geometría inicial del caso benchmark..... | 76 |
| Figura 5.16. Dominio computacional del caso benchmark..... | 76 |
| Figura 5.17. Campo de desplazamiento del caso benchmark..... | 77 |
| Figura 5.18. Curva de desplazamiento radial del caso benchmark..... | 78 |
| Figura 5.19. Curva de desplazamiento axial del caso benchmark..... | 78 |
| Figura 5.20. Campo de presión en diferentes tiempos del caso benchmark..... | 79 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.21. Curva de desplazamiento radial desfasada..... | 80 |
| Figura 5.22. Curva de desplazamiento radial para diferentes valores de correctores externos | 80 |
| Figura 5.23. Curva de desplazamiento axial para diferentes valores de correctores externos | 81 |
| Figura 6.1. Geometría del caso C0005 de la base AneuriskWeb | 82 |
| Figura 6.2. Pasos para generar una malla superficial | 84 |
| Figura 6.3. Malla superficial que describe la pared arterial. | 84 |
| Figura 6.4. Configuración propuesta para FSI de un aneurisma | 85 |
| Figura 6.5. Esquema de acoplamiento en preCICE para FSI..... | 86 |
| Figura 6.6. Líneas de corriente para distintos instantes del caso C0005 | 86 |
| Figura 6.7. Campo de WSS en el pico sistólico | 87 |
| Figura 6.8. Líneas de corriente superpuestas al campo de WSS durante el pico sistólico..... | 87 |
| Figura 6.9. Campo de desplazamiento de la pared en el pico sistólico | 88 |
| Figura 6.10. Comparación entre la configuración con pared flexible y rígida..... | 89 |
| Figura 6.11. Comparación del WSS en el cuello entre pared flexible y rígida | 89 |
| Figura 6.12. Comparación del WSS en la cúpula del aneurisma entre pared flexible y rígida | 90 |
| Figura 6.13. Malla volumétrica que representa la pared arterial con espesor uniforme | 91 |
| Figura 6.14. Comparativa entre la geometría original y el estado pretensionado | 92 |
| Figura 6.15. Campo de deformación sobre el estado pretensionado | 92 |
| Figura 6.16. Comparación del WSS en el cuello con y sin estado pretensionado | 93 |
| Figura 6.17. Comparación del WSS en la cúpula del aneurisma con y sin estado pretensionado | 93 |

RESUMEN

La rotura de aneurismas intracraneales puede ocasionar una hemorragia subaracnoidea, una condición con alta mortalidad y secuelas graves. Si bien los avances en diagnóstico y tratamiento han sido significativos, aún es necesario mejorar la evaluación del riesgo de rotura. Las decisiones clínicas se basan principalmente en características geométricas del aneurisma, como tamaño y forma, aunque estos criterios no siempre son suficientes para predecir su evolución. En este contexto, los modelos computacionales basados en dinámica de fluidos computacional permiten analizar factores hemodinámicos como el esfuerzo cortante en la pared, asociado al desarrollo y evolución de los aneurismas. Sin embargo, asumir la pared arterial rígida puede afectar la precisión de las simulaciones. En este trabajo se desarrolla una herramienta *software* que permite simular la interacción fluido-estructura en aneurismas intracraneales, considerando el estado pretensionado y la deformabilidad de la pared arterial, con el objetivo de identificar zonas críticas a partir del esfuerzo cortante en la pared. Se utiliza OpenFOAM para la dinámica del flujo sanguíneo, CalculiX para la deformación estructural y la biblioteca preCICE para acoplar ambos códigos de manera eficiente. Esta herramienta busca brindar un soporte clínico para la toma de decisiones en casos específicos de pacientes, mejorando la precisión del diagnóstico.

PALABRAS CLAVE: aneurismas cerebrales, interacción fluido-estructura, estado pretensionado, mecánica computacional, dinámica de fluidos computacional.

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN A LA PATOLOGÍA

Un aneurisma cerebral, también conocido como aneurisma intracraneal es una dilatación anormal de un vaso sanguíneo en el cerebro. Se origina debido al debilitamiento de la pared del vaso, lo que provoca una protuberancia o ensanchamiento en la zona afectada. Se cree que los aneurismas cerebrales se forman y crecen porque el flujo sanguíneo ejerce presión sobre la región debilitada. Cuando el aneurisma no ha sufrido rotura, se lo denomina aneurisma intracraneal no roto (*unruptured intracranial aneurysm*, UIA).

Según su forma, pueden clasificarse en saculares y fusiformes, tal como se muestra en la **Figura 1.1**. Los aneurismas cerebrales generalmente se forman en las arterias en la base del cerebro. En particular, los aneurismas saculares tienden a ocurrir en o cerca de las bifurcaciones arteriales, principalmente en el círculo de Willis, debido a que estas zonas son más débiles (**Figura 1.2**) [1].

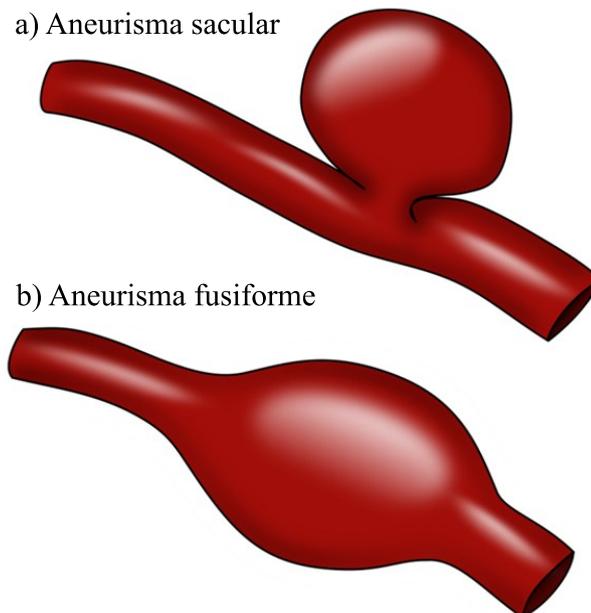


Figura 1.1. Los aneurismas cerebrales pueden ser clasificados según la forma: a) sacular y b) fusiforme. Un aneurisma sacular es un saco redondo lleno de sangre que sobresale de la arteria principal, mientras que un aneurisma fusiforme causa una protuberancia en todos los lados de la arteria. Traducida de [2].

Los aneurismas intracraneales están compuestos por un saco de pared delgada conectado a un vaso principal a través de un orificio de tamaño variable llamado cuello (**Figura 1.3**). Estos aneurismas contienen al menos algunas capas presentes en las arterias normales, aunque carecen de otras debido a la degeneración de la pared arterial. Específicamente, la pared del aneurisma es muy delgada y alberga solo la capa íntima y adventicia, mientras que la lámina elástica interna y la túnica media suelen terminar en el cuello del aneurisma [3]. Esta configuración estructural implica que la pared de un aneurisma exhibe una estructura heterogénea y estratificada, lo cual es crucial para comprender su patogénesis y riesgo de rotura.

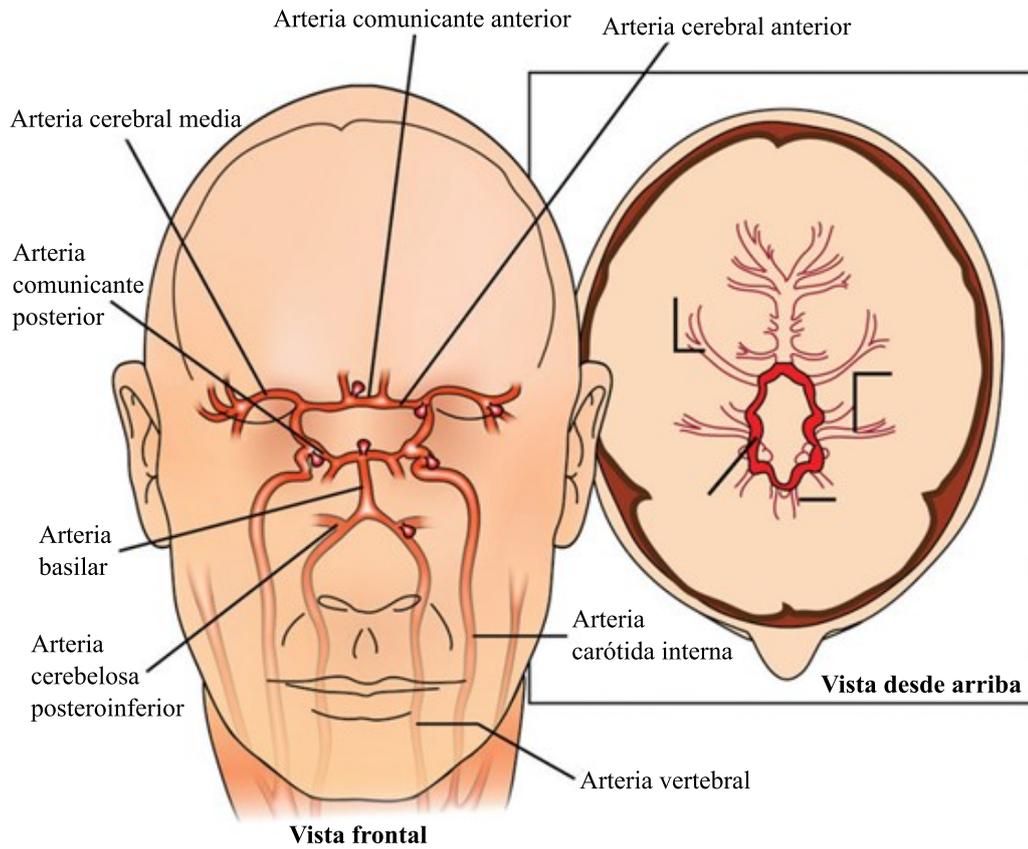


Figura 1.2. Sitios comunes de formación de aneurismas intracraneales saculares. Traducida de [4].

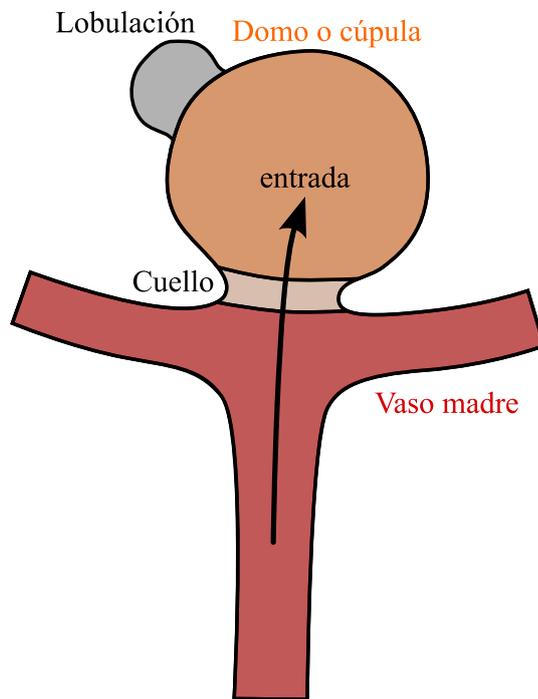


Figura 1.3. Anatomía de un aneurisma sacular. El aneurisma está separado de su vaso original por el *ostium*, que es una sección plana descrita por la curva del cuello. Además, se identifican las distintas regiones en las que el flujo de entrada puede impactar contra la pared (cuello, domo o cúpula y lobulación).

Los aneurismas cerebrales son relativamente comunes, pero la mayoría no revisten gravedad. De hecho, suelen no romperse, no provocan síntomas ni causan problemas de salud, y a menudo se detectan de manera accidental durante pruebas diagnósticas realizadas por otras afecciones [5]. Sin embargo, la rotura de un aneurisma cerebral ocasiona una hemorragia en el cerebro,

conocida como hemorragia subaracnoidea (*subarachnoid hemorrhage*, SAH), la cual ocurre frecuentemente en el espacio entre el cerebro y los tejidos circundantes.

La SAH es una condición grave, con una alta tasa de mortalidad de aproximadamente del 50% [6]. Los aneurismas cerebrales rotos representan alrededor de una cuarta parte de las muertes por accidente cerebrovascular [7]. Aunque no se conoce la prevalencia precisa de los UIAs y varía ampliamente en la literatura, se acepta que entre el 3% al 5% de la población tiene al menos un UIA [3]. La incidencia de aneurismas aumenta con la edad, alcanzando su punto máximo entre los 30 y 60 años, y el género es importante en la distribución de UIAs, siendo más comunes en las mujeres que en los hombres, representando alrededor del 75% de los casos en el Estudio Internacional de Aneurismas Intracraneales No Rotos [5, 3]. Alrededor del 20% al 30% de los pacientes tienen más de un aneurisma [4]. El 75% de los pacientes tienen dos aneurismas, el 15% tiene tres y el 10% tiene más de tres [3].

Si bien las tecnologías y métodos de tratamiento han avanzado ampliamente en las últimas décadas, las estadísticas muestran que hasta un 30% de las personas con rotura de aneurisma cerebral mueren antes de ser hospitalizadas [8]. De los pacientes que llegan al hospital, aproximadamente el 30% fallecen en los primeros días [9]. Entre los supervivientes, el 50% sufre secuelas físicas, neuropsicológicas o algún grado de discapacidad que dificulta su vida normal [10]. La tasa de mortalidad durante el primer año varía desde el 3.5% hasta 27% dependiendo de la condición del paciente al ser admitido [11].

Existen dos opciones principales de tratamiento para los UIAs: la colocación de un clip quirúrgico y la embolización endovascular con espirales (**Figura 1.4**).

Estos tratamientos que tienen como objetivo mitigar el flujo sanguíneo hacia el aneurisma y, por lo tanto, prevenir un mayor crecimiento del UIA, así como reducir el riesgo de rotura [7]. La colocación de un clip consiste en cerrar el aneurisma desde el exterior mediante una pequeña grapa que se coloca en el cuello, mientras que la embolización endovascular es un tratamiento menos invasivo que consiste en introducir espirales de platino a través de un catéter hasta el aneurisma, para rellenarlo y bloquear el flujo sanguíneo en su interior.

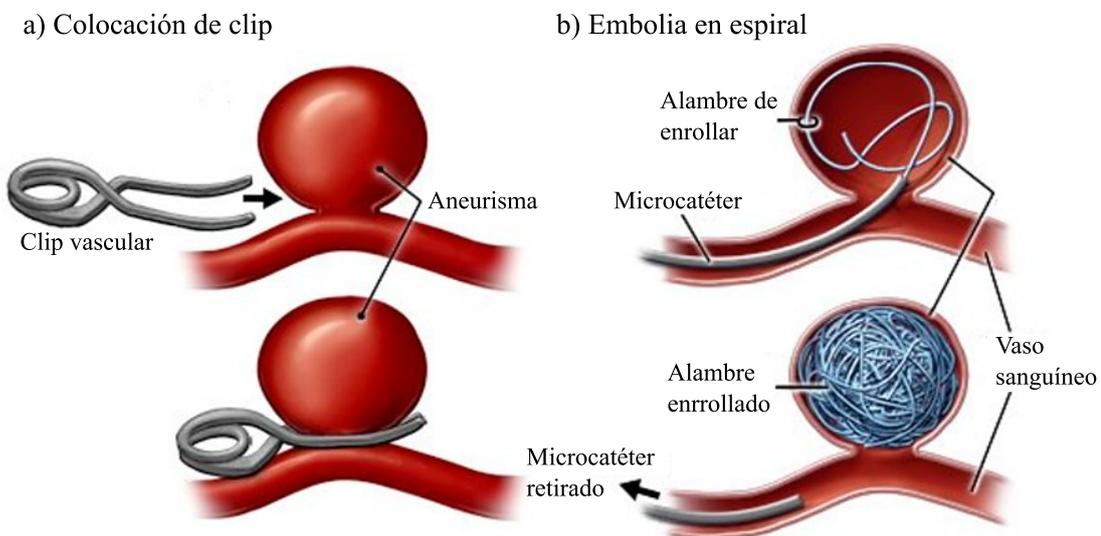


Figura 1.4. Intervenciones posibles de un aneurisma: a) Colocación de un clip quirúrgico y b) Embolización endovascular. En el primer caso, se coloca un gancho metálico pequeño en el aneurisma y con el tiempo puede reducir su tamaño e incluso desaparecer. En el segundo tratamiento, se utiliza un espiral (alambre) para llenar el espacio del aneurisma creando un sello que evita el flujo sanguíneo dentro de él. Traducida de [12].

1.2 MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS PRINCIPALES

Más allá del aumento en la detección de UIAs, impulsado por la mayor disponibilidad y mejora de las técnicas neuro radiológicas, el pronóstico de la SAH sigue siendo desfavorable. Por esta razón, la reparación quirúrgica o endovascular preventiva se considera cada vez más como una opción terapéutica viable [13]. Sin embargo, las intervenciones endovasculares y microquirúrgicas conllevan un riesgo no despreciable, con tasas de morbilidad del 5% al 7% y mortalidad del 1% al 2% [14]. La decisión del tratamiento óptimo requiere un equilibrio entre los riesgos a corto y largo plazo de la rotura aneurismática y los riesgos inherentes a ambos tratamientos [4]. En algunos casos, la intervención puede incluso aumentar el riesgo de rotura, que puede superar el riesgo original de rotura espontánea. Por ello, se necesita una mejor comprensión del riesgo de rotura individual para tratar solo a los pacientes de alto riesgo [15]. Para lograrlo, la planificación de una cirugía electiva requiere una comprensión más profunda del proceso de formación, progresión y rotura del aneurisma, lo que permitiría tomar decisiones más sólidas sobre los riesgos y beneficios de las opciones terapéuticas [16].

Hasta el momento, las decisiones clínicas sobre el tratamiento de los UIAs se han basado principalmente en su tamaño, forma y ubicación [17]. Sin embargo, estos atributos por sí solos no son suficientes para evaluar con precisión el riesgo de rotura [18]. Esta es la razón por la que, en las últimas dos décadas, ha crecido el interés en aplicar técnicas computacionales para estudiar y clasificar patrones de flujo y factores hemodinámicos de los aneurismas específicos de cada paciente [19]. Estos análisis proporcionan resultados que, de otro modo, serían inalcanzables mediante experimentos o mediciones, y han demostrado estar relacionados con eventos clínicos. De esta manera, ayuda a comprender mejor los procesos de la enfermedad y proporcionar mayor información para la evaluación y el tratamiento de los pacientes, con el fin de ayudar a los médicos en la toma de decisiones.

Los factores hemodinámicos son de interés porque permiten caracterizar la iniciación y el crecimiento de los UIAs, los cuales están asociados a condiciones anormales del flujo sanguíneo [20]. Parámetros cuantitativos como el esfuerzo de corte de la pared (*wall shear stress*, WSS) o la presión, así como características cualitativas, como la formación de vórtices o el impacto del flujo, influyen en el estado del aneurisma. Es importante destacar que, aunque el WSS es una magnitud vectorial, en este trabajo se hará referencia a su norma cuando se mencionen valores específicos de WSS. Tanto valores altos como bajos de WSS se consideran una amenaza para la estabilidad de un UIA a lo largo del tiempo [21]. La caracterización y medición de estas magnitudes representa un difícil desafío. La obtención de datos hemodinámicos *in vivo* es compleja e implica un riesgo significativo para el paciente, lo que ha llevado al uso extendido de simulaciones de la dinámica de fluidos computacional (*computational fluid dynamics*, CFD), aprovechando la accesibilidad de diversos *softwares* de código abierto y comerciales [1].

Sin embargo, varios estudios recientes han demostrado que asumir una pared arterial rígida en los modelos CFD puede afectar la precisión de los resultados [22, 23]. En particular, se sabe que esta simplificación tiende a sobrestimar el WSS, lo que pone en duda su capacidad para proporcionar criterios satisfactorios para la evaluación del riesgo de rotura de los aneurismas. Además, excluye la propagación de ondas de presión en los vasos sanguíneos y, lo que es más importante, no tiene en cuenta las tensiones en el tejido de la pared arterial. Estas tensiones son un factor crítico para evaluar el riesgo de rotura, ya que el aneurisma se rompe cuando la tensión de la pared supera su resistencia [20]. En consecuencia, a fin de determinar criterios precisos para predecir la formación, el crecimiento y la rotura de aneurismas, es importante modelizar el flujo vascular junto con la deformación de la pared vascular, lo que conduce a la modelación acoplada de la interacción fluido-estructura (*fluid-structure interaction*, FSI).

En el análisis FSI vascular, las geometrías de los vasos sanguíneos se obtienen a partir de datos de imágenes médicas del paciente. Cuando se obtienen las imágenes, los vasos sanguíneos se

encuentran en un estado de tensión mecánica que los pone en equilibrio con la carga procedente del flujo sanguíneo, es decir, la presión sanguínea y la tracción viscosa [20]. Si esta geometría se toma directamente como la configuración inicial en las simulaciones, sin considerar su estado de tensión previo, los modelos pueden predecir tensiones y deformaciones grandes y poco realistas. En consecuencia, asumir que la geometría *in vivo* corresponde a un estado libre de tensiones no es especialmente adecuado para las simulaciones de FSI. Para evitar resultados erróneos, se busca estimar un estado de referencia del aneurisma o estado pretensionado.

El modelado de la FSI en aneurismas cerebrales es un desafío complejo debido a múltiples factores. Como se mencionó en la Sección 1.1, la pared arterial no es homogénea, sino que está compuesta por varias capas, y existe una transición de espesor entre la arteria sana y la región aneurismática. Además, su comportamiento mecánico es altamente no lineal y varía entre pacientes, lo que dificulta la obtención de modelos estructurales precisos. No obstante, debido a la complejidad inherente de modelar con precisión la biomecánica de la pared arterial, este proyecto final se enfoca en el análisis de la hemodinámica del aneurisma, priorizando la modelación del flujo sanguíneo mediante simulaciones de CFD por sobre el desarrollo de modelos estructurales avanzados de la pared arterial.

En este contexto, el objetivo de este proyecto es ofrecer un servicio de biomedicina de precisión que ayude a los neurorradiólogos y neurocirujanos a mejorar el diagnóstico y la planificación de intervenciones endovasculares con mayor seguridad. Para ello, se implementará un modelo computacional basado en la FSI para estimar las zonas críticas de un aneurisma a partir del WSS. Un objetivo clave es la determinación del estado libre de tensiones del aneurisma, en vista de considerar el efecto de pretensado. Esta herramienta se desarrolló en el grupo Modelado Computacional de Ciencias Aplicadas e Ingeniería (MoCCAI) durante nuestro período como pasantes. A través de este proyecto, buscamos proporcionar información valiosa que contribuya a una mejor evaluación del riesgo de rotura y facilite la toma de decisiones clínicas para un tratamiento más efectivo y personalizado.

1.3 BREVE HISTORIA DE LA OCLUSIÓN DE ANEURISMAS CEREBRALES

Antes de la invención de la angiografía en 1927 [24], los primeros casos de exposición de aneurismas se descubrieron por casualidad durante el abordaje quirúrgico de otras enfermedades intracraneales. La aparición de la angiografía animó aún más a los neurocirujanos a innovar en el tratamiento planificado de los aneurismas intracraneales. Sin embargo, en los años cincuenta y principios de los sesenta se observó que la morbilidad quirúrgica asociada al tratamiento directo de los aneurismas intracraneales seguía siendo elevada. Por este motivo, muchos cirujanos siguieron favoreciendo el método indirecto de ligadura de vasos proximales.

Un avance en la evolución del tratamiento quirúrgico de los aneurismas intracraneales ha sido el desarrollo de una angiografía intraoperatoria sencilla, rápida y eficaz, mediante tintes fluorescentes. La angiografía sódica por fluoresceína, como la amarilla 560, descrita por primera vez para su uso en cirugía de aneurismas intracraneales por Wrobel en 1994, ha demostrado ser eficaz para visualizar el flujo sanguíneo intra operatoriamente, especialmente en arterias perforantes muy pequeñas o profundas. En 2003, Andreas Raabe y el equipo del Instituto Neurológico Barrow introdujeron, en la neurocirugía vascular, el uso de la video angiografía intraoperatoria con verde de indocianina en el infrarrojo cercano. La aplicación de esta técnica durante la cirugía de aneurismas intracraneales permite la evaluación intraoperatoria en tiempo real del grado de obliteración del aneurisma, excluye el compromiso del vaso principal y evalúa la permeabilidad de los perforantes. Y lo que es más importante, evita la angiografía intraoperatoria con catéter en la mayoría de los casos haciendo las cirugías más seguras, más rápidas y menos exigentes.

1.4 IMÁGENES MÉDICAS

Como se mencionó, las imágenes médicas han sido un gran avance para este tipo de cirugías. Las imágenes médicas [25] son el eje fundamental para el diagnóstico y seguimiento de diversas enfermedades. Esta es la razón por la cual toman especial relevancia para los profesionales de la salud, por su sensibilidad y necesidad.

Por definición, las imágenes médicas son las representaciones que se obtienen por medio de diferentes tecnologías para observar el cuerpo humano con el fin de diagnosticar, monitorear o tratar condiciones médicas. Según sea el tipo de tecnología utilizada, se obtiene información sobre el área del cuerpo que se está estudiando o tratando, para poder evaluar una posible enfermedad, lesión o efectividad de un tratamiento médico. El área de la medicina encargada de llevar a cabo este proceso es el Diagnóstico por Imágenes (DxI).

El riesgo de rotura de los UIAs se evalúa principalmente en función de su tamaño y localización. Por lo tanto, la angiografía y las imágenes anatómicas del aneurisma intracraneal son cruciales para su diagnóstico [26].

1.4.1 Tipos de angiografías

La angiografía por sustracción digital (*Digital Subtraction Angiography*, DSA), una técnica de fluoroscopia que utiliza contraste yodado, se utiliza para obtener imágenes de los vasos sanguíneos intracraneales sin los tejidos circundantes, ya que se eliminan mediante sustracción digital. Gracias a su alta resolución espacial, especificidad y sensibilidad, la DSA es el patrón de oro para la obtención de imágenes de UIAs y puede determinar sus características morfológicas, como su tamaño, el diámetro del cuello y su delineación. El desarrollo de la angiografía rotacional 3D (*Three Dimensional Rotational Angiography*, 3DRA) mejoró la resolución espacial de la DSA, ya que la reconstrucción 3D ayuda a evitar errores de imagen relacionados con la superposición de estructuras vasculares, permitiendo la visualización de UIAs pequeños. Sin embargo, la DSA sigue siendo invasiva y existen raras complicaciones debidas al uso de dispositivos intraarteriales y agentes de contraste yodados durante la angiografía por catéter.

Se han desarrollado varias técnicas de imagen no invasivas, como la angiografía por tomografía computarizada (*Computed Tomography Angiography*, CTA). La especificidad y sensibilidad de la CTA son casi tan buenas como las de la DSA. Sin embargo, la CTA es una mala elección para la detección de pequeños UIAs localizados cerca del hueso craneal, ya que los rayos ionizantes son absorbidos casi por igual por los agentes de contraste yodados y cálcicos.

A diferencia de la CTA y la DSA, la angiografía por resonancia magnética (*Magnetic Resonance Angiography*, MRA) se realiza sin rayos X. Las secuencias de MRA, como la MRA de tiempo de vuelo (ARM-TF) o el eco de gradiente de adquisición rápida con magnetización preparada no mejorada (*Magnetization Prepared Rapid Gradient Echo*, MPRAGE), no requieren agentes de contraste, por lo que se considera el método menos invasivo hasta la fecha. La MRA sin contraste ha cobrado interés en la última década debido al conocido riesgo para la salud de los agentes yodados. Evitar usar agentes de contraste o disminuir su uso genera una mejora considerable en el postoperatorio y en el tiempo de recuperación, ya que tiene efectos secundarios dependiendo del agente utilizado. Estos efectos secundarios pueden ser moderados, como náuseas o vómitos, hasta severos, como dificultad para respirar o hinchazón de ciertas partes del cuerpo [27].

Todas estas imágenes morfológicas de UIAs, con sus ventajas e inconvenientes, resumidos en la **Tabla 1.1**, tienen una resolución espacial milimétrica que es suficiente para su detección y su caracterización morfológica y el riesgo de rotura.

En los últimos años se ha hecho evidente que existen otros factores implicados en esta complicación, como la complejidad del flujo sanguíneo o la inflamación. Estos descubrimientos

recientes han llevado al desarrollo de nuevas herramientas de imagen de UIAs, como la imagen de la pared vascular o la resonancia magnética molecular, para visualizar la inflamación en el lugar del aneurisma en modelos humanos y animales.

Tabla 1.1. Técnicas de imagenología de aneurismas intracraneales.

| Imágenes morfológicas de UIAs | | |
|---|---|--|
| Características de las imágenes | Principio de funcionamiento | Observaciones |
| Angiografía rotacional (3DRA): Lumen de las arterias sin tejido alrededor | Pre y post adquisición rotacional por contraste | <ul style="list-style-type: none"> • Gran resolución espacial, mejor especificidad, sensibilidad, descripción de AI pequeños • Requiere de agente ionizante • Método invasivo (catéter) |
| CTA clásica: Lumen de las arterias en hiperintensidad con el tejido alrededor | Principio de la tomografía | <ul style="list-style-type: none"> • Requiere agente ionizante • Artefactos debido a la señal de los huesos (puede ser extraída mediante <i>software</i>) • No es invasiva |
| CTA de energía dual: Lumen de las arterias en hiperintensidad con contraste mejorado con el tejido alrededor | Mismo principio que la CTA clásica, pero emite rayos X de distintas energías | <ul style="list-style-type: none"> • Requiere agente ionizante • Remueve automáticamente la señal de los huesos • No es invasiva |
| Angiografía por tiempo de vuelo: Lumen de las arterias en hiperintensidad con el tejido alrededor | Bajo pulsos de radiofrecuencia repetitivos, los tejidos estáticos pasan por una saturación magnética a diferencia de la sangre circulante | <ul style="list-style-type: none"> • Libre de radiación ionizante y utilizar un agente de contraste • Técnica menos invasiva • Artefactos debido al flujo anormal de sangre • Resolución espacial más baja cuando se compara con la CTA y el DSA |
| Angiografía con contraste de gadolinio: Lumen de las arterias en hiperintensidad con el pasaje del contraste | Secuencias de resonancia magnética sensibles al gadolinio | <ul style="list-style-type: none"> • Libre de radiación ionizante • Resolución espacial más baja comparada con la CTA y el DSA |
| Tomografía de coherencia óptica: Disrupción de capas en una imagen transversal en 2D de las arterias | Propiedades reflectivas de los tejidos cerca de la luz infrarroja | <ul style="list-style-type: none"> • Se requiere un catéter • Gran resolución espacial, en el orden de los μm |

Cabe destacar una técnica llamada *4D-Flow* [28] que hace referencia a las imágenes de resonancia magnética (*Magnetic Resonance Imaging*, MRI) adquiridas mediante una secuencia retrospectiva de angiografía de contraste de fase, en la cual se obtienen datos de la velocidad de la sangre en las tres direcciones, en un espacio de tres dimensiones y a través de todo el ciclo

cardiaco. Con las imágenes obtenidas mediante *4D Flow* se puede evaluar de forma cuantitativa la dinámica regional y global del flujo sanguíneo con medidas hemodinámicas, tales como:

1. velocidad promedio, máxima y mínima,
2. flujo latido promedio, flujo de avance y regurgitante¹,
3. volumen de eyección,
4. y aproximaciones matemáticas a los gradientes de presión y fuerzas de cizallamiento en las paredes de los vasos.

Además, permite analizar cualitativamente la evolución temporal de los complejos patrones de flujo sanguíneo por medio de líneas de flujo, trazadores de partículas, gráficas de velocidad 3D y vectores; representaciones que describen la trayectoria de la sangre, a través del tiempo, en el sistema cardiovascular. Estas características permiten que la técnica tenga muchas aplicaciones potenciales en la práctica clínica, ya que brindan al especialista información valiosa sobre la función y el estado del sistema cardiovascular del paciente.

1.5 ESQUEMA DEL PROYECTO

El Capítulo 2 aborda los aspectos fundamentales del comportamiento mecánico de los aneurismas cerebrales, analizando tanto las propiedades de la sangre como las del tejido arterial. Se caracteriza a la sangre como un fluido no newtoniano y se presentan distintos modelos que permiten describir su comportamiento. En cuanto al tejido arterial, se estudia su composición estructural, introduciendo conceptos clave para entender su respuesta mecánica, como la hiperelasticidad y anisotropía.

El Capítulo 3 se centra en la dinámica del flujo sanguíneo en aneurismas intracraneales. Comienza con una descripción del modelo hemodinámico, detallando la formulación matemática del flujo, la construcción de los dominios computacionales y la definición de las condiciones de contorno fisiológicas. Se analizan los principales indicadores hemodinámicos, como el esfuerzo cortante en la pared y el índice de oscilación, vinculados a la evolución del aneurisma. Además, se explica la implementación del modelo en OpenFOAM y se discuten los resultados obtenidos, resaltando las limitaciones de asumir una pared arterial rígida.

En el Capítulo 4, se introducen conceptos básicos de mecánica del continuo y elementos finitos, que permiten desarrollar un modelo estructural de la pared arterial. Se exploran distintos modelos constitutivos y se analiza el estado pretensionado, crucial para obtener predicciones realistas. Se opta por implementar el algoritmo de Sellier, que estima el estado libre de tensiones mediante un enfoque geométrico, y se valida su aplicación con un caso experimental.

El Capítulo 5 presenta la metodología empleada para el acoplamiento fluido-estructura (FSI) utilizando la biblioteca preCICE. Se describen sus funciones principales, como el mapeo de datos y los esquemas de acoplamiento. Luego, se aplica la metodología a un caso de referencia, detallando el proceso de simulación FSI y validando los resultados obtenidos frente a estudios previos.

El Capítulo 6 expone el análisis de un caso específico de aneurisma cerebral, integrando las herramientas desarrolladas. Se describe la preparación del caso para su simulación FSI, identificando zonas críticas a partir del WSS. Además, se comparan los resultados obtenidos al considerar la pared tanto rígida como deformable, y se analiza el impacto de incluir el estado pretensionado en la simulación.

Finalmente, el Capítulo 7 reúne las conclusiones del proyecto. A continuación, se presentan los anexos y la bibliografía consultada.

La **Figura 1.5** ilustra de forma esquemática los principales temas abordados en cada capítulo.

¹ En medicina, se refiere al flujo retrógrado de un líquido o sustancia, en contraposición al curso normal de su movimiento

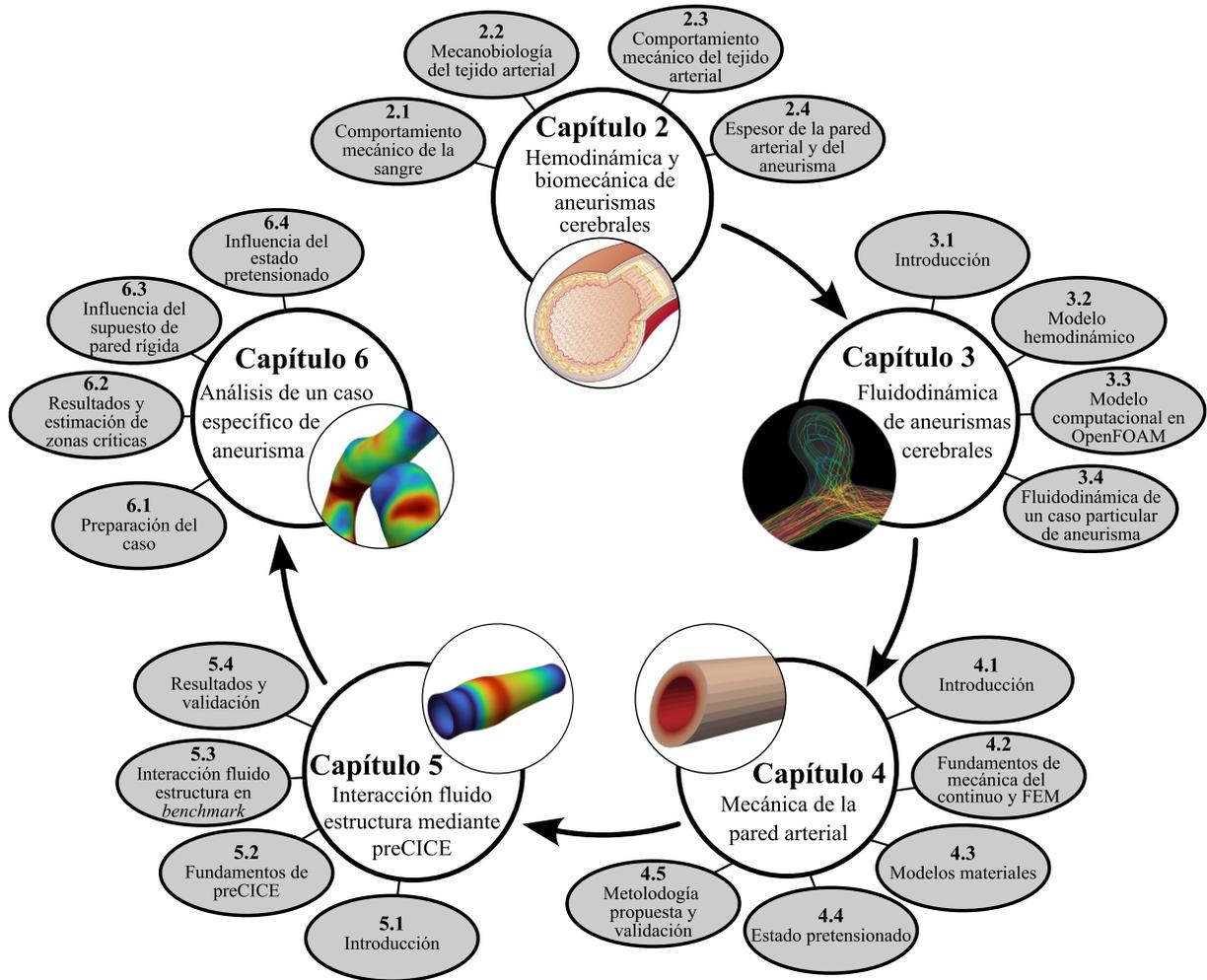


Figura 1.5. Esquema del proyecto final integrador.

CAPÍTULO 2 HEMODINÁMICA Y BIOMECÁNICA DE ANEURISMAS CEREBRALES

En este capítulo se describen las propiedades estructurales del tejido arterial y de la sangre desde una perspectiva biomecánica, con el objetivo de poner en evidencia la complejidad de la pared arterial, tanto en su morfología como en su comportamiento mecánico. Lejos de ser un material homogéneo y lineal, la pared arterial está compuesta por varias capas con distintas funciones, cuya respuesta ante cargas mecánicas varía dependiendo de su estructura, estado fisiológico y posibles alteraciones patológicas, como en el caso de los aneurismas.

A lo largo del capítulo se abordarán:

- las propiedades mecánicas de la sangre, incluyendo su comportamiento reológico (Sección 2.1),
- la estructura y composición del tejido arterial, detallando las distintas capas que conforman la pared arterial y los principales componentes que le otorgan sus propiedades mecánicas, como la elástica y el colágeno (Sección 2.2),
- el comportamiento mecánico del tejido arterial y de los aneurismas, analizando su respuesta ante esfuerzos (Sección 2.3), y
- la variación de espesor entre la pared arterial sana y la pared aneurismática (Sección 2.4).

2.1 COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LA SANGRE

La sangre constituye aproximadamente el 7% del peso total del cuerpo humano y su densidad es aproximadamente 1054 kg/m^3 . Es un tejido líquido circulante y complejo, compuesto por varios tipos de componentes sólidos (células o corpúsculos), que conforman alrededor del 45% de su volumen, suspendidos en un medio fluido conocido como plasma, el cual ocupa aproximadamente el 55% del volumen total de la sangre (equivalente a entre 2.7 y 3 litros en una persona sana). Los componentes sólidos están conformados por glóbulos rojos, glóbulos blancos y plaquetas, distribuidos en una proporción de 95% de glóbulos rojos, 0.13% de glóbulos blancos y alrededor del 4.9% de plaquetas. El porcentaje de volumen de glóbulos rojos en esta mezcla es conocido como hematocrito.

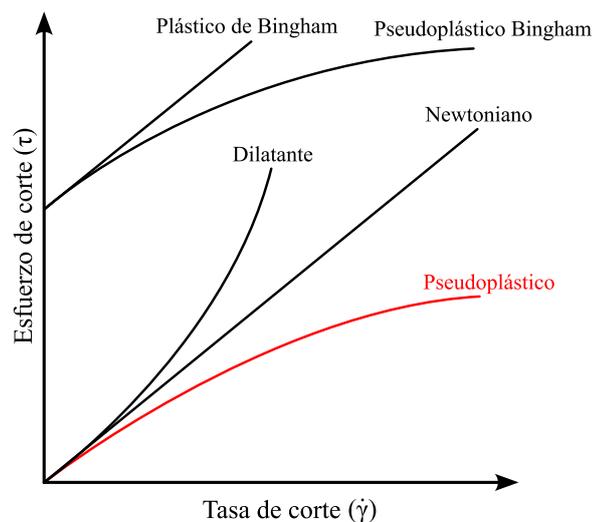


Figura 2.1. Diferentes tipos de fluidos según la relación entre el esfuerzo de corte τ y la tasa de corte $\dot{\gamma}$.

La viscosidad de la sangre es una propiedad importante y depende de varios factores: la viscosidad del plasma (incluyendo las proteínas que contiene), el nivel de hematocrito, la

temperatura, la tasa de corte y el estrechamiento de los vasos por los que la sangre fluye. Mientras que el plasma se comporta de manera aproximadamente newtoniana por su elevado contenido de agua, la sangre es un fluido no newtoniano. Este comportamiento se debe a que su viscosidad disminuye con el aumento de la tasa de corte, lo que se denomina adelgazamiento por cizallamiento, una característica típica de los fluidos no newtonianos pseudoplásticos (ver **Figura 2.1**). Además, el estrechamiento del diámetro de los vasos sanguíneos afecta la viscosidad de la sangre, una dependencia conocida como el efecto Fahraeus-Lindqvist².

Por otro lado, aunque la sangre contiene varios tipos de células, la presencia de glóbulos blancos y plaquetas no tiene un impacto significativo en su viscosidad, ya que están presentes en proporciones muy pequeñas en comparación con los glóbulos rojos.

La viscosidad del plasma varía entre 1.1 y 1.6 cP³, dependiendo de su composición proteica, mientras que la viscosidad de la sangre con un hematocrito fisiológico de 45% es de aproximadamente 3.2 cP. La viscosidad aumenta con el hematocrito, por ejemplo, a un nivel de 60%, la viscosidad relativa de la sangre alcanza un valor cercano a 8 cP (**Figura 2.2**). Además, la viscosidad de la sangre aumenta con la disminución de la temperatura, incrementándose en aproximadamente un 2% por °C.

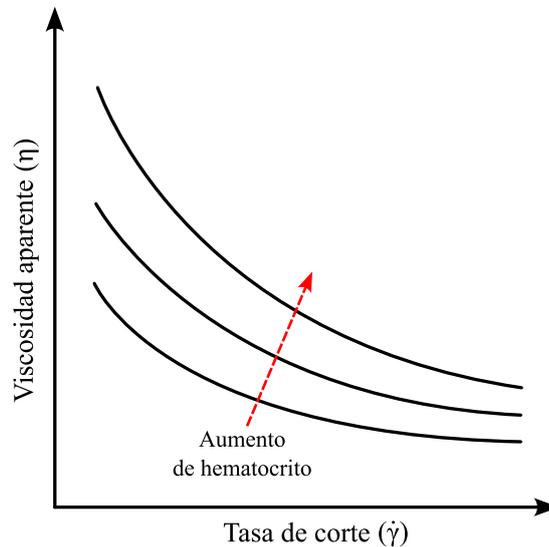


Figura 2.2. Dependencia de la viscosidad aparente de la sangre η con la tasa de corte $\dot{\gamma}$ y su relación con el hematocrito.

La relación entre la viscosidad y la tasa de flujo en los vasos sanguíneos es compleja, y está influenciada por el esfuerzo de corte τ y la tasa de corte $\dot{\gamma}$. En fluidos newtonianos, τ es linealmente proporcional a $\dot{\gamma}$, y la pendiente de esta relación es la viscosidad μ . Sin embargo, para la sangre en su conjunto, la relación es más compleja debido a la estructura de las células en suspensión. En reposo, y a partir de un hematocrito mínimo del 5-8%, las células sanguíneas forman una estructura continua que requiere de un esfuerzo específico, conocido como esfuerzo de fluencia τ_y , para romperse y transformarse en una suspensión de agregados en el plasma. Este esfuerzo de fluencia también depende de la concentración de proteínas plasmáticas, en particular del fibrinógeno. Una expresión empírica para el esfuerzo de fluencia es

$$\sqrt{\tau_y} = (H - 0.1)(C_F + 0.5), \quad (2.1)$$

² Para ver más consultar [29].

³ cP: centipoise, unidad de medida de viscosidad dinámica. 1 cP = 0.01 Poise. 1 Poise = 0.1 N·s/m² en el sistema internacional de unidades.

donde H es el hematocrito expresado como fracción y C_F es la concentración de fibrinógeno en gramos por cada 100 ml, con valores entre 0.21 y 0.46. En una sangre con un hematocrito de 45%, el esfuerzo de fluencia oscila entre 0.01 y 0.06 dyn/cm²⁴.

Una vez superado este esfuerzo de fluencia, la estructura celular de la sangre se transforma a medida que aumenta la tasa de corte. A tasas de corte bajas ($\dot{\gamma} < 50 \text{ s}^{-1}$), los glóbulos rojos forman agrupaciones conocidas como *rouleaux*, que se desintegran progresivamente en células individuales al incrementar la tasa de corte, hasta aproximadamente 200 s⁻¹. A partir de este punto, no se observan cambios estructurales adicionales con el aumento de la tasa de corte.

Para la sangre completa, a bajas tasas de corte ($\dot{\gamma} < 200 \text{ s}^{-1}$), la relación entre el esfuerzo de corte y la tasa de corte es no lineal, lo que indica un comportamiento no newtoniano. Este rango de corte bajo es típico de los flujos en arterias pequeñas y capilares. En cambio, a tasas de corte altas ($\dot{\gamma} > 200 \text{ s}^{-1}$), como en arterias grandes, la relación entre τ y $\dot{\gamma}$ es lineal, y la viscosidad se aproxima a un valor constante de alrededor de 3.5 cP. Dado que la sangre se comporta como un fluido no newtoniano con esfuerzo de fluencia, la pendiente de la curva de esfuerzo de corte-tasa de corte, en cualquier punto, se define como la viscosidad aparente de la sangre en ese punto η , la cual varía según la tasa de corte presente (**Figura 2.3**).

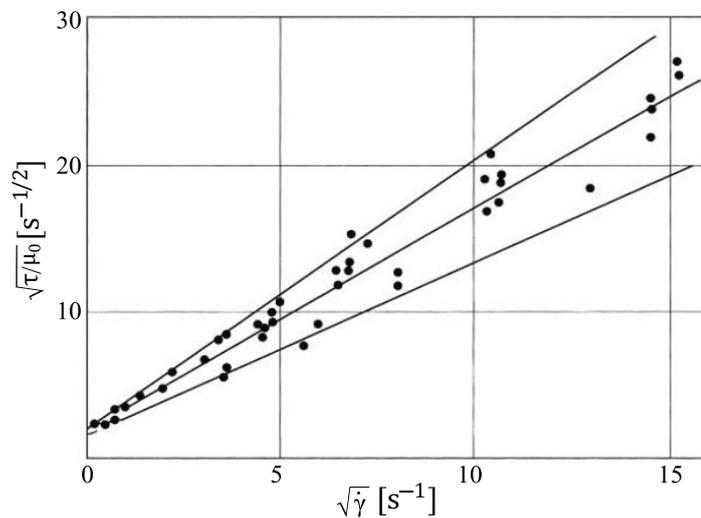


Figura 2.3. Esfuerzo cortante en función de la tasa de corte para el flujo sanguíneo. μ_0 es la viscosidad del plasma o newtoniana. Adaptada de [29].

2.2 MECANOBIOLOGÍA DEL TEJIDO ARTERIAL

Los principales componentes de las arterias y los UIAs que soportan las cargas debidas al flujo sanguíneo son la elastina y el colágeno. La elastina aporta una alta extensibilidad, permitiendo que la arteria se deforme fácilmente bajo presiones normales. Las fibras de colágeno presentan una configuración ondulada cuando no están cargadas. A medida que la arteria se estira, éstas se enderezan, lo que se conoce como reclutamiento de fibras, y comienzan a soportar carga, aumentando la rigidez del tejido. Esta combinación permite que las arterias sean flexibles ante pequeñas deformaciones y, al mismo tiempo, resistentes ante grandes cargas.

El tejido de las paredes arteriales se compone principalmente de tres capas diferentes: íntima, media y adventicia. La íntima es la capa más interna de la pared arterial, normalmente más delgada que las demás. Está en contacto directo con el flujo sanguíneo dentro del vaso, es decir, con el lumen, y está compuesta por una monocapa de células endoteliales (*endothelial cells*, EC) asentadas sobre una lámina basal. La media, capa intermedia de la arteria, contiene principalmente células musculares lisas (*smooth muscle cells*, SMC) y fibras de colágeno y

⁴ dyn/cm²: dina por centímetro cuadrado, unidad de esfuerzo o presión. 1 dyn/cm² = 0.1 Pa.

elastina como componentes estructurales. La adventicia es la capa más externa y está constituida principalmente por fibras de colágeno, fibroblastos y sustancia fundamental.

Las arterias pueden clasificarse como elásticas o musculares, y ambas están compuestas por las tres capas mencionadas anteriormente. Sin embargo, las principales diferencias son su tamaño y algunos aspectos de su constitución. Las arterias musculares tienen diámetros que oscilan entre 0.3 y 10 mm, mientras que las arterias elásticas, más próximas al corazón, como la aorta, tienen un diámetro mayor. En cuanto a su constitución, las arterias elásticas presentan varias membranas elásticas, denominadas láminas elásticas, compuestas de elastina y dispuestas de forma concéntrica a lo largo de la capa media. En cambio, en la capa media de las arterias musculares, estas láminas son casi inexistentes, pero aparecen como dos estructuras prominentes que separan la media de la íntima y la adventicia. En este caso, se denominan láminas elásticas interna (*internal elastic lamina*, IEL) y externa, respectivamente.

Las arterias cerebrales se clasifican como arterias musculares con una constitución similar a la descrita anteriormente, aunque existe una diferencia importante entre la estructura de las arterias cerebrales y otras arterias musculares. Mientras que la íntima y la media están claramente separadas en las arterias cerebrales por la IEL, no existe una separación clara entre la media y la adventicia a través de la lámina elástica externa (ver **Figura 2.4**).

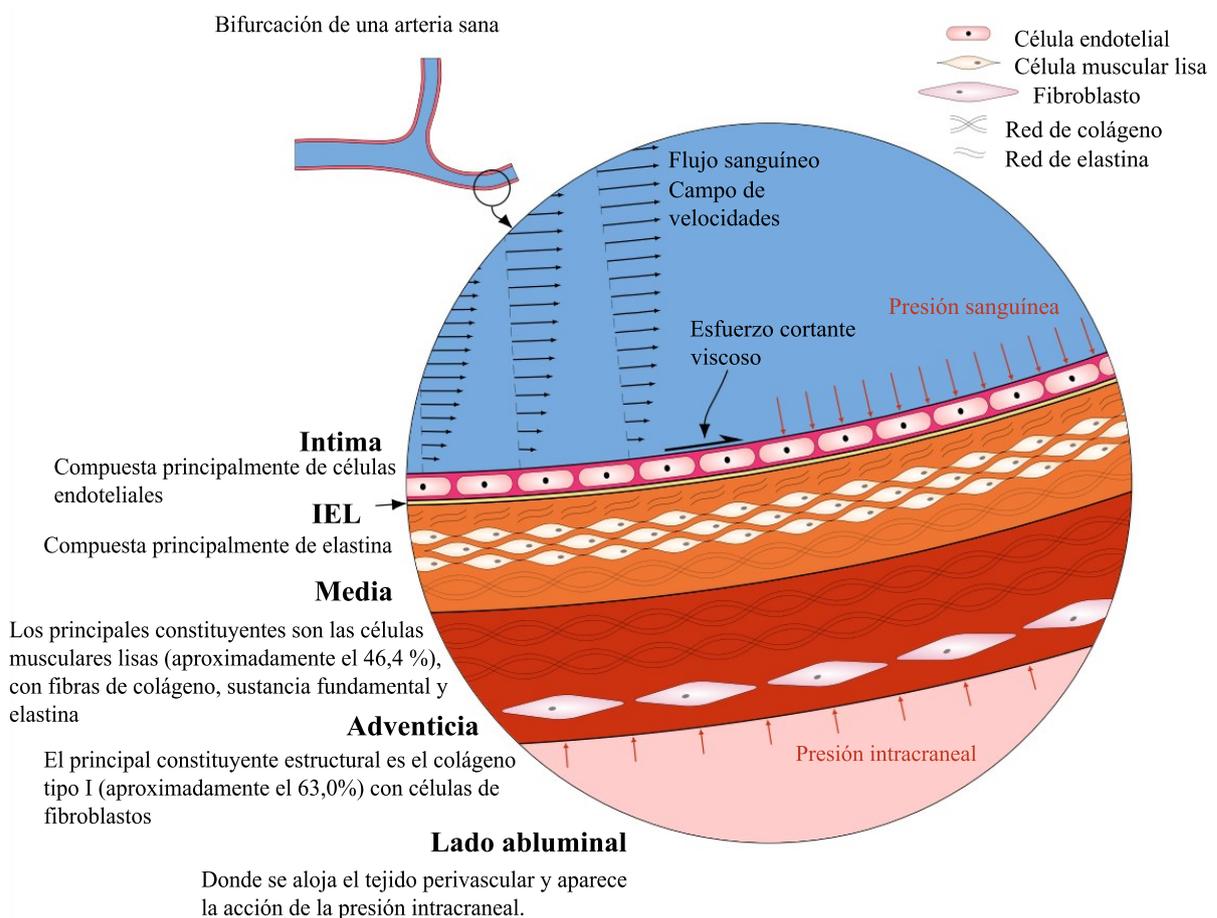


Figura 2.4. Representación esquemática de la estructura y composición celular de una arteria cerebral sana, compuesta principalmente por tres capas y el IEL también se representan las interacciones de fuerza causadas por el flujo sanguíneo y el entorno perivascular. Además, se muestra la principal fuerza que actúa en la pared arterial (WSS), la presión que actúa sobre la superficie del lumen debida al flujo sanguíneo y la presión que actúa externamente a los vasos conocida como presión intracraneal. Traducida y adaptada de [19].

En el caso de los aneurismas saculares, estas dilataciones localizadas en la pared arterial presentan una alteración estructural. Es común que en esta zona falte parcial o completamente

la capa media y la IEL, lo que debilita el comportamiento mecánico del vaso. En ese caso, la pared del aneurisma se compone principalmente por las capas íntima y adventicia, que suelen encontrarse engrosadas y hialinizadas⁵. Esta estructura implica una menor capacidad para soportar las cargas hemodinámicas, lo que contribuye a su vulnerabilidad frente a la expansión y eventual rotura. La **Figura 2.5** compara la composición estructural del aneurisma frente a la de una arteria sana.

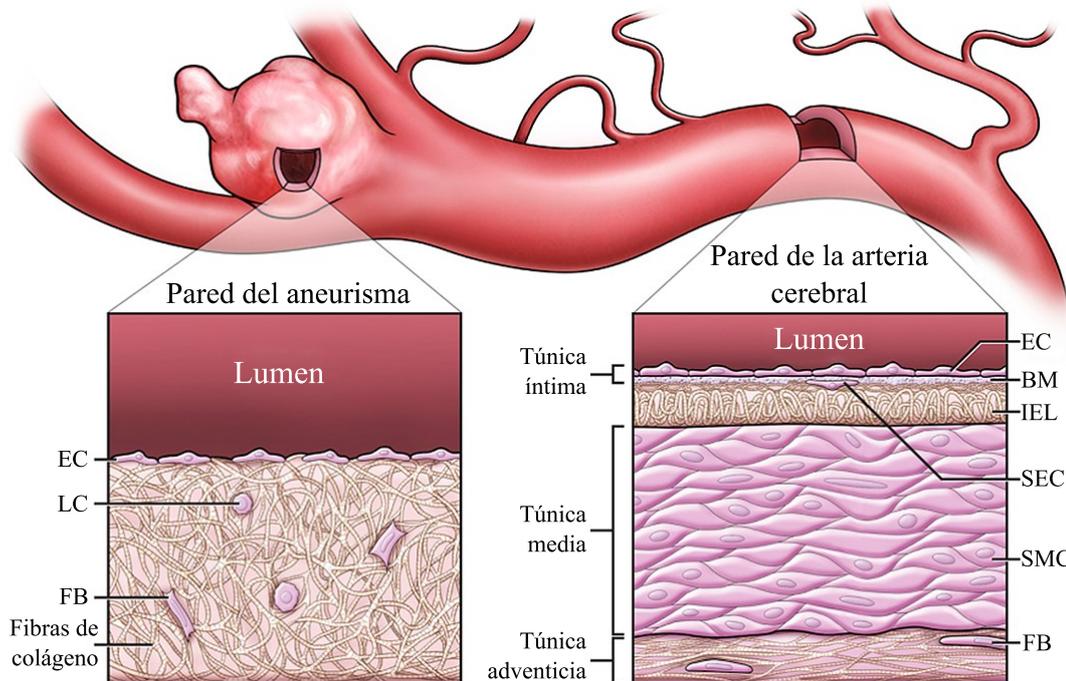


Figura 2.5. Diferencias en la composición estructural y molecular de un aneurisma cerebral y la arteria cerebral madre. La pared del aneurisma contiene fibras de colágeno como componente estructural dominante, con pérdida de las características típicas de la pared arterial, como la IEL y las capas de túnica. La arteria cerebral contiene distintas capas organizadas de componentes celulares y de matriz extracelular, sin una proporción significativa de colágeno. Traducida y adaptada de [30].

Cuando hablamos de aneurismas intracraneales, es importante hablar de su ubicación, dentro de la cabeza y las meninges o membranas que la conforman, estas son la duramadre, la aracnoides y la piamadre (ver **Figura 2.6**).

La duramadre es la más externa de las tres membranas meníngeas. Por virtud de su dureza, sirve para proteger el tejido nervioso subyacente. También protege a los nervios craneales, formando una vaina que recubre cada uno de ellos durante una breve distancia mientras atraviesa su orificio correspondiente en el cráneo y a cada una de las raíces nerviosas espinales. En el cráneo, la hoz del cerebro, que es una lámina vertical de duramadre entre los hemisferios cerebrales, y el tentorio del cerebelo, que corresponde a una lámina horizontal que se proyecta entre el cerebro y el cerebelo, sirven para limitar los movimientos excesivos del cerebro en el interior del cráneo. La duramadre cubre la aracnoides y la piamadre, las otras dos meninges que protegen el sistema nervioso central.

La aracnoides es una membrana delicada e impermeable que recubre el cerebro y que se sitúa entre la piamadre internamente y la duramadre externamente. En este espacio es donde se encuentran los vasos sanguíneos que se asientan sobre la piamadre y está inmerso de líquido cefalorraquídeo. Está separada de la duramadre por un espacio virtual, el espacio subdural, relleno de una película de líquido. Se separa de la piamadre por el espacio subaracnoideo, que está lleno de líquido cefalorraquídeo. Este líquido sale del interior del sistema ventricular

⁵ La hialinización es un proceso patológico en el que los tejidos corporales adquieren una apariencia homogénea y vítrea debido a la acumulación de material hialino.

cerebral a través de orificios en el techo del cuarto ventrículo y, de este modo, penetra en el espacio subaracnoideo. Desde este lugar, circula tanto hacia arriba sobre las superficies de los hemisferios cerebrales, como hacia abajo, alrededor de la médula espinal. Además de la eliminación de los productos de desecho producidos por la actividad neuronal, el líquido cefalorraquídeo proporciona un medio líquido en el que flota el cerebro. Este mecanismo protege al cerebro de los traumatismos de manera efectiva. Además, en la actualidad se cree que desempeña un papel en el transporte hormonal.

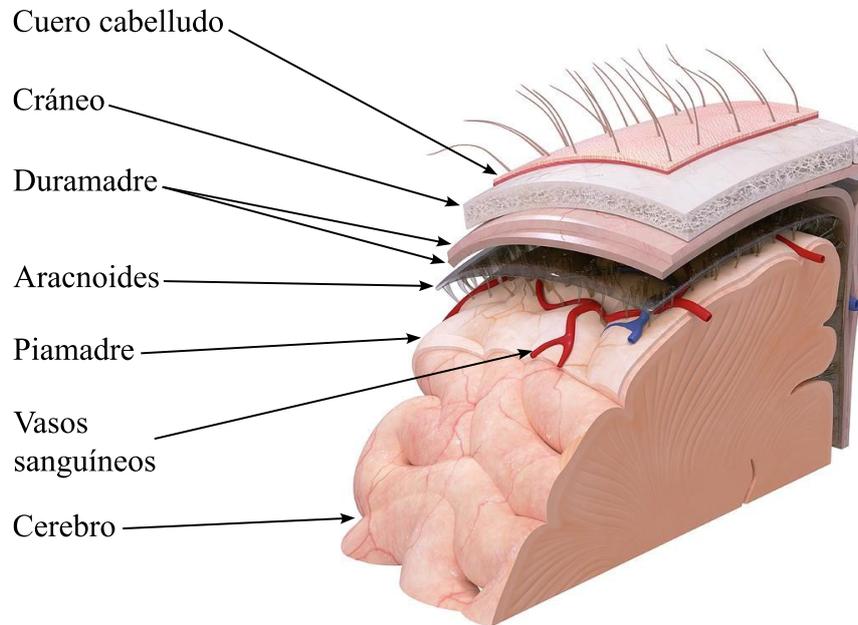


Figura 2.6. Principales capas componen que dividen a la cabeza (*Science Photo Library*, 2018).

Por último, la piamadre es una membrana vascular recubierta de células mesoteliales aplanadas. Recubre estrechamente al cerebro, tapizando las circunvoluciones y descendiendo a los surcos más profundos, soportando al cerebro y a la médula espinal.

A lo largo de este proyecto se utilizarán los términos proximal y distal para describir las porciones relativas a lo largo del vaso sanguíneo. Se denomina proximal a la región más cercana al origen del flujo sanguíneo, generalmente más cerca del corazón, mientras que distal hace referencia a las zonas más alejadas, en la dirección del flujo. Esta terminología reemplaza términos como “aguas arriba” y “aguas abajo” para mantener consistencia con el lenguaje médico.

2.3 COMPORTAMIENTO MECÁNICO DEL TEJIDO ARTERIAL

Fung [31] presentó resultados experimentales sobre el comportamiento mecánico del colágeno y sus curvas típicas de tensión-deformación (**Figura 2.7**). La curva es principalmente no lineal para pequeñas deformaciones y presenta una región aproximadamente lineal con alta rigidez. Este aumento de la rigidez se debe al alargamiento de las fibras de colágeno cuando están cargadas, alcanzando un máximo justo antes del fallo.

Los tejidos blandos, como los vasos sanguíneos, presentan un comportamiento similar al del colágeno. Además, los tejidos blandos comparten un conjunto de propiedades mecánicas características que se manifiestan bajo condiciones fisiológicas normales. Estos tejidos tienen una relación tensión-deformación no lineal, lo cual es una propiedad intrínseca del tejido y está directamente relacionada con su microestructura.

Bajo cargas cíclicas, los tejidos blandos exhiben histéresis, es decir, una diferencia entre las curvas de carga y descarga debida a la disipación de energía interna. También muestran fenómenos viscoelásticos como la relajación de tensiones⁶ y la fluencia⁷.

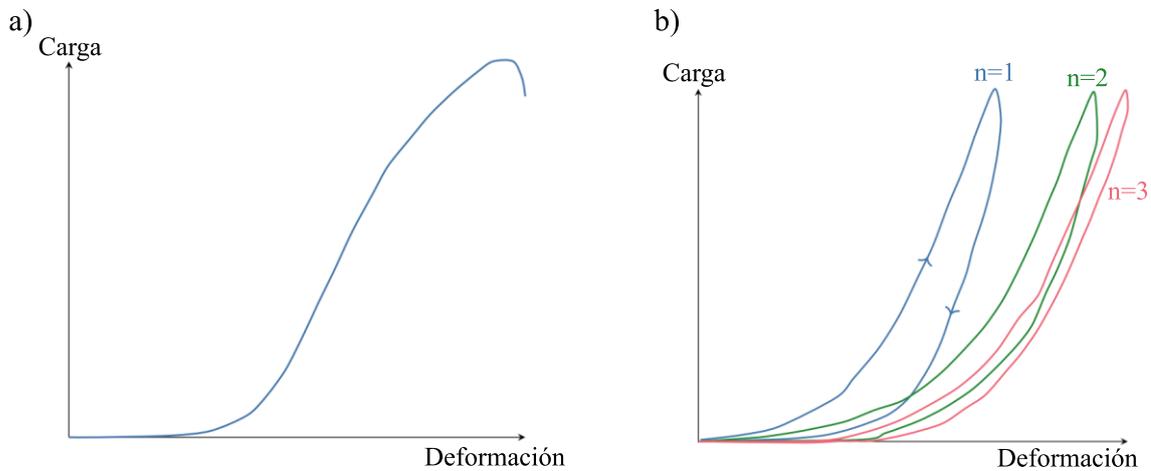


Figura 2.7. Características principales del comportamiento mecánico del colágeno. a) Curva típica de tensión-deformación, que evidencia su naturaleza no lineal. b) Representación de los fenómenos de histéresis y preconditionamiento observados durante ensayos cíclicos de carga y descarga. En esta gráfica, n representa el número de ciclos aplicados. Se observa que, con el aumento del número de ciclos, las curvas se aproximan progresivamente, indicando una estabilización en la respuesta mecánica del colágeno. Traducida y adaptada de [19].

Otra característica relevante es el reblandecimiento por tensión, por el cual el tejido pierde rigidez tras los primeros ciclos de carga. Para estabilizar su respuesta mecánica, se realiza un proceso conocido como preconditionamiento, que consiste en aplicar varios ciclos de carga-descarga hasta alcanzar un “estado estacionario”, donde las curvas tensión-deformación dejan de variar entre ciclos consecutivos. En la **Figura 2.7b** se ejemplifica este comportamiento mediante un ensayo de preconditionamiento, donde se observa la evolución del ciclo de histéresis en los primeros tres ciclos.

Tanto las arterias elásticas como musculares presentan estas características. Sin embargo, tras el preconditionamiento, las primeras se comportan casi de forma puramente elástica, mientras que las arterias musculares presentan un comportamiento viscoelástico. No obstante, ambas suelen modelarse normalmente como pseudoelásticas, lo que permite aplicar leyes elásticas en diferentes porciones del ciclo carga-descarga. Además, las arterias se consideran en general como materiales incompresibles.

Scott et al. [32] estudiaron la respuesta mecánica del tejido en UIAs comparando curvas experimentales de presión-volumen entre muestras de UIAs y sus arterias circundantes. Los resultados mostraron que la curva tensión-deformación del tejido aneurismático presentaba una forma similar a la del colágeno, aunque con una distensibilidad⁸ menor, atribuida a la falta de elastina. Por su parte, Steiger et al. [33] realizaron ensayos uniaxiales de tensión-deformación para caracterizar mecánicamente distintas regiones del aneurisma, desde el cuello hasta la cúpula, evidenciando la heterogeneidad de sus propiedades. Encontraron que el módulo elástico era mayor en el cuello (3.1 ± 0.9 MPa) en comparación con el fondo del aneurisma (1.7 ± 0.8 MPa) y las arterias circundantes (2.5 ± 1.1 MPa). Asimismo, el límite elástico fue más bajo en el fondo del aneurisma, lo que concuerda con observaciones clínicas que indican que la rotura se produce normalmente en esta región.

⁶ La relajación de tensiones se refiere a la disminución de la tensión en el tiempo bajo carga constante.

⁷ La fluencia se refiere al aumento de deformación en el tiempo bajo una carga constante.

⁸ La distensibilidad es la capacidad de un tejido para expandirse o estirarse cuando se le aplica una carga.

Robertson et al. [34] analizaron la respuesta mecánica de arterias cerebrales y de tejido aneurismático mediante ensayos de tracción uniaxial. Para ello, ensayaron 15 tiras rectangulares extraídas de la sección meridional de UIAs, y 12 muestras circunferenciales provenientes de arterias del círculo de Willis, específicamente 6 de la arteria basilar (*basilar artery*, BA) y 6 de la arteria carótida interna (*internal carotid artery*, ICA), todas obtenidas de cadáveres humanos (ver **Figura 2.8a**).

La caracterización mecánica de las muestras se realizó ajustando las curvas tensión-deformación con una ley constitutiva de tipo exponencial para materiales isotrópicos. A partir de estas curvas, los autores identificaron ciertas regiones con comportamiento diferenciados (ver **Figura 2.8b**): una primera región cuasilineal de baja rigidez, caracterizada por un módulo elástico bajo E_L ; una zona de transición definida por un estiramiento de transición λ_t ; seguida por una segunda zona de respuesta cuasilineal con mayor rigidez, cuantificada por un módulo E_H ; y finalmente, la rotura del material, identificada por el estiramiento último λ_S y la tensión de rotura de Cauchy σ_S .

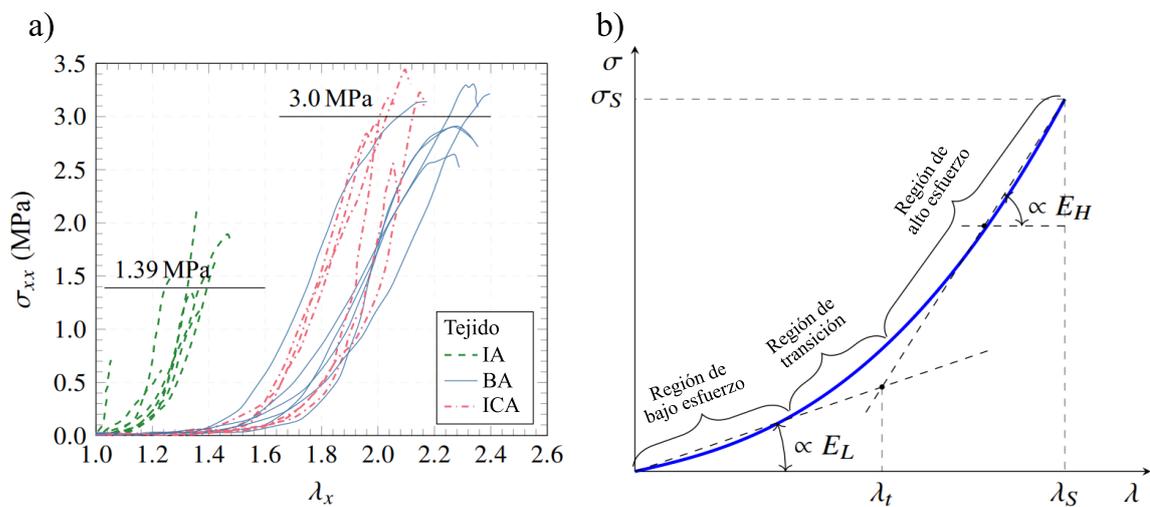


Figura 2.8. a) Curvas uniaxiales de tensión-deformación de las muestras de aneurismas y arterias de control en los experimentos realizados por Robertson et al. [34]. Las barras indican la resistencia al fallo promediada de los aneurismas y las arterias de control. b) Representación esquemática de los parámetros mecánicos definidos y calculados para los tejidos de aneurismas y arterias por Robertson et al. Su cálculo se basa en datos experimentales de ensayos de tracción uniaxial y las líneas que definen las rigideces de bajo y alto esfuerzo fueron calculadas por los autores a partir de regresiones lineales de los puntos recogidos en cada régimen, respectivamente. Traducida y adaptada de [19].

En cuanto a los resultados, la tensión máxima antes del fallo en las arterias de control fue de aproximadamente 3.0 MPa tanto para la ICA como para la BA. En contraste, los tejidos de UIAs alcanzaron una tensión límite promedio de solo 1.39 MPa. Incluso la muestra de aneurisma más resistente fue considerablemente más débil que cualquiera de las arterias de control. Estos resultados ponen en evidencia diferencias mecánicas entre los tejidos normales y los aneurismáticos, lo que refuerza la hipótesis de que la pared del aneurisma tiene una menor capacidad para resistir tensiones mecánicas.

2.4 ESPESOR DE LA PARED ARTERIAL Y DEL ANEURISMA

Una de las causas de rotura de un aneurisma radica en la variación de la estructura de la pared arterial en la región aneurismática. Estas irregularidades se asocian a patologías como la arterioesclerosis o la formación de trombos intraluminales, es decir, coágulos adheridos a la pared del vaso. En este contexto, la falta de información sobre la heterogeneidad, el espesor y

las propiedades mecánicas de la pared aneurismática dificulta la correcta modelización de la respuesta biomecánica de los vasos sanguíneos.

Varios investigadores han estudiado las diferencias en el espesor y en el comportamiento mecánico entre arterias cerebrales y aneurismas, utilizando muestras *post-mortem*, ya que obtener estas mediciones *in vivo* sigue siendo un reto. Cebral et al. [35], por ejemplo, estimaron un espesor promedio de la pared del aneurisma de aproximadamente 0.25 mm, a través de un estudio en el que las muestras fueron ensayadas mecánicamente hasta el fallo. La **Figura 2.9** muestra como las fibras de colágeno se reorientan y alinean ante un esfuerzo axial, comportamiento que explica el carácter no lineal del tejido.

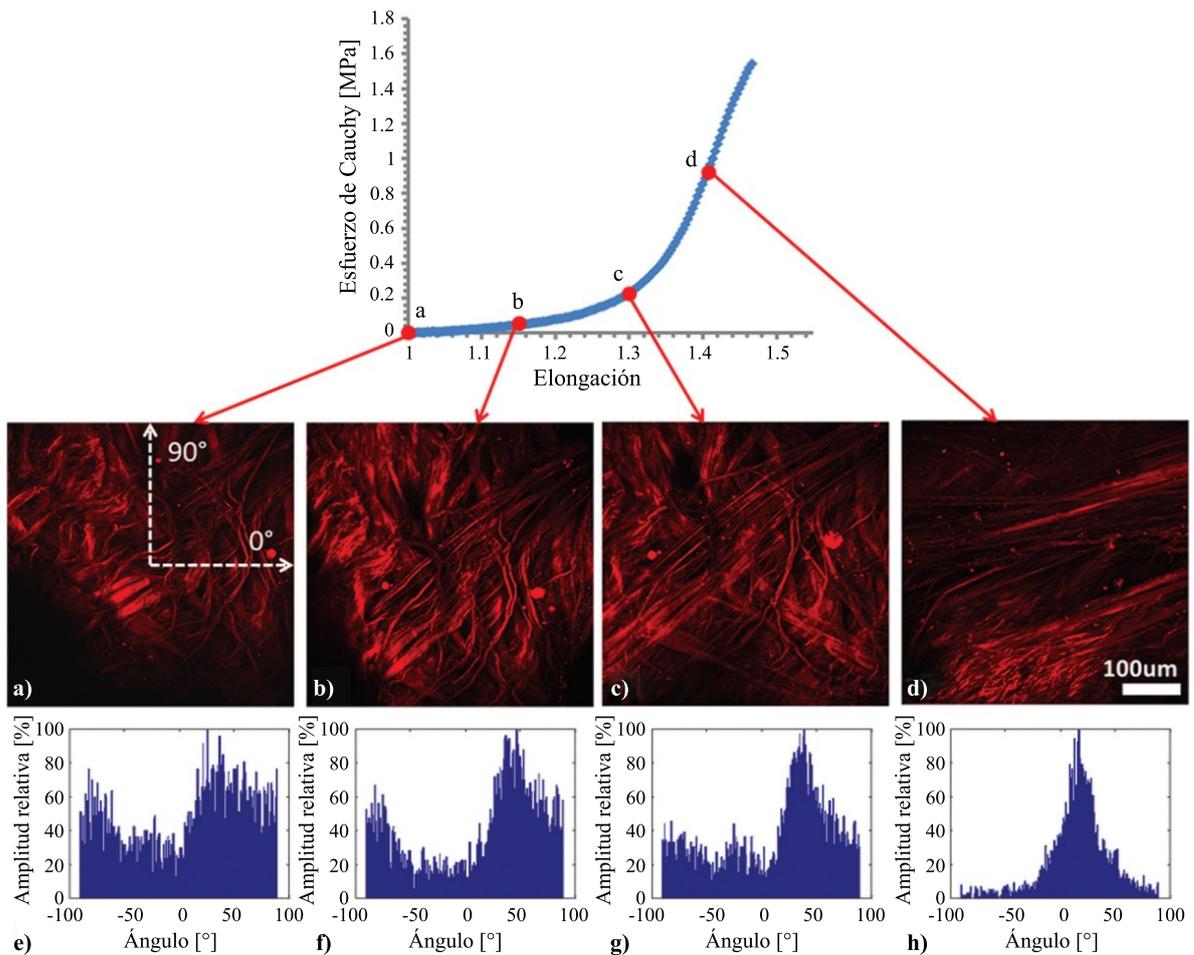


Figura 2.9. Reclutamiento de fibras de colágeno durante la carga uniaxial de la muestra de aneurisma CA26 (verde en Figuras 1-3) obtenida mediante el sistema MPM uniaxial. Las imágenes se obtuvieron a estiramientos de 1.0 (A), 1.15 (B), 1.3 (C) y 1.4 (D) y se formaron a partir de una proyección de pilas sobre una profundidad de tejido de aproximadamente 95 μm . E-H, Histogramas de la distribución de la orientación de las fibras de las imágenes MPM en tramos de 1.0, 1.15, 1.3 y 1.4, respectivamente. La dirección horizontal de la imagen es 0° , y la dirección vertical es 90° (como se muestra en A). Traducida de [35].

Dado que es difícil obtener el espesor de la pared de una arteria o aneurisma sin emplear técnicas invasivas, una alternativa para predecir el espesor es utilizar el parámetro propuesto por Nakagawa y colaboradores [36], denominado relación pared/lumen⁹ (*wall-to-lumen ratio*, WLR), definido como

$$\text{WLR} = \frac{\text{espesor de la pared arterial}}{\text{diámetro del lumen arterial}} \quad (2.2)$$

⁹ Esta relación fue obtenida a partir de mediciones realizadas en pacientes durante procedimientos quirúrgicos, y representa un intento por inferir el espesor de la pared de manera indirecta, a partir de imágenes médicas del lumen.

Durante el procedimiento, los autores midieron el diámetro exterior de diferentes segmentos de arterias intracraneales sanas, mientras que el diámetro interior se midió mediante angiografía con verde de indocianina. Los resultados obtenidos indicaron que, para arterias intracraneales de tamaño medio (con diámetro del lumen entre 2 y 3 mm), la WLR promedio fue de 0.070 ± 0.010 , mientras que para las arterias de gran tamaño (diámetro superior a 3 mm) el valor promedio fue de 0.088 ± 0.012 . Estos valores promedio podrían utilizarse para estimar un valor para el espesor de las paredes de las arterias intracraneales a partir de mediciones del diámetro del lumen obtenidas mediante técnicas de imagen médica.

No obstante, ningún estudio informó del WLR de los UIAs. En cualquier caso, dado que el espesor de la pared del aneurisma es heterogéneo, es probable que la aplicación directa de WLR no sea adecuada ni representativa de su realidad biomecánica.

Otros investigadores [37] realizaron un estudio experimental en el que se midió el espesor de la pared de UIAs mediante resonancia magnética de 7-Tesla (7T). Para validar la precisión de esta técnica, compararon los valores de espesores obtenidos a partir de imágenes de MRI con mediciones histológicas directas extraídas de biopsias de tejido aneurismático. La **Figura 2.10** ilustra esta correlación entre la intensidad de la señal en la imagen de resonancia y el espesor real medido en el tejido.

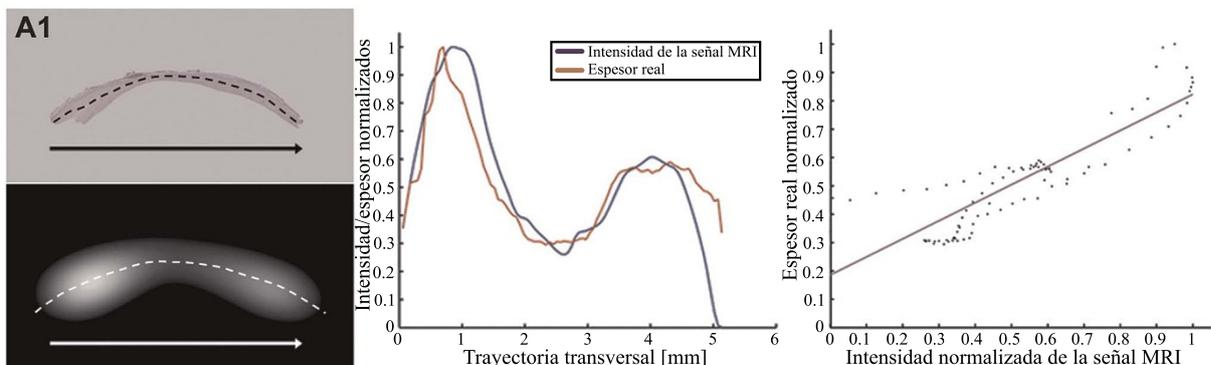


Figura 2.10. Correlación de la variación de la intensidad de la señal y la variación real del grosor en las biopsias de la pared del aneurisma. De izquierda a derecha: dirección del trayecto a través del centro del tejido en la sección histológica (arriba) y en el corte de resonancia magnética (abajo), curvas de intensidad de señal (azul) y grosor real (rojo) tras la normalización, y correlación entre la intensidad de señal y el grosor real. Traducida y adaptada de [37].

Los autores concluyeron que la resonancia magnética de 7T permite visualizar con precisión la morfología de la pared aneurismática, constituyendo así una herramienta prometedora para la estimación no invasiva del grosor de la pared *in vivo*. Sin embargo, esta tecnología aún no está ampliamente disponible en la práctica, donde son más comunes los equipos de MRI de 1.5T o 3T.

Por otro lado, para investigar la heterogeneidad de la pared de UIAs, Signorelli et al. [38] aplicaron una técnica basada en un “dispositivo de indentación” que permite estimar localmente el módulo elástico con una resolución espacial de 1 mm^2 . Los resultados indicaron que la zona de rotura es menos rígida, es decir, con un módulo elástico menor, en comparación con otras regiones del saco aneurismático que mostraron mayor espesor y rigidez. Aunque esta técnica presenta los mismos inconvenientes que los ensayos uniaxiales clásicos, ya que sigue siendo necesario recoger el tejido del aneurisma, parece ser una alternativa prometedora para cuantificar la heterogeneidad de la pared de un aneurisma, lo que permite realizar estudios comparativos con análisis histológicos.

Además de los estudios mecánicos uniaxiales previamente descritos, un estudio [39] realizó un ensayo biaxial sobre tejido resecado de un UIA, con el objetivo de obtener una caracterización integral del comportamiento mecánico del material (ver **Figura 2.11**). En este caso, la muestra, previamente acondicionada, fue sometida a ciclos de carga y descarga a lo largo de los ejes X

e Y a una frecuencia de 1 Hz. A lo largo de estos ciclos, se aplicaron diferentes relaciones de carga entre ambas direcciones, lo que produjo distintas deformaciones, como se aprecia en la **Figura 2.12b**.

Este estudio confirmó algunas de las características ya mencionadas, como la histéresis y el comportamiento no lineal del tejido. Sin embargo, también mostró:

- Anisotropía material, siendo la dirección Y más extensible que la dirección X.
- Acoplamiento direccional, en el cual la deformación en una dirección se ve afectada por la carga aplicada en la dirección perpendicular.
- Relajación de tensiones significativa, especialmente durante los primeros 100 segundos de carga, con una mayor reducción de tensiones observada en la dirección X.

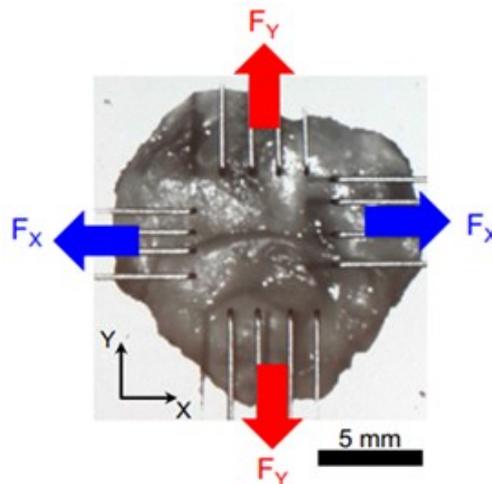


Figura 2.11. Muestra de tejido aneurismático resecado montado en un dispositivo experimental para ensayos de tracción biaxial [39].

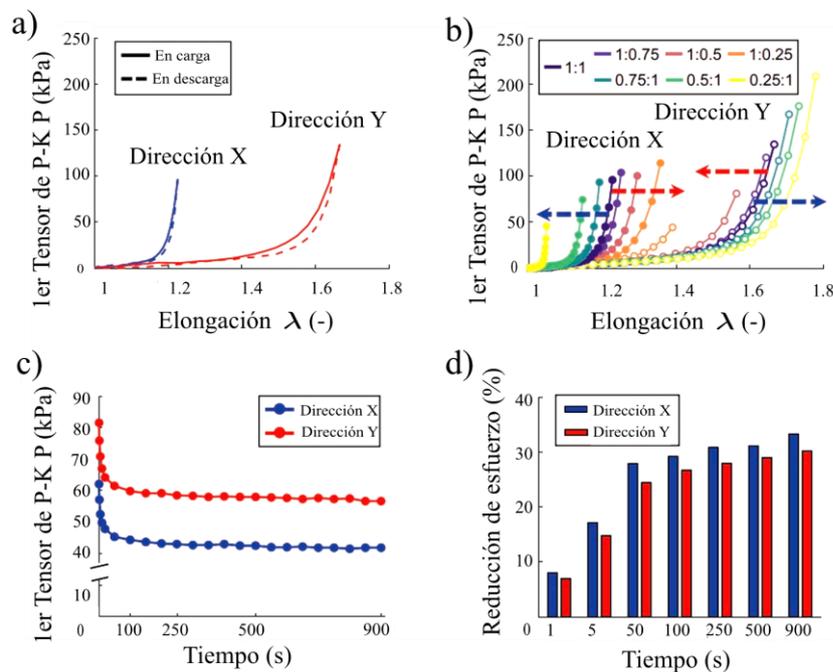


Figura 2.12. Resultados mecánicos del estudio biaxial: a) ciclos de carga y descarga con relación de fuerza y tensión biaxial ($F_x=F_y$); b) deformaciones generadas en distintos protocolos biaxiales; c) evolución temporal de la relajación de tensiones; d) porcentaje de reducción de tensiones en función del tiempo [39].

En conjunto, los estudios experimentales presentados a lo largo de este capítulo ponen en evidencia que la pared arterial, y en particular la de los UIAs, constituye un material complejo

desde el punto de vista biomecánico. Se trata de un tejido no lineal, anisotrópico y heterogéneo, cuyas propiedades mecánicas varían tanto espacialmente como en función de las condiciones de carga. Además, su espesor no es uniforme y puede disminuir significativamente en zonas críticas como la cúpula del aneurisma, dificultando aún más su caracterización *in vivo*.

Finalmente, los resultados presentados en este capítulo resaltan la necesidad de avanzar hacia modelos constitutivos más precisos que incorporen la microestructura del colágeno, morfología local y comportamiento mecánico a nivel tisular. Estos modelos tienen el potencial de ser incorporados en simulaciones computacionales de interacción fluido-estructura, lo que permitiría predecir con mayor fiabilidad la evolución y el riesgo de rotura de aneurismas intracraneales, ofreciendo así herramientas más robustas para la toma de decisiones clínicas.

No obstante, debido a la elevada complejidad del comportamiento mecánico real de estos tejidos, y en el marco de un proyecto final de grado, se optó por realizar ciertas simplificaciones que permiten reducir la carga computacional y enfocarse en los aspectos metodológicos e implementación del *pipeline* de simulación. Por *pipeline* se entiende el conjunto de etapas sistemáticas necesarias para llevar a cabo una simulación de mecánica computacional, las cuales incluyen el modelo vascular, la caracterización del flujo sanguíneo y la visualización de resultados. Bajo este enfoque, se consideró un espesor de pared constante, un modelo material elástico isotrópico de tipo Ciarlet, y una caracterización homogénea del tejido. Estas decisiones no buscan capturar con exactitud el comportamiento local del tejido aneurismático, sino establecer una base funcional y reproducible que permita estudiar fenómenos hemodinámicos relevantes bajo FSI.

El enfoque adoptado permite validar el procedimiento completo, desde el preprocesamiento geométrico hasta el acoplamiento entre dominios de fluido y estructura, y se deja abierta la posibilidad de incorporar mayor complejidad en futuras etapas. Así, este proyecto se enmarca como un primer paso sólido hacia el desarrollo de herramientas computacionales más completas, con el objetivo final de apoyar la evaluación clínica del riesgo de rotura en aneurismas cerebrales.

CAPÍTULO 3 FLUIDODINÁMICA DE ANEURISMAS CEREBRALES

3.1 INTRODUCCIÓN

En el estudio de aneurismas cerebrales, CFD permite analizar parámetros hemodinámicos críticos asociados al desarrollo y posible rotura de estos. Entre ellos, el WSS se ha identificado como un factor relevante para localizar zonas de mayor vulnerabilidad en la región del aneurisma.

Este capítulo está dedicado al análisis del flujo sanguíneo en aneurismas cerebrales mediante simulaciones numéricas basadas en geometrías reales extraídas de la base de datos AneuriskWeb. Las simulaciones se realizaron utilizando el *software* OpenFOAM, una plataforma de código abierto que permite resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en dominios tridimensionales complejos, como los representados por estructuras vasculares extraídas a partir de imágenes médicas.

En esta etapa se considera la hipótesis de pared arterial rígida, con el objetivo de enfocar el análisis en ciertos aspectos relacionados con el modelo hemodinámico: la implementación de distintos modelos de fluido sanguíneo, la definición de condiciones de contorno fisiológicas y la generación de dominios computacionales con la calidad requerida. Esta suposición permite estudiar en detalle los efectos puramente fluidodinámicos sin añadir, por el momento, la complejidad adicional que implica modelar la FSI.

A lo largo del capítulo se describe:

- la preparación del dominio computacional y el mallado del lumen a partir de la base de datos AneuriskWeb,
- la formulación matemática del modelo de flujo y las condiciones de contorno aplicadas (Sección 3.2),
- el algoritmo numérico utilizado en OpenFOAM (Sección 3.3), y
- los resultados obtenidos del análisis de un caso particular (C0034) de la base de datos, incluyendo la evaluación de zonas críticas y la comparación de modelos newtonianos y no newtonianos (Sección 3.4).

3.2 MODELO HEMODINÁMICO

Para llevar a cabo simulaciones de CFD en aneurismas cerebrales, resulta fundamental seguir un procedimiento sistemático conocido como *pipeline*, que permite construir modelos realistas a partir de imágenes médicas. Por lo general, dicha metodología consta de tres etapas principales: a) modelado vascular, b) modelado del flujo sanguíneo y c) visualización del flujo. Cada una de estas fases se representan esquemáticamente en la **Figura 3.1**.

La primera etapa se enfoca en la construcción de un modelo geométrico preciso de la anatomía vascular del paciente, dado que la geometría del aneurisma influye significativamente en los patrones de flujo.

Este proceso comienza con la adquisición de imágenes médicas tridimensionales, como las angiografías rotacionales 3DRA. Éstas proporcionan una vista detallada de las estructuras vasculares, incluyendo el aneurisma y sus vasos. Luego, estas imágenes se filtran para reducir el ruido y mejorar el contraste facilitando la segmentación. Esta etapa permite aislar las estructuras vasculares de interés, como el aneurisma y los vasos circundantes.

Tras la segmentación, se genera una superficie tridimensional (iso-superficie), que representa la morfología de los vasos, conectando puntos con igual intensidad (isovalor). Esta superficie se utiliza para inicializar un modelo deformable, que se refina aplicando fuerzas internas y externas derivadas de los gradientes de intensidad de la imagen original. Las fuerzas internas

suavizan la superficie, mientras que las fuerzas externas ajustan la superficie a los bordes reales de los vasos.

Finalmente, la superficie se optimiza para obtener una superficie de alta calidad y suavidad, apta para generar la malla volumétrica tetraédrica que será utilizada en las simulaciones CFD.

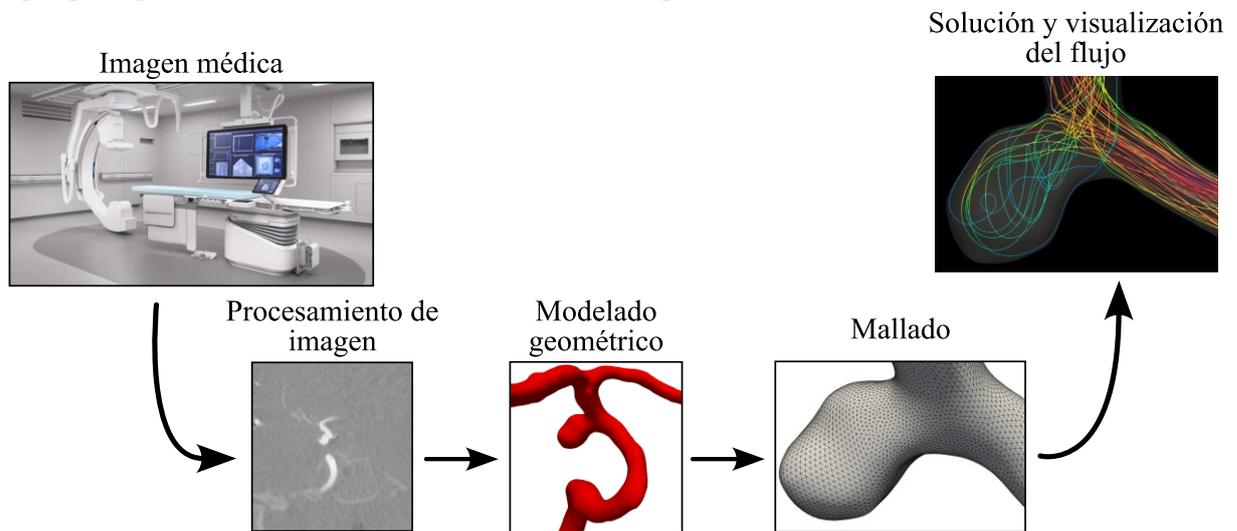


Figura 3.1. Pipeline de modelado CFD basada en imágenes. Se procesa la imagen médica para obtener el modelo geométrico del aneurisma y el árbol arterial, y luego se realiza el mallado volumétrico y la simulación numérica.

3.2.1 Modelo vascular a partir de AneuriskWeb

En este trabajo, la geometría de los aneurismas se toma directamente de la base de datos AneuriskWeb¹⁰, que proporciona modelos tridimensionales segmentados y refinados de aneurismas intracraneales y de sus vasos adyacentes. Esta base de datos fue desarrollada durante el proyecto Aneurisk entre 2005 y 2008, financiado por SIEMENS Medical Solutions y llevado a cabo en el Laboratorio MOX (*Modeling and Scientific Computing*) del Departamento de Matemáticas del Politécnico de Milán, con la colaboración de varias instituciones médicas.

A diferencia de otros estudios que parten del procesamiento directo de imágenes médicas, AneuriskWeb ofrece un conjunto de modelos ya preprocesados. La base de datos contiene 103 casos correspondientes a 99 pacientes. Específicamente, para cada caso, se proporcionan:

- la superficie 3D segmentada del lumen,
- el *ostium* del aneurisma, representada como un polígono que delimita el cuello, es decir, la abertura que conecta el aneurisma con la arteria madre,
- las líneas centrales que describen el eje de los vasos, e
- información clínica asociada, como la ubicación anatómica, la clasificación morfológica y el estado de rotura del aneurisma.

La **Figura 3.2** ilustra el contenido de la base de datos: la segmentación del aneurisma con el árbol arterial circundante, una representación esquemática del círculo de Willis y la distribución de casos rotos, identificados como R, y no rotos, identificados como U.

Dado que AneuriskWeb ya ofrece los modelos geométricos segmentados, el *pipeline* de simulación puede comenzar directamente con el uso de estos modelos 3D. Esto permite omitir las etapas iniciales de filtrado, segmentación y generación de la iso-superficie, acelerando así el proceso de modelado y enfocando los esfuerzos en la simulación del flujo y el análisis hemodinámico. La **Figura 3.3** muestra un ejemplo representativo de los datos disponibles en

¹⁰ <http://ecm2.mathcs.emory.edu/aneuriskweb/index>

AneuriskWeb: el árbol arterial segmentado, la malla superficial generada, y elementos auxiliares como el *ostium* y las líneas centrales.

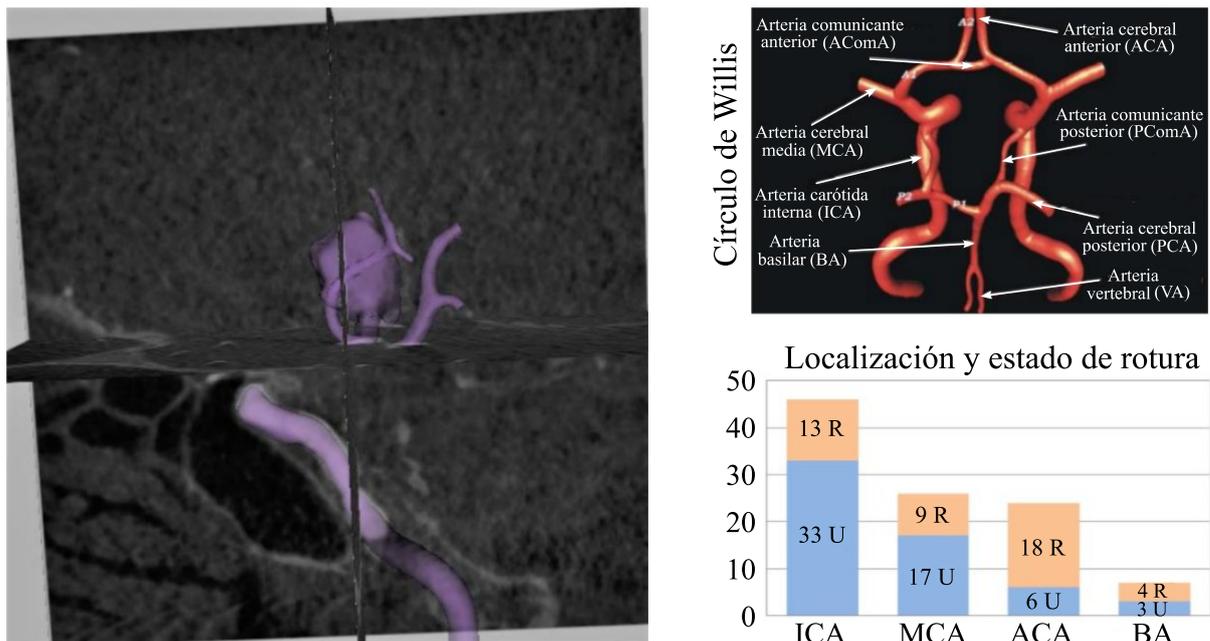


Figura 3.2. Información geométrica y clínica de la base de datos AneuriskWeb. A la izquierda, reconstrucción tridimensional de un árbol arterial con aneurisma. Arriba a la derecha, esquema del círculo de Willis. Abajo a la derecha, distribución de casos rotos (R) y no rotos (U) [40].

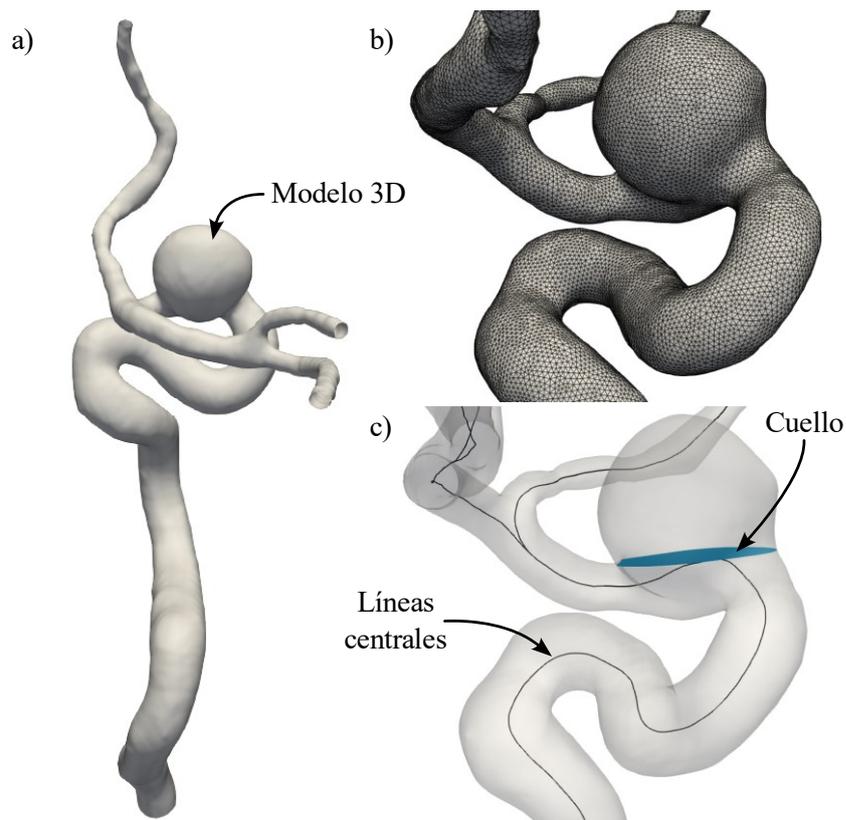


Figura 3.3. Representación del caso C0034 de AneuriskWeb. a) Superficie 3D del árbol arterial. b) Malla superficial del aneurisma y su vasculatura adyacente. c) Visualización del cuello y líneas centrales.

A lo largo de este capítulo se analiza en detalle el caso C0034, correspondiente a un aneurisma sacular lateral ubicado en la ICA. Este caso se elige por presentar una geometría representativa,

caracterizada por una única entrada y una única salida en las proximidades del aneurisma, así como por tener una curvatura pronunciada en la región del cuello, lo que lo convierte en un modelo relevante para su estudio. Adicionalmente, en la Sección 3.4.2 se incorpora el caso C0005, que también corresponde a un aneurisma sacular lateral en la ICA, con el fin de reforzar el análisis realizado.

3.2.2 Dominio computacional

La metodología de mallado propuesta para cualquier caso de la base de datos se detalla en esta sección y se ilustra esquemáticamente en la **Figura 3.4**. El proceso combina herramientas desarrolladas por el grupo MoCCAI, implementadas en C++ y basadas en las bibliotecas VTK¹¹ (*Visualization Toolkit*) y CGAL¹² (*The Computational Geometry Algorithms Library*), junto con dos herramientas de mallado: SALOME¹³ y snappyHexMesh.

Las herramientas desarrolladas por el grupo MoCCAI utilizan el paquete *Polygon Mesh Processing* (PMP) de CGAL, un conjunto de algoritmos destinados al procesamiento de mallas poligonales.

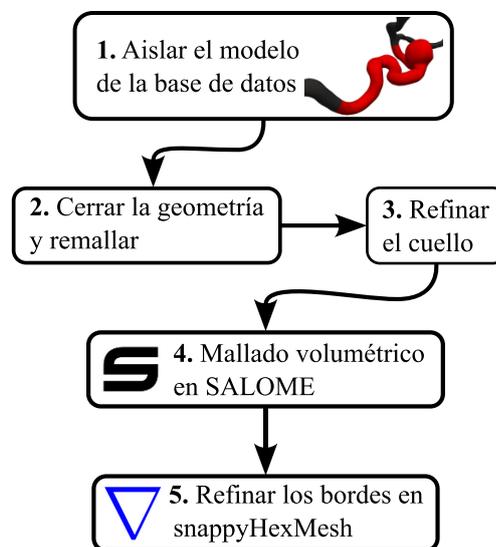


Figura 3.4. Pasos empleados para generar la malla volumétrica a partir del modelo de la base de datos AneuriskWeb.

El punto de partida es el modelo geométrico del aneurisma, extraído de AneuriskWeb. Dado que el interés se centra en la región próxima al aneurisma, se aísla esta porción del árbol arterial utilizando la herramienta *Clip* del *software* ParaView, eliminando las ramificaciones distales. En este corte se incluye un tramo suficientemente largo de región proximal para permitir que el flujo se desarrolle adecuadamente antes de ingresar al aneurisma, garantizando así condiciones más fisiológicas. Esto se muestra en la **Figura 3.5**.

Tras realizar los cortes, la malla resultante puede presentar triángulos degenerados o muy agudos cerca de los bordes, lo que podría ocasionar problemas al momento de realizar la simulación numérica. Para solucionarlo, se aplica un remallado uniforme sobre la superficie mediante la herramienta *BioSurfaceIsotropicRemeshing*¹⁴, desarrollada por el grupo MoCCAI. En este caso, se utilizó un tamaño de elemento de 0.25 mm. La **Figura 3.6** compara la malla original, obtenida tras realizar los cortes, con la versión remallada, donde se aprecia una notable mejora en la regularidad de los elementos.

¹¹ <https://vtk.org>

¹² <https://www.cgal.org>

¹³ <https://www.salome-platform.org>

¹⁴ Esta herramienta fue desarrollada en base al algoritmo *isotropic remeshing* del paquete PMP de CGAL.

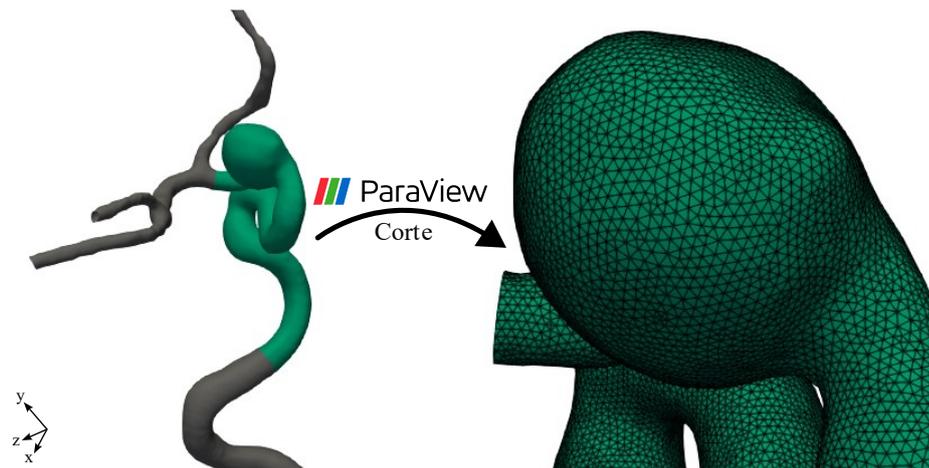


Figura 3.5. Árbol arterial completo (izquierda, gris) y porción extraída incluyendo el aneurisma (verde). A la derecha se muestra la malla de superficie. El corte se realizó con la herramienta *Clip* en ParaView.

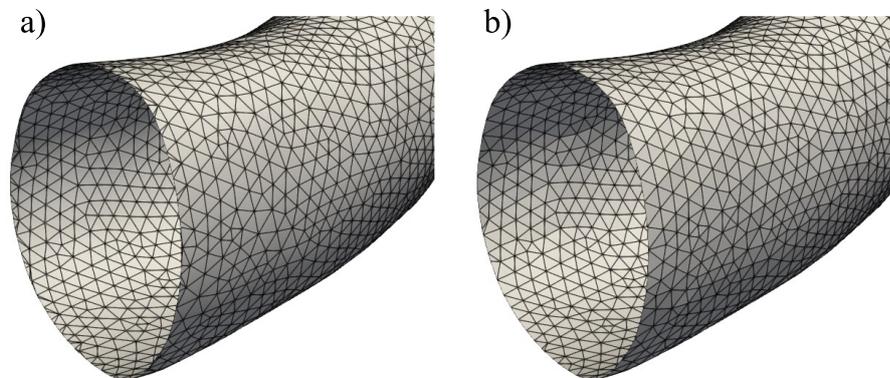


Figura 3.6. Comparación entre a) la malla original tras el recorte y b) la malla remallada. Se observa la mejora en la calidad de los triángulos irregulares, especialmente cerca de los bordes.

Para preparar la superficie cerrada requerida en el mallado volumétrico, se deben sellar los extremos abiertos correspondientes a la entrada y salida. Esto se logra con la herramienta *BioSurfaceHoleFilling*¹⁵, que detecta automáticamente bordes abiertos y rellena las superficies de forma iterativa. Sin embargo, los triángulos generados por esta herramienta suelen ser no uniformes, por lo que se realiza un nuevo remallado utilizando SALOME, con un tamaño de elemento de 0.18 mm. El resultado se muestra en la **Figura 3.7**.

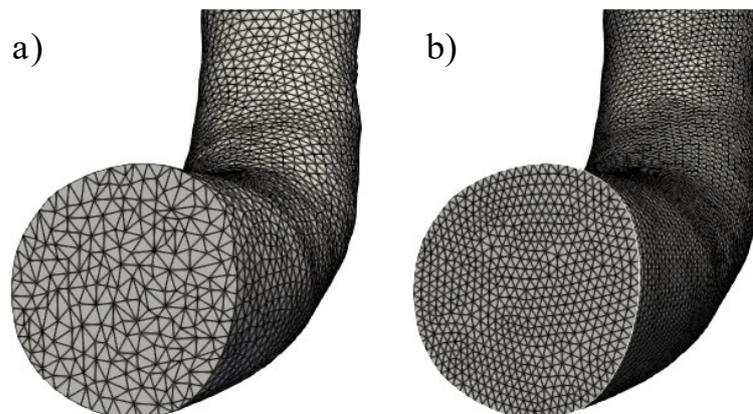


Figura 3.7. a) Superficie generada con *BioSurfaceHoleFilling*. b) Superficie remallada en SALOME para mejorar la uniformidad de los triángulos.

¹⁵ Esta herramienta implementa el algoritmo *hole filling* del paquete PMP de CGAL, diseñado para mallas de superficie triangulares.

Debido a que la región del cuello del aneurisma presenta una elevada curvatura, es necesario aplicar un refinamiento en esta zona para evitar la generación de elementos de mala calidad. Para ello se aplican sucesivamente las herramientas BioAneuNeckRemeshing¹⁶ y BioSurfaceMeshSmoothing¹⁷. Como resultado, se obtiene una malla con tamaño de elementos de 0.12 mm en la región del cuello y de 0.18 mm en el resto de la geometría. El resultado de este refinamiento se presenta en la **Figura 3.8**.

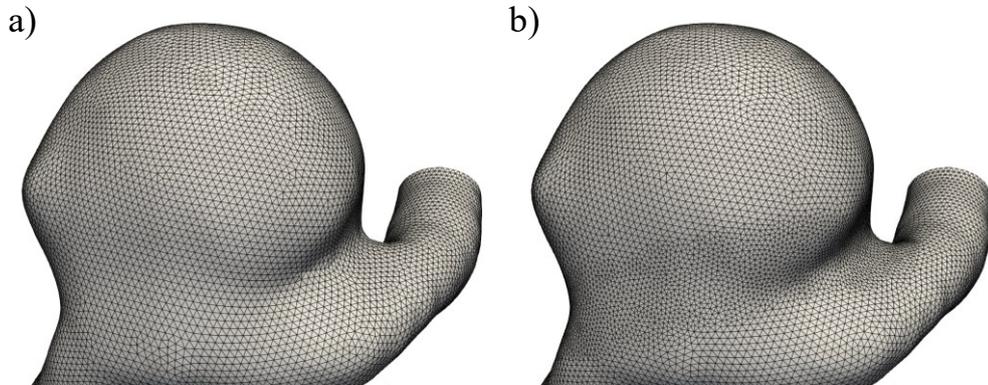


Figura 3.8. Refinamiento en la región del cuello del aneurisma. a) Malla antes del refinamiento localizado. b) Malla refinada.

Una vez obtenida la malla superficial optimizada, se genera la malla volumétrica. Inicialmente se emplea el algoritmo GMSH dentro de SALOME para generar una malla uniforme. Sin embargo, para capturar adecuadamente los gradientes de velocidad en la vecindad de la pared, es necesario un refinamiento específico en la capa límite.

Para lograr este refinamiento, se utiliza snappyHexMesh, herramienta de OpenFOAM, aplicando tres capas de refinamiento con una progresión geométrica de 1.2 y un espesor mínimo de 0.018 mm. El resultado es una malla final que consta de aproximadamente 0.98 millones de elementos y 0.25 millones de nodos, como se muestra en la **Figura 3.9**.

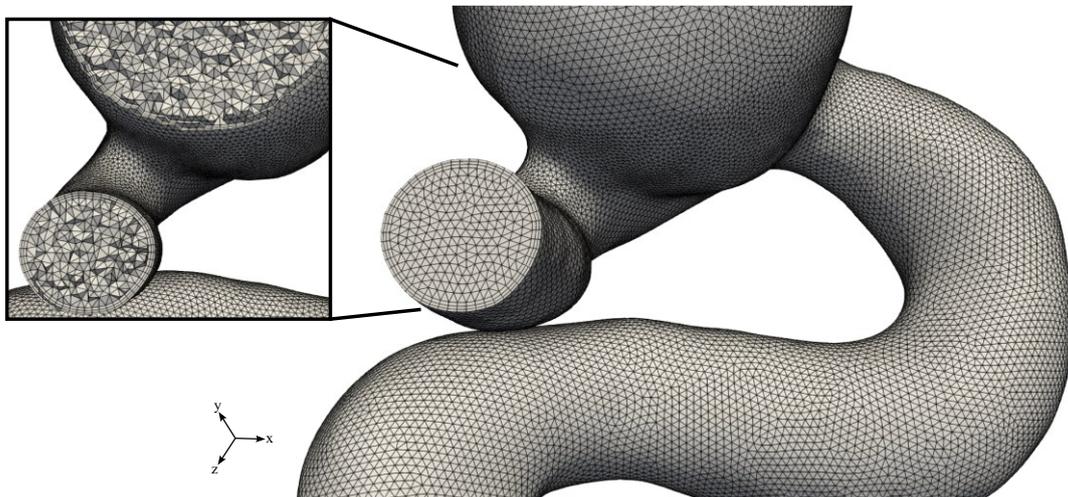


Figura 3.9. Corte de la malla final utilizando la herramienta *Crinkle clip* en ParaView. Se observa el refinamiento próximo a la pared de la arteria.

Finalmente, el archivo de configuración correspondiente al refinamiento con snappyHexMesh se presenta en el Anexo A.I.

¹⁶ Esta herramienta realiza el remallado en el área del cuello del aneurisma a partir de su malla triangular. Se implementa el algoritmo *isotropic remeshing* del paquete PMP de CGAL.

¹⁷ Esta herramienta implementa el algoritmo *smooth mesh* del paquete PMP de CGAL.

3.2.3 Formulación matemática del flujo sanguíneo

El flujo sanguíneo se modela como un fluido incompresible y continuo. Las ecuaciones que gobiernan este comportamiento son la ecuación de conservación del momento de Cauchy y la ecuación de continuidad, expresadas respectivamente como

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.2)$$

donde \mathbf{v} es el campo de velocidad, ρ la densidad del fluido, $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de esfuerzos y \mathbf{F} representa cualquier fuerza de cuerpo o volumétrica aplicada externamente, como la gravedad.

La Ecuación (3.1) por sí sola no permite resolver el problema, ya que el tensor de esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}$ contiene nueve componentes, seis de las cuales son independientes debido a la simetría. Por lo tanto, además de las tres componentes de velocidad, existen seis incógnitas adicionales, sumando en total nueve incógnitas (en coordenadas cartesianas las incógnitas son $v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}$ y σ_{zz}). Sin embargo, sólo se dispone de cuatro ecuaciones: Ecuación (3.1) (vectorial) y Ecuación (3.2) (escalar). Para que el sistema tenga solución, el número de ecuaciones debe ser igual al número de incógnitas, y por lo tanto se necesitan cinco ecuaciones adicionales. Estas ecuaciones, denominadas ecuaciones constitutivas, expresan las componentes del tensor de esfuerzo en término del tensor de deformaciones, que a su vez puede ser expresado en función del campo de velocidad y del campo de presión.

Para facilitar esta relación, se descompone el tensor de esfuerzos en dos partes: los esfuerzos de presión y los esfuerzos viscosos. Cuando un fluido está en reposo, el único esfuerzo que actúa es la presión hidrostática, que siempre actúa hacia el interior y normal a la superficie (**Figura 3.10**). En este caso, el tensor de esfuerzo se reduce a

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

o expresado en forma vectorial

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I}, \quad (3.4)$$

donde P es la presión y \mathbf{I} es el tensor identidad de segundo orden.

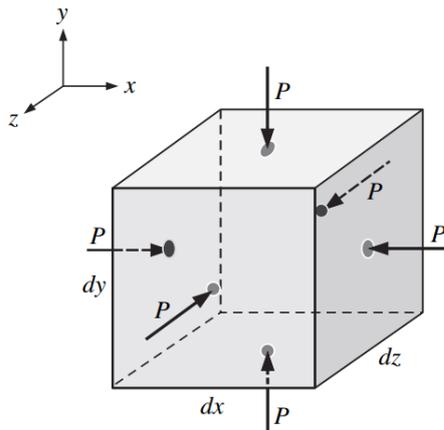


Figura 3.10. Para fluidos en reposo, el único esfuerzo que actúa sobre un elemento de fluido es la presión hidrostática, que siempre actúa hacia dentro y normal a la superficie [41].

Cuando un fluido está en movimiento, se añaden componentes adicionales debido a la viscosidad. La Ecuación (3.3) se generaliza para fluidos en movimientos como

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

o en forma vectorial

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad (3.6)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de esfuerzos viscosos (también llamado tensor desviador).

Sustituyendo en las ecuaciones originales

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.8)$$

El tensor de esfuerzos viscosos $\boldsymbol{\tau}$ depende del tensor del gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{v}$, que puede descomponerse en una parte simétrica y una antisimétrica

$$\nabla \mathbf{v} = \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)}_{\text{Término simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T)}_{\text{Término antisimétrico}} = \text{sym}(\nabla \mathbf{v}) + \text{skw}(\nabla \mathbf{v}). \quad (3.9)$$

La componente simétrica, conocida como tensor de tasa de deformación, es la que origina los esfuerzos viscosos. En coordenadas cartesianas, se expresa como

$$\mathbf{D} = \text{sym}(\nabla \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Por otro lado, el término antisimétrico corresponde a una rotación rígida del fluido, es decir, un movimiento sin deformación que no produce esfuerzos viscosos.

La relación entre el tensor desviador $\boldsymbol{\tau}$ y el tensor de tasa de deformación \mathbf{D} depende del tipo de fluido, lo que se conoce como ecuación constitutiva. En el caso de un fluido newtoniano bajo flujo isotérmico, esta relación es lineal y la constante de proporcionalidad es la viscosidad, que se mantiene constante. En este caso, la ecuación constitutiva se expresa como

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu_0 \mathbf{D}, \quad (3.11)$$

donde μ_0 es la viscosidad dinámica newtoniana. El tensor desviador queda definido como

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} & \mu_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \mu_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \mu_0 \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 2\mu_0 \frac{\partial v_y}{\partial y} & \mu_0 \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \mu_0 \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \mu_0 \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 2\mu_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

En fluidos no newtonianos, como la sangre, y además incompresibles puramente viscosos¹⁸, la ecuación constitutiva se transforma en

¹⁸ Esto significa que el esfuerzo cortante solo depende de la tasa de corte y no de su historia.

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}, \quad (3.13)$$

donde $\eta(\dot{\gamma})$ es la función de viscosidad o viscosidad aparente, que depende de la magnitud de la tasa de corte $\dot{\gamma}$, definida como

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2}\|\mathbf{D}\|_F, \quad (3.14)$$

donde $\|\mathbf{D}\|_F = \sqrt{\mathbf{D}:\mathbf{D}}$ es la norma de Frobenius. Se puede demostrar que $\dot{\gamma}$ es invariante, es decir, la magnitud de la tasa de corte es independiente del sistema de coordenadas cartesianas elegido para evaluar el tensor \mathbf{D} . De manera análoga se define el esfuerzo cortante τ como

$$\tau = \sqrt{1/2}\|\boldsymbol{\tau}\|_F, \quad (3.15)$$

que representa una medida de la magnitud del tensor de esfuerzo viscoso en cada punto del dominio. Sustituyendo esta definición en la Ecuación (3.13) se obtiene

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}. \quad (3.16)$$

Existen un gran número de modelos disponibles en la literatura que describen esta relación. En particular, el modelo de Casson se ha usado ampliamente para describir el flujo sanguíneo y se expresa como

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu_0\dot{\gamma}}, \quad (3.17)$$

siendo τ_0 el esfuerzo de fluencia. Como se mencionó en el Capítulo 2, la existencia de un esfuerzo de fluencia implica que la sangre requiere un esfuerzo previo para comenzar a fluir. La función de viscosidad del modelo de Casson se expresa como

$$\eta(\dot{\gamma}) = \left(\sqrt{\tau_0/\dot{\gamma}} + \sqrt{\mu_0}\right)^2, \quad (3.18)$$

la cual se representa gráficamente en la **Figura 3.11**. Valores típicos utilizados para el flujo sanguíneo son $\tau_0 = 0.04 \text{ dyn/cm}^2$ y $\mu_0 = 0.035 \text{ dyn}\cdot\text{s/cm}^2$.

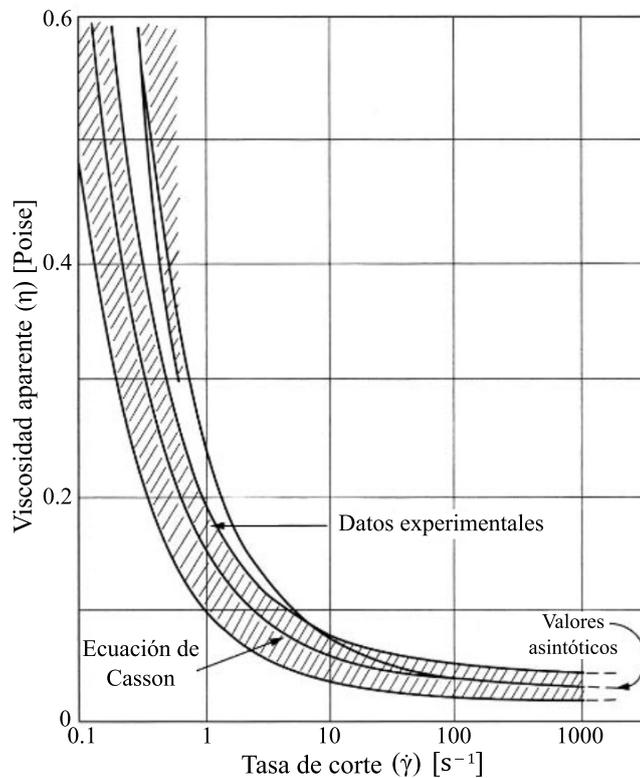


Figura 3.11. Curva de la viscosidad aparente en función de la tasa de corte del modelo de Casson, obtenida mediante ajuste por mínimos cuadrados. Adaptada y traducida de [29].

Dado que la viscosidad aparente aumenta indefinidamente a bajas tasas de corte, existen expresiones alternativas utilizadas en las simulaciones numéricas para evitar inconvenientes o singularidades numéricas. En particular, OpenFOAM se establece la viscosidad cinemática como

$$\nu = \begin{cases} (\sqrt{\tau_0^*/\dot{\gamma}} + \sqrt{\nu_0})^2, & \dot{\gamma} > 0, \\ \nu_{\max}, & \dot{\gamma} = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

siendo $\tau_0^* = \tau_0/\rho$, $\nu_0 = \mu_0/\rho$ y ν_{\max} una cota máxima definida para evitar inestabilidades. Cuando la tasa de corte es mayor que cero, la viscosidad se calcula mediante la Ecuación (3.18). A altas tasas de corte, la viscosidad se aproxima a un valor mínimo ν_{\min} . Esta definición condicional de la viscosidad asegura que se mantenga dentro de rangos fisiológicos.

La **Tabla 3.1** resume los parámetros usados en las simulaciones, que se han determinado a partir de los valores de τ_0 y μ_0 mencionados anteriormente.

Tabla 3.1. Parámetros del modelo de Casson utilizados en OpenFOAM.

| Parámetro | Unidad | Valor |
|--------------|---------------------------------|---------|
| ν_0 | mm ² /s | 3.4146 |
| τ_0^* | mm ² /s ² | 3.9024 |
| ν_{\max} | mm ² /s | 14.6180 |
| ν_{\min} | mm ² /s | 3.4146 |

3.2.4 Condiciones de contorno

En esta sección se describen las condiciones de contorno que se aplican en las regiones de entrada, salida y paredes. Estas se identifican sobre la geometría utilizando archivos STL individuales de cada frontera, los cuales luego se concatenan en un único archivo. De esta manera, todas las fronteras están contenidas en un archivo común, pero permanecen diferenciadas entre sí, lo que facilita su manipulación durante el proceso de mallado (ver **Figura 3.12**).

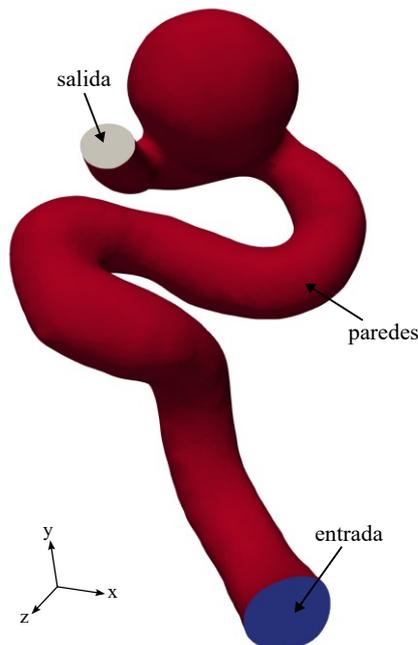


Figura 3.12. Regiones o fronteras sobre las que se imponen las condiciones de contorno: entrada, salida y paredes.

En la entrada se impone una condición de velocidad pulsátil en el tiempo, uniforme en el espacio. La variación de la velocidad en el tiempo se basa en la forma de onda típica del caudal durante el ciclo cardíaco. Esta condición se construye a partir de los datos experimentales reportados en [42], donde se caracterizó el flujo volumétrico en la ICA y la arterial vertebral (*vertebral artery*, VA) mediante resonancia magnética de contraste de fase (cine PC-MRI). A partir de mínimos y máximos locales del ciclo cardíaco, conocidos como puntos característicos, se generó una curva de caudal utilizando *splines* cúbicos (Figura 3.13). Esta curva representa las variaciones del flujo sanguíneo a lo largo del ciclo cardíaco, incluyendo las fases de sístole y diástole.

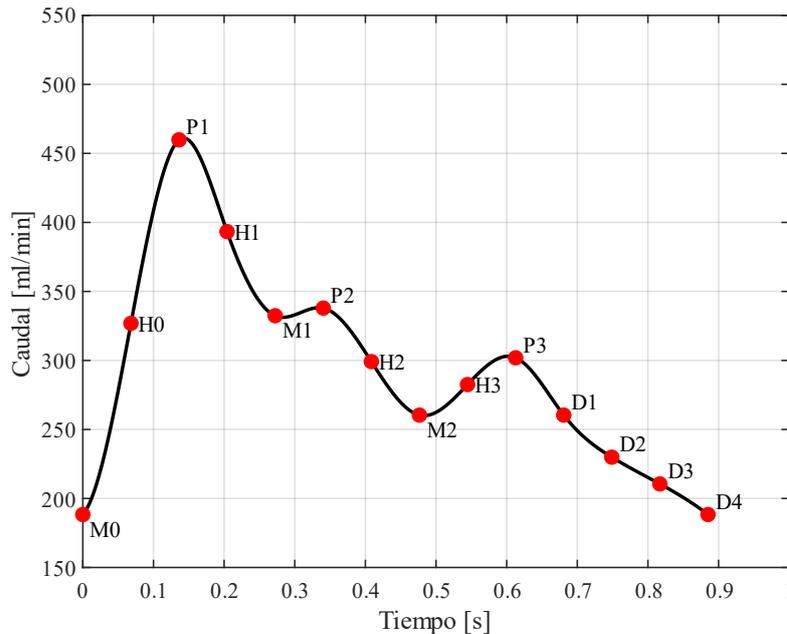


Figura 3.13. Forma de onda y puntos característicos del caudal o flujo volumétrico en un ciclo cardíaco. La curva se construyó por ajuste por *splines* cúbicos a partir de los puntos característicos. Se ha utilizado una frecuencia de 68 ± 8 latidos por minuto, lo que corresponde a un ciclo cardíaco de 885 ± 101 ms. El valor de caudal promedio es de 277 ml/min.

La fase sistólica es la fase de contracción del corazón, donde los ventrículos se contraen para impulsar la sangre hacia las arterias. Esta fase se caracteriza por un aumento rápido y pronunciado del flujo, alcanzando el valor máximo en el pico sistólico (P1), que representa la mayor velocidad y volumen de flujo sanguíneo durante el ciclo.

La fase diastólica es la fase de relajación del corazón, donde los ventrículos se relajan y se llenan de sangre. La diástole se subdivide en varias etapas:

- Diástole temprana: inmediatamente después de la sístole, la presión en los ventrículos cae rápidamente, lo que lleva a una disminución del flujo y la aparición del mínimo (M1) y del pico diastólico (P2).
- Diástole media: durante esta fase, el flujo sanguíneo disminuye gradualmente, aunque es posible observar fluctuaciones (M2 y P3) durante la relajación ventricular.
- Diástole tardía: esta es la última parte de la diástole, justo antes de que comience la siguiente sístole. En la forma de onda del flujo, la diástole tardía se manifiesta como una disminución progresiva del flujo, desde el último pico diastólico (P3) hasta el mínimo inicial (M0) del siguiente ciclo, que representa el flujo más bajo antes del inicio de la contracción ventricular.

En esta fase, el corazón se está llenando completamente de sangre y preparándose para la siguiente contracción. Los puntos D1, D2, D3 y D4 se utilizan para caracterizar esta fase de la onda.

Además de estos puntos claves, la forma de onda también se caracteriza por los tiempos entre ellos, como por ejemplo el tiempo entre el mínimo M0 y el pico P1, que describe la fase inicial de la sístole, donde el flujo cambia de forma más rápida.

La **Tabla 3.2** proporciona los valores de tiempos y amplitudes de los puntos característicos tanto en la ICA como en la VA. Los valores de tiempo se reportan en milisegundos y las amplitudes se presentan como una relación con el flujo volumétrico promedio (Q/Q_{prom}), lo que permite comparar las dos arterias. Por ejemplo, el pico sistólico (P1) ocurre a los 45 ms en la ICA y 39 ms en la VA, con una amplitud de 1.66 Q/Q_{prom} en la ICA y 1.78 Q/Q_{prom} en la VA, en promedio.

Tabla 3.2. Valores de tiempos y amplitudes de los puntos característicos para las formas de onda del flujo sanguíneo de la ICA y la VA.

| Puntos característicos | Tiempo [ms] | | Amplitud (Q/Q_{prom}) | |
|---------------------------|-------------|----------|----------------------------------|----------|
| | ICA | VA | ICA | VA |
| | Promedio | Promedio | Promedio | Promedio |
| M0 | -61 | -62 | 0.68 | 0.63 |
| H0 | 0 | 0 | 1.18 | 1.21 |
| P1 | 45 | 39 | 1.66 | 1.78 |
| H1 | 84 | 74 | 1.42 | 1.50 |
| M1 | 141 | 120 | 1.20 | 1.24 |
| P2 | 187 | 164 | 1.22 | 1.33 |
| H2 | 241 | 238 | 1.08 | 1.11 |
| M2 | 280 | 280 | 0.94 | 0.89 |
| H3 | 312 | 308 | 1.02 | 1.00 |
| P3 | 350 | 339 | 1.09 | 1.11 |
| D1 | 468 | 459 | 0.94 | 0.94 |
| D2 | 586 | 580 | 0.83 | 0.81 |
| D3 | 704 | 700 | 0.76 | 0.73 |
| D4 | 822 | 821 | 0.68 | 0.63 |

El perfil de velocidad en cada instante se obtiene dividiendo el caudal por el área de la sección de entrada. De esta manera, el flujo total a través de la entrada en cada instante de tiempo corresponde al flujo volumétrico fisiológico. Además, se implementó una rampa lineal inicial de 0.29 segundos para suavizar la transición al inicio de la simulación y evitar comportamientos irreales del flujo por cambios bruscos de velocidad, siguiendo el enfoque adoptado en [17] (**Figura 3.14**).

Cabe destacar que imponer la misma velocidad promedio entre distintos casos de aneurismas es una elección más realista que imponer el mismo caudal, dado que las áreas de entrada pueden variar considerablemente. Este criterio asegura condiciones fisiológicas comparables entre simulaciones.

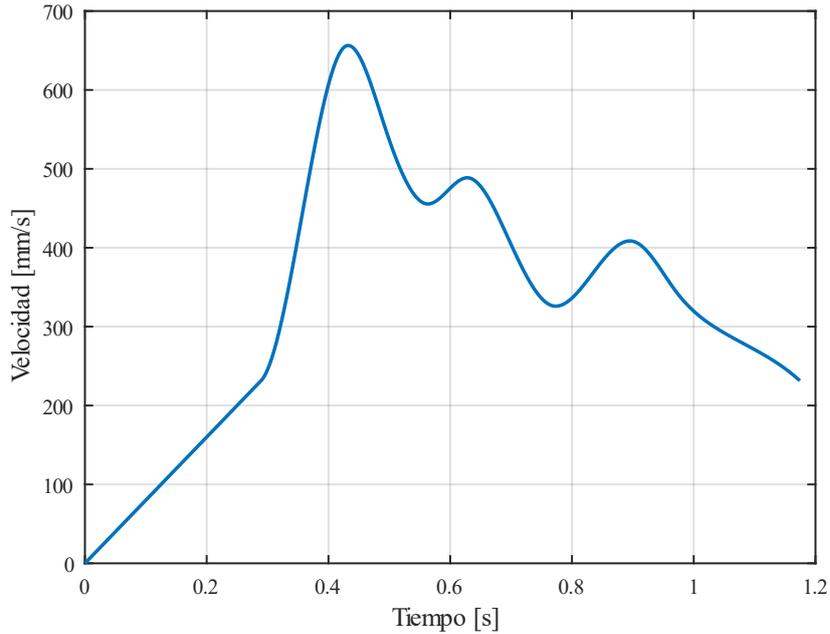


Figura 3.14. Magnitud de la velocidad en la entrada de la geometría basada en la forma de onda del flujo volumétrico durante un ciclo cardíaco. Se ha impuesto una rampa inicial de 0.29 segundos para una inicialización más suave.

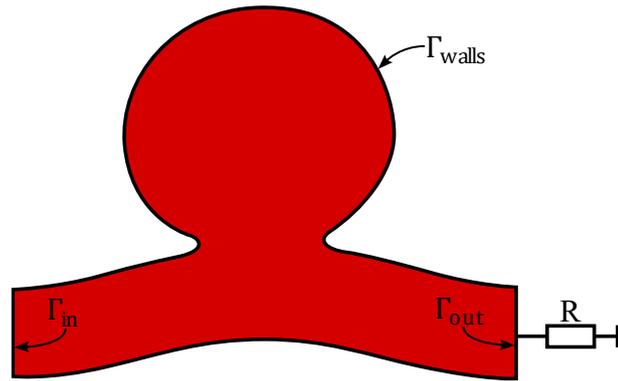


Figura 3.15. Configuración propuesta para lograr una variación de la presión entre valores típicos fisiológicos.

En la salida se aplican condiciones de contorno de presión basadas en variaciones fisiológicas. A lo largo de un ciclo cardíaco, la presión en el sistema vascular varía entre 80 y 120 mmHg para pacientes sanos. Estas variaciones se modelan colocando en la salida una resistencia hidráulica. Esta resistencia es un parámetro que busca capturar cómo las estructuras vasculares periféricas limitan el flujo, y se modela de manera análoga a la resistencia en un circuito eléctrico que limita el paso de la corriente eléctrica, tal como se muestra en la **Figura 3.15**.

La forma de onda de la presión se construye en fase con la entrada y su expresión está dada por

$$P = P_0 + QR, \quad (3.20)$$

siendo P_0 una presión de referencia, R la resistencia hidráulica y Q el caudal de salida instantáneo, el cual es igual al caudal de entrada por conservación de masa.

Para hallar los valores de P_0 y R se reemplazan los valores límites de presión y de caudal en la Ecuación (3.20). Entonces

$$P_{\max} = P_0 + Q_{\max}R = 120 \text{ mmHg}, \quad (3.21)$$

$$P_{\min} = P_0 + Q_{\min}R = 80 \text{ mmHg}, \quad (3.22)$$

siendo $Q_{\max} = 7.68$ ml/s y $Q_{\min} = 3.14$ ml/s. Al resolver estas ecuaciones, se obtiene $R = 1.17$ kPa·s/ml y $P_0 = 7$ kPa. En la **Figura 3.16** se muestra la variación de la presión en un ciclo cardíaco.

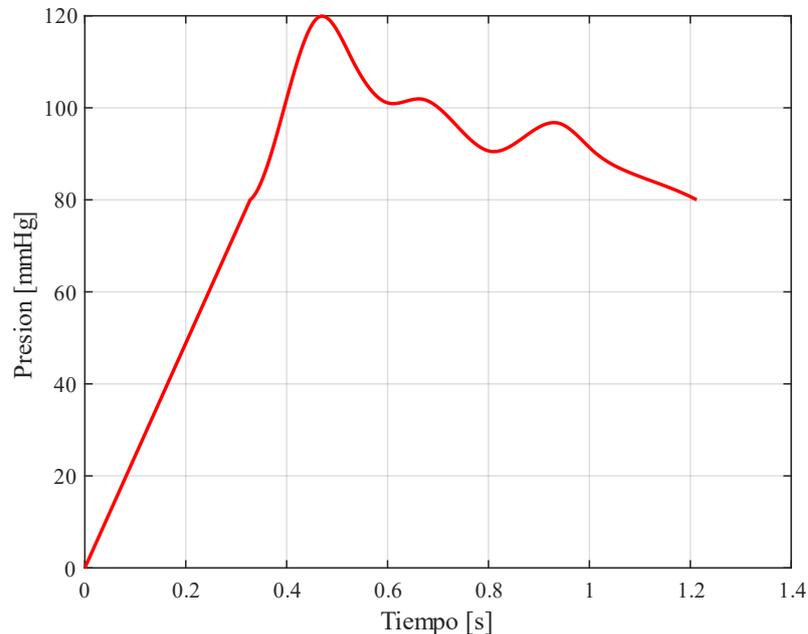


Figura 3.16. Variación de la presión entre valores fisiológicos (80 y 120 mmHg) durante un ciclo cardíaco. La forma de onda fue construida en fase con la de velocidad. Se agregó una rampa para que el inicio de la simulación sea más suave.

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, en una primera instancia se asume que las paredes arteriales son rígidas. En consecuencia, se impone una condición de contorno de no-deslizamiento, lo cual implica que la velocidad del fluido en la interfaz es igual a la velocidad de la pared. Al considerar la pared rígida, su velocidad es nula, por lo que la velocidad del fluido también es cero en la pared.

Esta suposición, aunque simplificadora, es ampliamente usada en estudios que se enfocan en la hemodinámica del flujo, ya que reduce la complejidad computacional. Si bien se ha demostrado que considerar la pared rígida puede sobrestimar el WSS de hasta un 30% en algunos casos [21], esta aproximación resulta válida para un primer análisis centrado en la influencia del flujo sanguíneo. La influencia de esta suposición será evaluada en el Capítulo 6, donde se muestran los resultados obtenidos al modelar la interacción entre el flujo sanguíneo y la pared arterial deformable mediante FSI.

3.2.5 Factores hemodinámicos de interés

Los factores hemodinámicos desempeñan un papel fundamental en la fisiopatología de los aneurismas intracraneales, ya que influyen en su aparición, crecimiento y eventual rotura. Estos factores están relacionados con las fuerzas que ejerce el flujo sanguíneo sobre las paredes arteriales y del aneurisma.

Uno de los parámetros más relevantes en este contexto es el WSS, que representa la componente tangencial del esfuerzo ejercido por el flujo de sangre sobre la superficie de la pared vascular. Tanto valores elevados como bajos de WSS se han asociado con la patología de aneurismas, aunque de manera distinta. Se ha sugerido que valores elevados de WSS pueden estar implicados en la formación del aneurisma, mientras que valores bajos se asocian con su crecimiento y potencial rotura [43].

Matemáticamente, el WSS se denota como \mathbf{t}_{WSS} y se define como el vector tensión del fluido restringido al plano tangente de la superficie de la interfaz, es decir

$$\mathbf{t}_{\text{WSS}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} - [(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n}, \quad (3.23)$$

siendo \mathbf{n} el vector normal a la superficie de la pared y $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$ representa el vector de esfuerzo viscoso, tal como se muestra en la **Figura 3.17**.

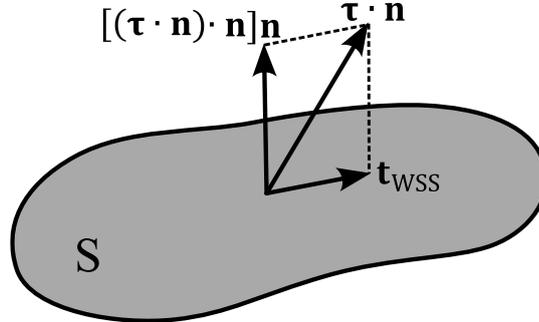


Figura 3.17. Representación esquemática de las componentes del vector de esfuerzo viscoso, que se obtiene al multiplicar el tensor de esfuerzos viscosos por la normal a la superficie S. El término $[(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n}$ representa la componente normal y \mathbf{t}_{WSS} la componente tangencial.

Otro factor hemodinámico importante es el índice de esfuerzo oscilatorio (*oscillatory shear index*, OSI), que cuantifica la variación del WSS en el tiempo, es decir, cómo cambia la orientación del flujo cerca de la pared. Se define como

$$\text{OSI} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\left\| \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{t}_{\text{WSS}} dt \right\|}{\int_{t_0}^{t_0+T} \|\mathbf{t}_{\text{WSS}}\| dt} \right), \quad (3.24)$$

donde T representa la duración del ciclo cardíaco, por lo que cada integral se evalúa a lo largo de un ciclo.

La integral del numerador suma en cada instante de tiempo el WSS en forma vectorial, considerando tanto su magnitud como dirección. Esto significa que, si en algún momento el WSS apunta en una dirección y en otro momento en la dirección opuesta, estas contribuciones se cancelarán parcialmente. Luego, se calcula la norma de este vector resultante, lo que representa la intensidad del WSS total a lo largo del ciclo cardíaco, considerando la dirección neta del flujo.

La integral del denominador calcula, en primer lugar, la norma del WSS en cada instante de tiempo. Esto da como resultado un valor escalar que representa la intensidad del WSS en ese momento, sin considerar su dirección. Entonces, el resultado de la integral representa la magnitud acumulada de WSS durante el ciclo cardíaco, sin tomar en cuenta los cambios de dirección del flujo. Al dividir la magnitud del WSS promedio por la suma total de las magnitudes del WSS, el OSI cuantifica la relación entre la direccionalidad y la magnitud del WSS.

De esta manera, el OSI varía entre 0 y 1. Un valor alto de OSI indica cambios frecuentes o grandes en la dirección del WSS, característicos de flujo oscilatorio. Estos cambios generalmente ocurren en áreas de estancamiento o donde el flujo se invierte. Un valor bajo de OSI indica que el WSS mantiene una dirección relativamente constante durante el ciclo cardíaco. Esto permite identificar áreas de flujo inestable que podrían asociarse con patologías como los aneurismas intracraneales.

3.3 MODELO COMPUTACIONAL EN OPENFOAM

Como se mencionó en la Sección 3.2.3, el comportamiento del flujo sanguíneo se describe mediante la ecuación de conservación del momento de Cauchy y la ecuación de continuidad.

Estas ecuaciones, al ser no lineales, generalmente no tienen soluciones analíticas en geometrías complejas como las vasculares, por lo que deben resolverse mediante métodos numéricos.

Entre las técnicas más utilizadas en CFD, el método de volúmenes finitos (*finite volume method*, FVM) es ampliamente usado. Este método discretiza el dominio físico en un número finito de volúmenes de control (malla computacional), dentro de los cuales se integran las ecuaciones en su forma conservativa. El resultado es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales para cada variable, como la presión o la velocidad, que pueden expresarse en forma matricial. En este sistema la matriz contiene los coeficientes de la discretización, el vector de las incógnitas representa los valores de las variables en cada volumen de control y el término fuente incluye los términos conocidos.

La resolución de estos sistemas matriciales se realiza mediante métodos iterativos, que refinan la solución progresivamente hasta alcanzar la convergencia. En el Anexo C se desarrolla el FVM para el caso estacionario de las ecuaciones de Navier-Stokes.

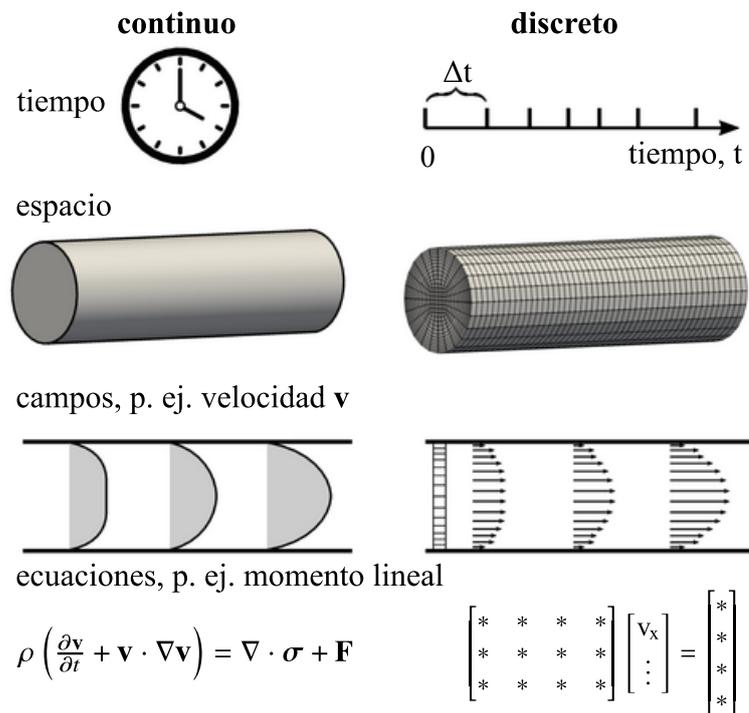


Figura 3.18. Representación del proceso de discretización por volúmenes finitos. El dominio continuo se convierte en una malla espacial, el tiempo se divide en intervalos Δt , y las ecuaciones diferenciales se transforman en sistemas algebraicos que se resuelven iterativamente. Traducida y adaptada de [44].

En este trabajo, las simulaciones CFD se realizaron en OpenFOAM, versión 2312. Para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes en régimen transitorio, se utilizó el algoritmo PIMPLE, una combinación de los algoritmos PISO (*Pressure Implicit with Splitting of Operator*) y SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*), que mejora la estabilidad y precisión.

A continuación se detalla la formulación matricial utilizada para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en OpenFOAM.

En términos matriciales, la conservación del momento se expresa como

$$\mathcal{M}\mathbf{v} = -\nabla P, \quad (3.25)$$

donde \mathcal{M} es la matriz de coeficientes resultante de la discretización del término convectivo y transitorio. Esta ecuación se conoce como ecuación predictora de momento, ya que permite

obtener un campo de velocidad preliminar a partir de un campo de presión conocido, ya sea definido en las condiciones iniciales u obtenido en la iteración anterior.

La matriz \mathcal{M} se puede descomponer en una matriz \mathcal{A} , que contiene únicamente los elementos de la diagonal principal, y una matriz \mathcal{H} , tal que

$$\mathcal{H} = \mathcal{A}\mathbf{v} - \mathcal{M}\mathbf{v}. \quad (3.26)$$

La Ecuación (3.26) representa el residuo al aplicar la matriz \mathcal{A} al campo de velocidad.

Al despejar el campo de velocidad a partir de las dos ecuaciones anteriores, se tiene

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\mathbf{v} + \mathcal{A}^{-1}\nabla P \Rightarrow \mathbf{v} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{H} - \mathcal{A}^{-1}\nabla P, \quad (3.27)$$

donde la inversa de la matriz \mathcal{A} puede calcularse fácilmente al ser una matriz diagonal

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{3,3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/a_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Para determinar el campo de presión es necesario derivar una ecuación específica, ya que las ecuaciones de Navier-Stokes no proporcionan una forma directa de cálculo. Aunque la ecuación de continuidad solo impone una restricción sobre el campo de velocidad, puede utilizarse para obtener una ecuación. Sustituyendo la Ecuación (3.27) en la ecuación de continuidad ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), se obtiene

$$\nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1}\nabla P) = \nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H}), \quad (3.29)$$

donde el campo de presión P es la única incógnita, y el lado derecho actúa como término fuente ya que \mathcal{H} es conocido, al obtenerse a partir de la Ecuación (3.26).

El campo de velocidad hallado con la Ecuación (3.25) no satisface la ecuación de continuidad. La Ecuación (3.27), conocida como corrector de presión explícito, permite corregir el campo de velocidad para garantizar el cumplimiento de dicha ecuación.

En resumen, la matriz \mathcal{H} se obtiene a partir de la ecuación predictora de momento y, luego, el campo de velocidad estimado a partir de la Ecuación (3.25) se corrige mediante la Ecuación (3.27). Dado que la matriz \mathcal{H} depende del campo de velocidad, cualquier actualización de este último implica una modificación en \mathcal{H} . Como consecuencia, el término fuente de la Ecuación (3.29) también varía, lo que significa que el campo de presión previamente calculado deja de ser válido y debe ser actualizado. Este es el punto clave que distingue algoritmos como SIMPLE y PISO, ya que difieren en la forma en cómo se actualiza la matriz \mathcal{H} .

El algoritmo PIMPLE, implementado en OpenFOAM, combina las ventajas de PISO y SIMPLE. Este algoritmo está compuesto por dos bucles principales, como se ilustra en la **Figura 3.19**:

- Bucle interno (*inner correctors*): aplica el algoritmo PISO corrigiendo iterativamente el campo de velocidad mediante la Ecuación (3.27), actualizando el campo de presión con la Ecuación (3.29), y recalculando la matriz \mathcal{H} para asegurar la consistencia entre los campos de velocidad y presión. Este bucle se repite tantas veces como haya sido especificado por el usuario. Si el número de iteraciones es igual a uno, entonces el algoritmo PIMPLE se transforma en el algoritmo SIMPLE.
- Bucle externo (*outer correctors*): al inicio de cada paso de tiempo, se calcula una predicción del campo de velocidad a partir de la ecuación predictora de momento. Luego, el algoritmo realiza múltiples iteraciones del algoritmo PISO para corregir tanto el campo de velocidad como el campo de presión. El número de iteraciones externas es

definido por el usuario y se repite hasta alcanzar el número máximo de iteraciones o hasta que las variables converjan.

Una ventaja importante del algoritmo PIMPLE es su capacidad para utilizar pasos de tiempo más grandes en comparación con el algoritmo PISO, sin comprometer la estabilidad numérica. Esto es posible porque hereda del algoritmo SIMPLE el uso de factores de relajación¹⁹ para mejorar la estabilidad del sistema de ecuaciones. Estos factores aumentan artificialmente el valor de la diagonal de la matriz, promoviendo la dominancia diagonal y, por ende, la estabilidad del sistema. Por otro lado, el algoritmo PISO, enfocado en flujos transitorios, involucra derivadas temporales, las cuales, cuando se usan pasos de tiempo pequeños, contribuyen a la dominancia diagonal de las matrices, haciendo que el sistema sea inherentemente más estable y no sea necesario el uso de factores de relajación.

Además, la capacidad de PIMPLE para realizar iteraciones dentro de cada paso de tiempo mejora la precisión de la solución al actualizar los coeficientes de la matriz y los términos fuente explícitos, lo que contribuye a su robustez en simulaciones transitorias.

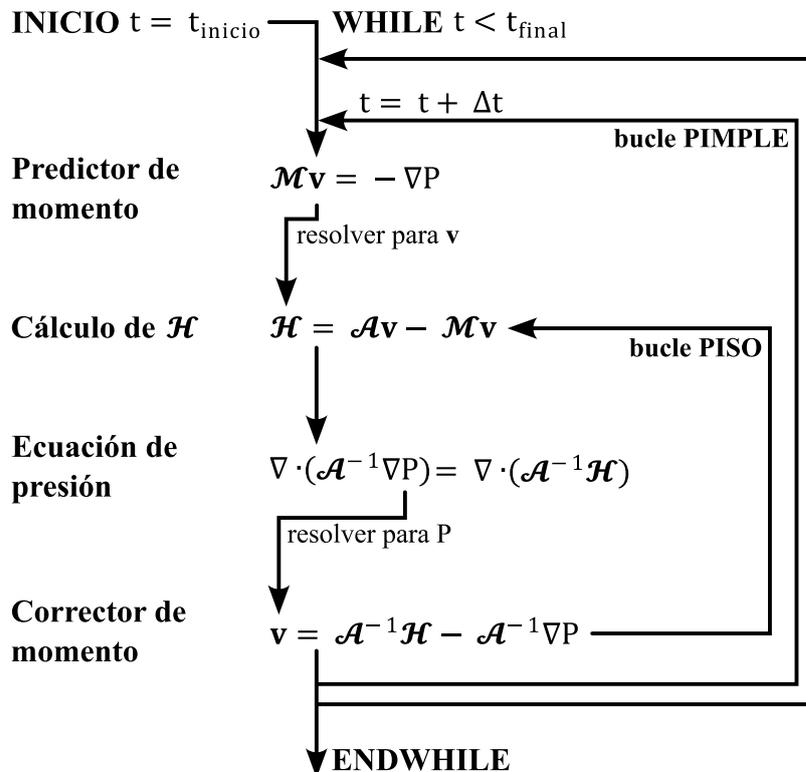


Figura 3.19. Esquema del algoritmo PIMPLE implementado en OpenFOAM. En cada paso de tiempo, el algoritmo predice el campo de velocidad a partir del campo de presión y luego corrige ambos campos en múltiples iteraciones hasta alcanzar la convergencia. Posteriormente, se actualiza el tiempo: $t = t + \Delta t$.

3.4 FLUIDODINÁMICA DE UN CASO PARTICULAR DE ANEURISMA

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar simulaciones CFD al caso C0034 de la base de datos AneuriskWeb, cuya geometría fue presentada previamente en este capítulo.

El análisis comienza con el estudio del campo de velocidades a lo largo de un ciclo cardíaco, utilizando las condiciones de contorno definidas en la Sección 3.2.4. La **Figura 3.20** ilustra el comportamiento del flujo mediante algunas líneas de corriente correspondientes al instante del pico sistólico. En la región de entrada, las líneas de corriente fluyen de forma paralela a lo largo

¹⁹ Para más información acerca de factores de relajación mirar [44].

del dominio, pero al aproximarse al aneurisma se tornan más complejas, dando lugar a la formación de un vórtice dentro del aneurisma. Este vórtice se origina por la forma en la que el flujo entra en la región del aneurisma, llenando progresivamente la cúpula del aneurisma y luego redirigiéndose hacia la salida.

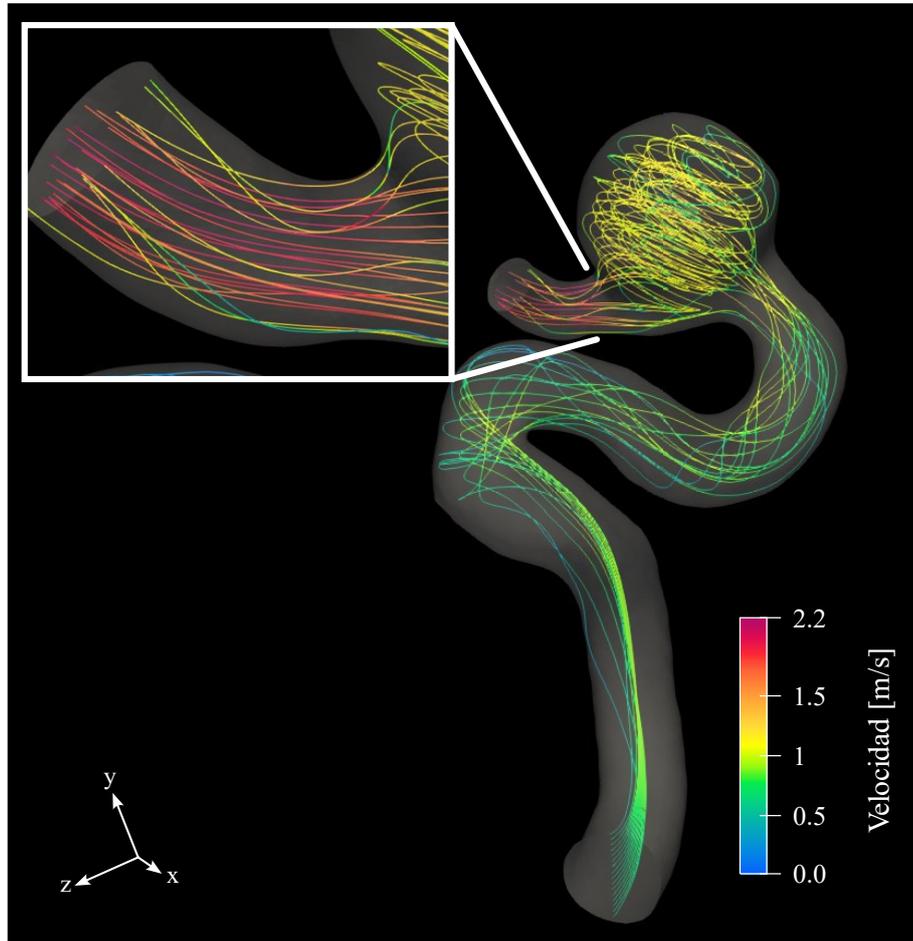


Figura 3.20. Representación de algunas líneas de corriente del caso C0034 durante el pico sistólico. En la vista ampliada se destaca el patrón de flujo en la región del cuello, en el extremo distal del aneurisma.

La redirección del flujo debido al vórtice da lugar a zonas con velocidades elevadas localizadas, lo que genera áreas con mayor concentración de flujo. Por otro lado, las regiones que no son alcanzadas por el flujo o aquellas donde el fluido es desplazado por el vórtice experimentan velocidades más bajas. Si bien la mayoría de las líneas de corriente entran en la región del aneurisma, algunas de ellas siguen su curso directamente por la arteria principal. El flujo saliente del aneurisma, se encuentra con un estrechamiento de la arteria que aumenta la velocidad, generando una zona de alto flujo, tal como se observa en la vista ampliada de la **Figura 3.20**.

Para identificar las zonas más críticas desde el punto de vista hemodinámico, se analiza el campo de WSS, cuyos resultados se presentan en la **Figura 3.21** y **Figura 3.22**. El valor máximo de WSS se localiza en la región proximal del cuello en la salida del aneurisma, debido a que esta región presenta una velocidad de flujo cuya magnitud supera al doble de la alcanzada en la región intra aneurismática. Este incremento se debe, en gran parte, a la elevada curvatura de la arteria en esta zona. De hecho, el valor máximo de WSS en el cuello supera en más de tres veces el máximo valor registrado en la cúpula del aneurisma.

En la **Figura 3.22** se observa con más detalle el campo de WSS sobre la superficie del aneurisma. Se identifica una región anular de alto WSS que rodea una zona central de bajo WSS. Esta última coincide con el centro del vórtice, donde las velocidades del flujo tienden a

ser más bajas. Además, se han representado algunas líneas de corriente en la región del aneurisma que muestran cómo el flujo incide directamente sobre las paredes del aneurisma en las áreas con mayor WSS.

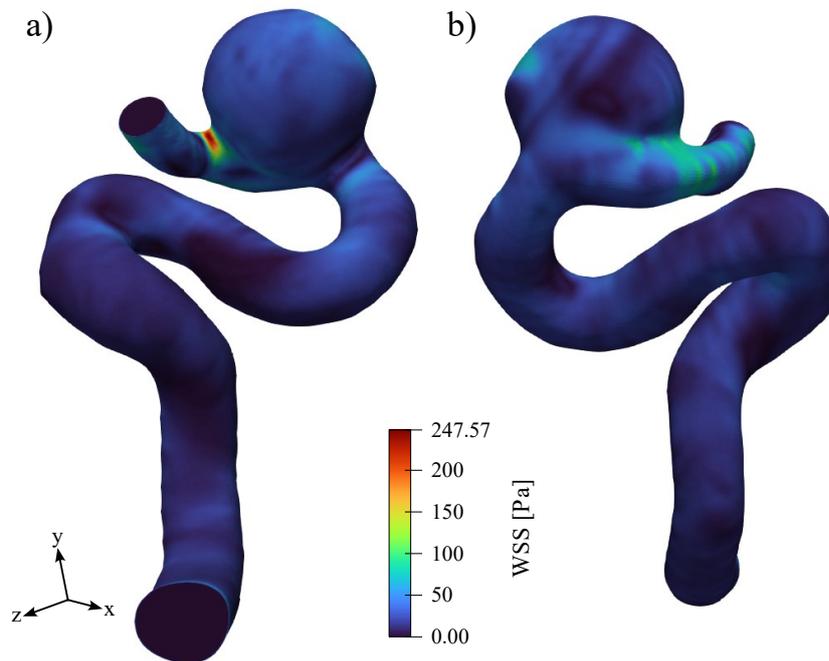


Figura 3.21. Magnitud de WSS durante el pico sistólico. Se observa un valor máximo en la región del cuello y zonas elevadas dentro del aneurisma, indicando áreas críticas desde el punto de vista hemodinámico.

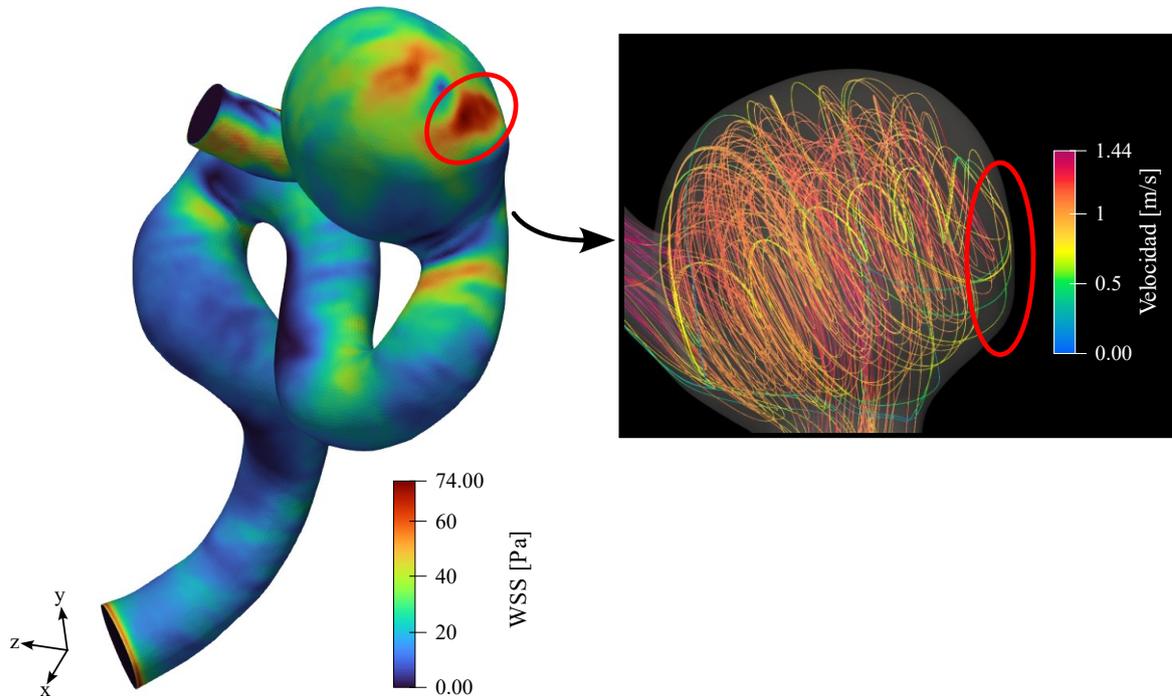


Figura 3.22. Región del aneurisma con valores máximos de WSS. La escala de colores ha sido ajustada para destacar la distribución del WSS sobre la superficie del aneurisma. Se incluyen algunas líneas de corriente que evidencian la interacción del flujo con la pared en las zonas más críticas.

A continuación, se realizan diferentes análisis sobre este mismo caso de aneurisma, para evaluar cuánto varían los resultados bajo distintos supuestos. Por ejemplo, se estudiará cómo varía la fluidodinámica bajo la elección de un modelo newtoniano o no newtoniano.

3.4.1 Influencia del modelo geométrico en los resultados

El primer análisis busca estimar en qué medida la longitud de la porción arterial distal del aneurisma influye en los resultados de la simulación. Específicamente, se analiza si el lugar donde se impone la condición de contorno en la salida puede influir significativamente en los valores de WSS. La hipótesis es que aplicar esta condición demasiado cerca del aneurisma podría generar una distorsión del campo de velocidad y, por consiguiente, en el WSS. Mientras más lejos se aplique la condición de contorno, menor impacto tendrá sobre los resultados intra aneurismáticos.

En la **Figura 3.23** se presentan los dos dominios computacionales considerados para este análisis. El primero corresponde a una geometría más compacta, mientras que el segundo incluye una extensión adicional de 6 mm en la porción distal de la arteria, obtenida por extrusión de la sección de salida del primer modelo.

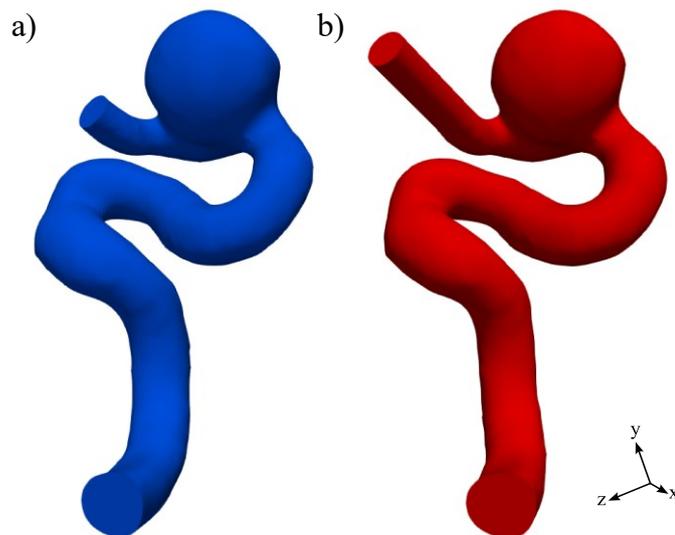


Figura 3.23. Dominios computacionales con diferentes longitudes de la porción arterial distal del aneurisma: a) longitud pequeña y b) longitud grande. La geometría de la derecha se obtuvo al aplicar una extrusión de la sección de salida de la geometría de la izquierda una distancia de 6 mm.

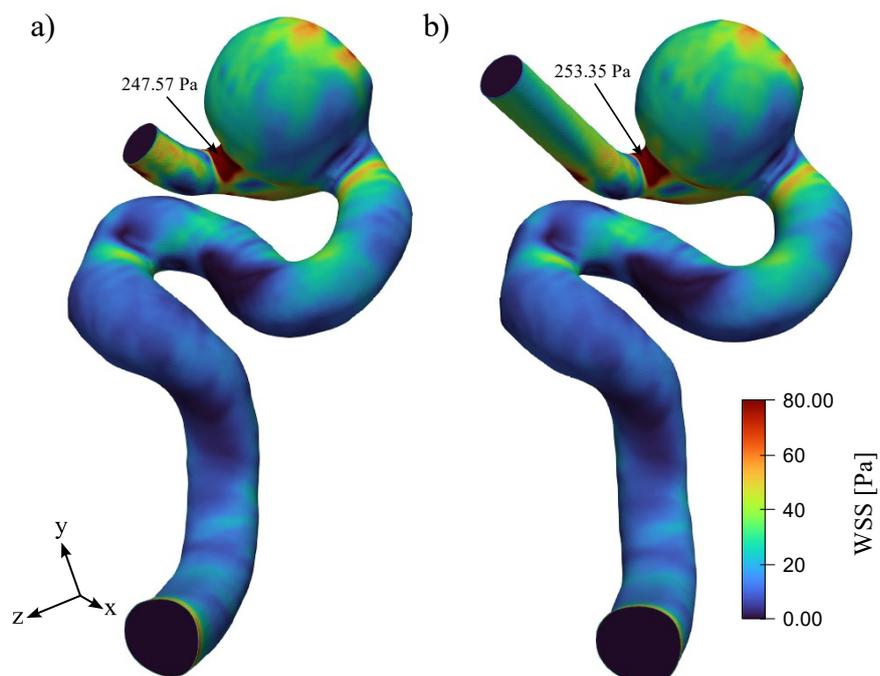


Figura 3.24. Magnitud de WSS con diferentes longitudes de la arteria distal del aneurisma: a) longitud pequeña y b) longitud grande. Se indica el valor máximo alcanzado en ambas geometrías.

Los campos de WSS correspondientes a ambas configuraciones se muestran en la **Figura 3.24** y **Figura 3.25**. Los patrones de WSS a lo largo de los dominios son consistentes, con ligeras variaciones en los valores máximos registrados en el cuello y la cúpula del aneurisma. Al extender la arteria en la salida, el valor máximo de WSS en el cuello del aneurisma aumenta aproximadamente un 2%, mientras que en la cúpula el incremento es cercano al 3%. Sin embargo, la relación entre el valor máximo en el cuello y en la cúpula se mantiene constante, siendo el primero aproximadamente 3.5 veces mayor. Esta consistencia sugiere que, para este caso específico, el acortamiento de la arteria en la salida no afecta significativamente los resultados.

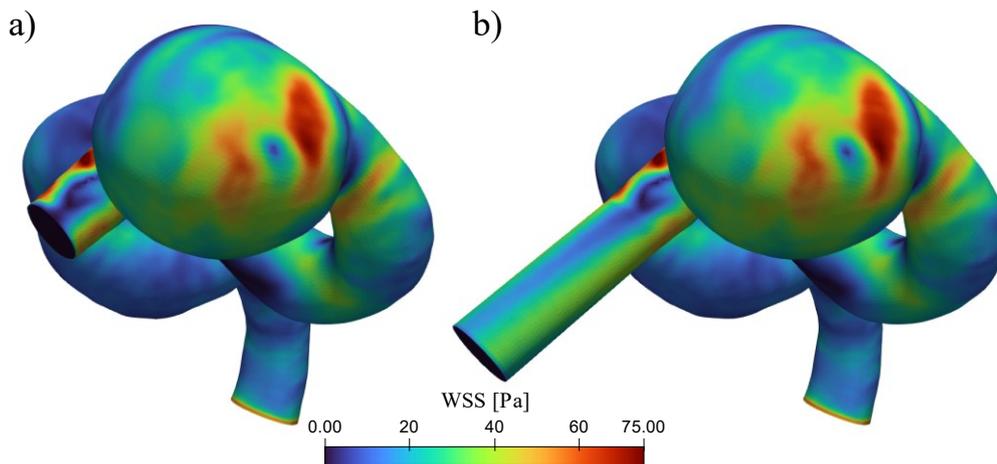


Figura 3.25. Campo de WSS en la cúpula del aneurisma con diferentes longitudes de la arteria en la salida: a) longitud pequeña y b) longitud grande.

En la **Tabla 3.3** se resumen los valores máximos de WSS reportados en ambos casos, tanto para la cúpula como para el cuello del aneurisma.

Tabla 3.3. Comparación de valores máximos de WSS según la longitud de la arteria en la salida del aneurisma.

| Caso analizado | Valor máximo de WSS [Pa]: | |
|---------------------|---------------------------|--------------|
| | en la cúpula | en el cuello |
| Figura 3.24a | 73.35 | 247.57 |
| Figura 3.24b | 75.51 | 253.35 |

Al no observar diferencias importantes, se opta por utilizar la geometría con una región de salida menos extensa en el resto de las simulaciones, priorizando la eficiencia computacional sin comprometer a precisión de los resultados.

3.4.2 Modelos newtonianos y no newtonianos

Como se analizó en la Sección 3.2.3, la sangre es un fluido no newtoniano cuya viscosidad varía con la tasa de corte. Este comportamiento puede modelarse mediante modelos reológicos como el de Casson, que capturan la disminución de la viscosidad a medida que aumenta la tasa de corte. Sin embargo, en muchas simulaciones se adopta un modelo newtoniano por su simplicidad computacional, especialmente cuando el flujo sanguíneo alcanza tasas de corte elevadas, en las cuales el comportamiento tiende a ser más lineal.

Con el objetivo de evaluar el impacto de esta elección reológica en los resultados hemodinámicos, en esta sección se comparan simulaciones realizadas con ambos modelos reológicos para dos geometrías distintas de la base de datos AneuriskWeb: los casos C0034 y

C0005. En cada uno, se realizaron dos simulaciones idénticas en términos de geometría y condiciones de contorno, modificando únicamente el modelo constitutivo del fluido.

La **Figura 3.26** muestra la relación entre la viscosidad dinámica y la tasa de corte para los modelos newtoniano y de Casson. Los modelos difieren significativamente a muy bajas tasas de corte, pero exhiben un comportamiento similar a altas tasas de corte.

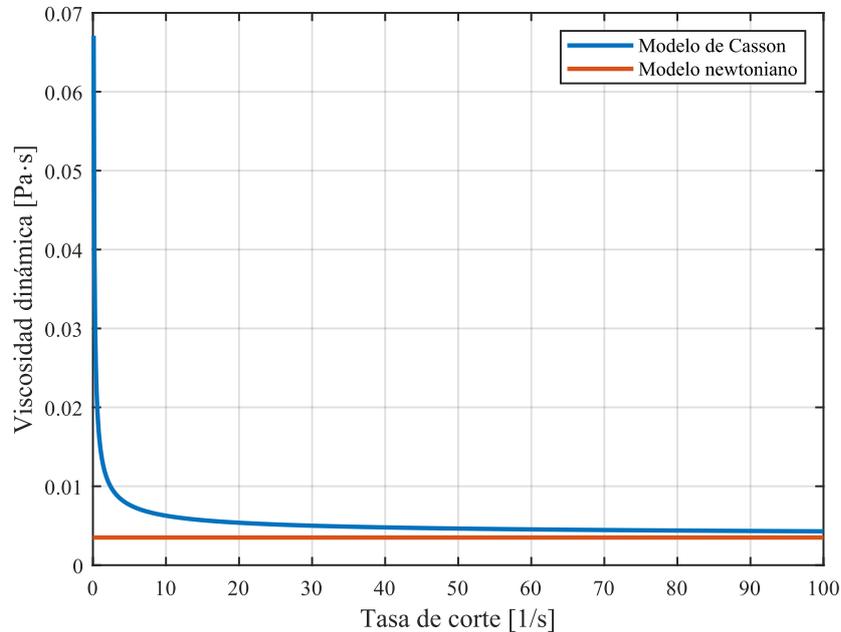


Figura 3.26. Viscosidad dinámica en función de la tasa de corte para los modelos newtoniano y de Casson.

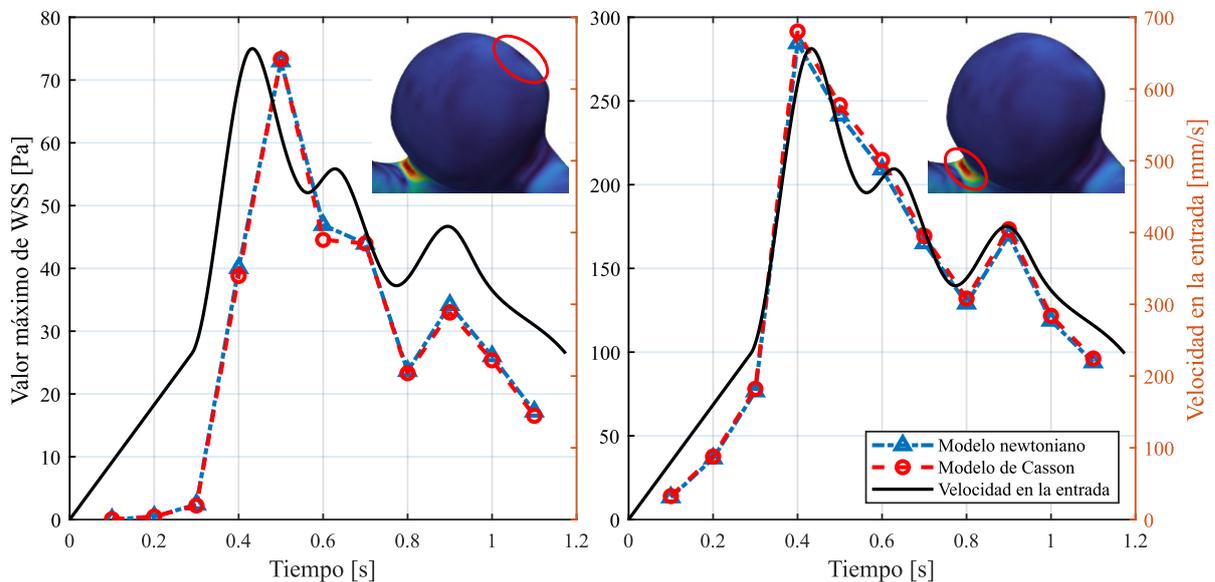


Figura 3.27. Comparación del valor máximo de WSS en la cúpula y el cuello del caso C0034 entre los dos modelos reológicos. La curva de velocidad en la entrada se incluye como referencia temporal. Las dos gráficas comparten las mismas variables en cada uno de los ejes de coordenadas.

Las **Figura 3.27** y **Figura 3.28** presentan la evolución en el tiempo del WSS en la cúpula y el cuello del aneurisma para los casos C0034 y C0005, respectivamente. En ambos casos se observa que las curvas obtenidas con ambos modelos prácticamente se superponen a lo largo del ciclo cardíaco. Esto indica que, bajo las condiciones de flujo simuladas, el uso de un modelo newtoniano no introduce grandes variaciones en la estimación del WSS máximo.

Este resultado es consistente con estudios previos [45], donde también se reportaron diferencias mínimas al comparar modelos newtonianos y no newtonianos en simulaciones de aneurismas cerebrales. En ambos casos analizados, se observa además una correlación temporal entre los valores máximos de WSS y los máximos y mínimos de la velocidad en la entrada, lo que reafirma el carácter pulsátil del WSS.

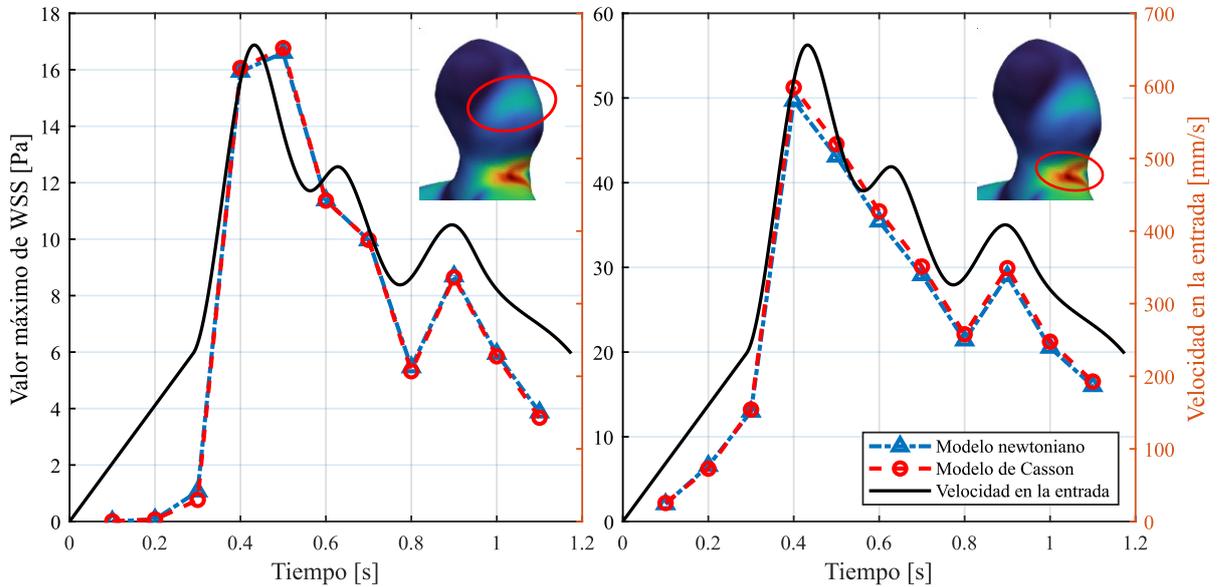


Figura 3.28. Valor máximo de WSS en la cúpula y cuello del caso C0005 para los dos modelos reológicos. Se ha representado la curva de velocidad impuesta en la entrada del dominio para mostrar la concordancia en los resultados obtenidos.

Otro patrón común observado en los dos casos es que los valores máximos de WSS se alcanzan en el cuello del aneurisma, superando los valores registrados en la cúpula. Esta diferencia puede tener implicancias en la evolución del aneurisma, ya que las zonas de mayor esfuerzo podrían ser más susceptibles a cambios en la pared vascular.

En conjunto, los resultados sugieren que, al menos para las condiciones hemodinámicas simuladas en los casos C0034 y C0005, el modelo newtoniano es una aproximación válida que permite obtener estimaciones confiables del WSS con un menor costo computacional. Sin embargo, esta conclusión no necesariamente se generaliza a todos los casos, ya que en aneurismas con zonas de bajo flujo o geometrías más complejas, el uso de modelos no newtonianos podría resultar más relevante.

3.4.3 Análisis del efecto transitorio en simulaciones con múltiples ciclos

Con el objetivo de evaluar el efecto transitorio en los resultados de las simulaciones del caso C0034, se realizó una simulación considerando cuatro ciclos cardíacos completos. La **Figura 3.29** muestra la condición de contorno de velocidad impuesta en la entrada del dominio, donde se aprecian los cuatro ciclos sucesivos.

El análisis se centra en estimar si los resultados alcanzan un régimen periódico estable o si persisten efectos transitorios que afecten la interpretación de los resultados. Para ello, se analizó la evolución del valor máximo del WSS en las dos regiones del aneurisma consideradas como las más críticas: el cuello y la cúpula, considerando en cada caso el instante correspondiente al pico sistólico en cada ciclo.

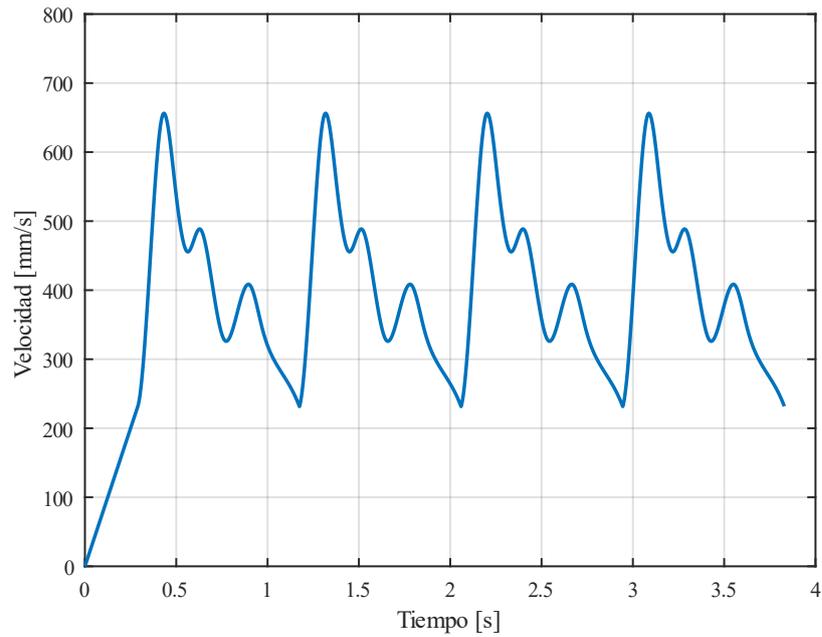


Figura 3.29. Variación de la velocidad en la entrada del dominio computacional impuesta como condición de contorno. Inicialmente se impone una variación lineal para suavizar el inicio de la simulación.

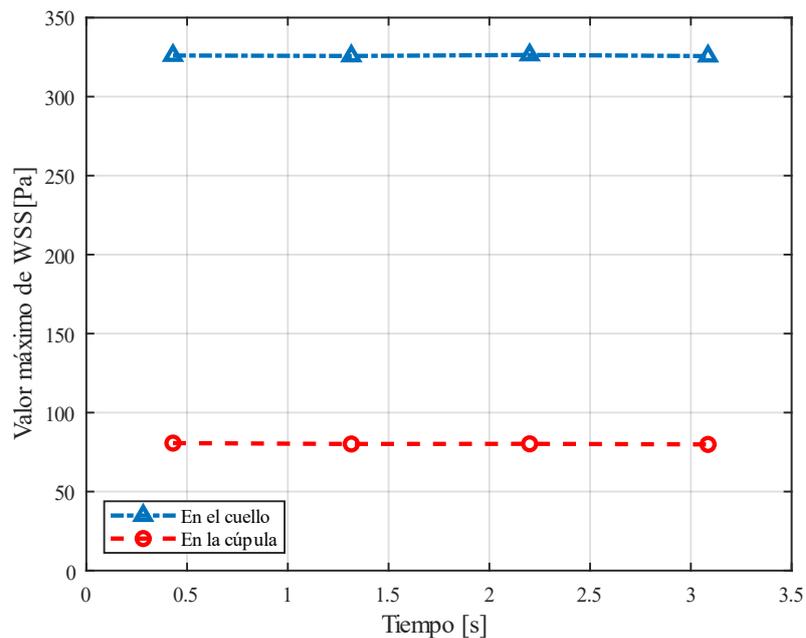


Figura 3.30. Valores máximos de WSS en el cuello y cúpula del aneurisma, en cuatro ciclos cardíacos. Los valores obtenidos varían ligeramente.

Como puede apreciarse en la **Figura 3.30**, los valores máximos de WSS presentan una variación muy leve entre ciclos consecutivos, lo que sugiere que la solución numérica alcanza rápidamente un comportamiento periódico.

Para cuantificar esta observación, se calculó la variación porcentual relativa entre los valores máximos de WSS de cada ciclo con respecto al último, bajo el supuesto de que el cuarto ciclo representa el estado más estable. La variación se define como

$$\Delta_{\text{rel}}^i = \frac{\|\mathbf{t}_{\text{WSS}_i}\| - \|\mathbf{t}_{\text{WSS}_4}\|}{\|\mathbf{t}_{\text{WSS}_4}\|} 100\%, i = 1,2,3, \quad (3.30)$$

donde $\|t_{WSS_i}\|$ representa el valor máximo de WSS en el i -ésimo ciclo, y $\|t_{WSS_4}\|$ el correspondiente al cuarto ciclo.

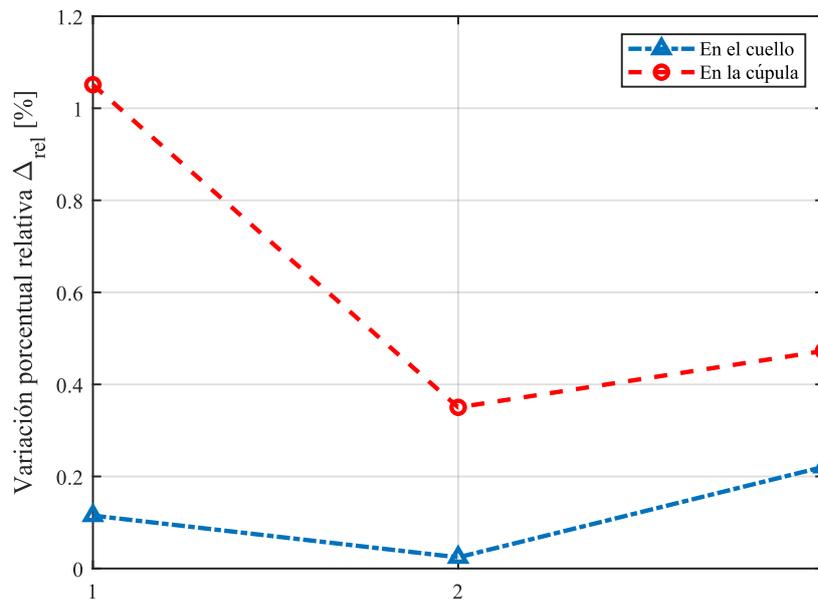


Figura 3.31. Variación porcentual relativa de los valores máximos de WSS reportados en el cuello y en la cúpula del aneurisma C0034. En cualquier caso, la variación se considera insignificante.

Los resultados, representados en la **Figura 3.31**, muestran que la variación relativa entre ciclos es inferior al 1% en las dos zonas analizadas, lo que indica que el efecto transitorio es prácticamente despreciable.

Por lo tanto, en el resto del trabajo se optará por simular únicamente un único ciclo cardíaco, para reducir el costo computacional sin comprometer la precisión de los resultados.

CAPÍTULO 4 MECÁNICA DE LA PARED ARTERIAL

4.1 INTRODUCCIÓN

El análisis del flujo sanguíneo en aneurismas intracraneales requiere considerar la interacción entre el fluido y la estructura vascular. Comprender la biomecánica de los aneurismas exige estudiar la respuesta del tejido ante las fuerzas que ejerce el flujo sanguíneo, lo que implica analizar tanto los modelos constitutivos que describen este comportamiento como los principios físicos en los que se basan.

En los últimos años, los avances en modelos mecánicos han permitido simular esta interacción utilizando geometrías específicas de pacientes obtenidas a partir de imágenes médicas. Sin embargo, estas imágenes representan tejidos que ya están sometidos a presión sanguínea. Aun así, muchas simulaciones parten del supuesto de que esta configuración corresponde a un estado libre de tensiones, lo que puede conducir a una sobrestimación de las deformaciones y esfuerzos en la pared.

Para abordar esta limitación, existen ciertos métodos que estiman la configuración libre de tensiones, conocida como estado pretensionado. Si las deformaciones son pequeñas, el estado pretensionado es único y puede hallarse mediante métodos estándar existentes. Sin embargo, la pared arterial experimenta grandes deformaciones, lo que implica que pueden existir múltiples estados de tensión que satisfagan el equilibrio con las cargas externas que actúan. En consecuencia, encontrar una configuración pretensada realista se convierte en un desafío no trivial.

A lo largo del capítulo se desarrolla:

- una síntesis de los principios de la mecánica del continuo (Sección 4.2),
- el marco general del método de elementos finitos y su aplicación mediante CalculiX (Sección 4.3),
- la formulación teórica de los modelos constitutivos más utilizados para describir el comportamiento de la pared arterial (Sección 4.4),
- distintos métodos para estimar el estado pretensado en aneurismas (Sección 4.5), y
- una propuesta basada en el algoritmo de Sellier para incorporar el estado pretensado en las simulaciones que se detallan en el próximo capítulo (Sección 4.6).

4.2 FUNDAMENTOS DE MECÁNICA DEL CONTINUO

La pared arterial, al ser modelada como un medio continuo, requiere ser analizada mediante los principios de la mecánica del continuo. Antes de introducir los modelos constitutivos que describen su comportamiento mecánico, resulta necesario repasar algunos conceptos fundamentales que se utilizarán en las siguientes secciones. Entre ellos se incluye la formulación de la dinámica en sólidos deformables y la noción de deformación finita.

El análisis dinámico de sólidos deformables se basa en las ecuaciones de conservación del momento lineal y angular para un cuerpo continuo. Estas ecuaciones relacionan las tensiones internas con las fuerzas externas aplicadas.

Consideremos un sólido que se deforma bajo la acción de cargas externas. La geometría se deforma desde una configuración de referencia Ω_0 a una configuración actual Ω , tal como se muestra en la **Figura 4.1**.

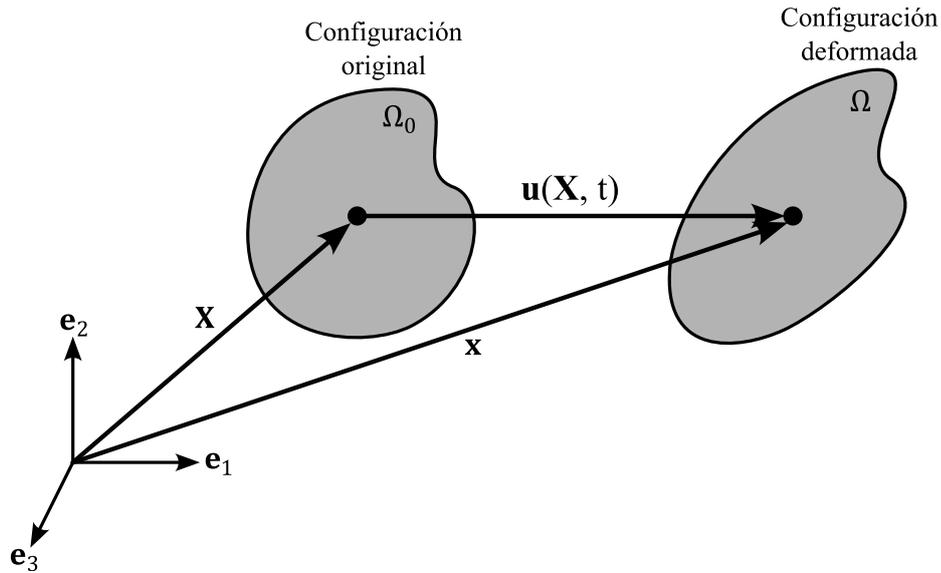


Figura 4.1. Vector de desplazamiento que caracteriza la deformación de un sólido.

Si \mathbf{X} representa la posición de una partícula en Ω_0 y \mathbf{x} su posición actual, entonces el vector de desplazamiento está definido como

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (4.1)$$

Este vector \mathbf{u} describe cómo se mueve cada punto material durante la deformación. En la **Figura 4.1** se ilustra gráficamente esta relación entre las dos configuraciones.

Derivando respecto de \mathbf{X} , se define el gradiente de deformación²⁰ \mathbf{F} , que mide los cambios locales de forma y orientación del sólido

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}, \quad (4.2)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad, $\nabla_0 = \partial / \partial \mathbf{X}$ es el operador gradiente en la configuración de referencia, y $\nabla_0 \mathbf{u} = \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{X}$ es el gradiente del campo de desplazamiento.

La ecuación de conservación del momento lineal, bajo la acción de una fuerza volumétrica \mathbf{b} , se expresa en la configuración actual Ω como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}, \quad (4.3)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy²¹ y ρ la densidad del sólido. Nótese que las derivadas se toman sobre el dominio Ω . Esta ecuación también puede expresarse en la configuración de referencia Ω_0 utilizando el primer tensor de Piola-Kirchhoff²² \mathbf{P}

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}. \quad (4.4)$$

²⁰ Demostración

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} (X_i + u_i),$$

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j},$$

que puede expresarse de forma vectorial como

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}.$$

²¹ El tensor de tensiones de Cauchy refiere tanto la fuerza como el área a la geometría deformada, y por eso también es conocido como el esfuerzo real.

²² El primer tensor de Piola-Kirchhoff refiere la fuerza en la geometría deformada y el área en la geometría de referencia.

Además, la conservación del momento angular impone que el tensor de Cauchy sea simétrico

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (4.5)$$

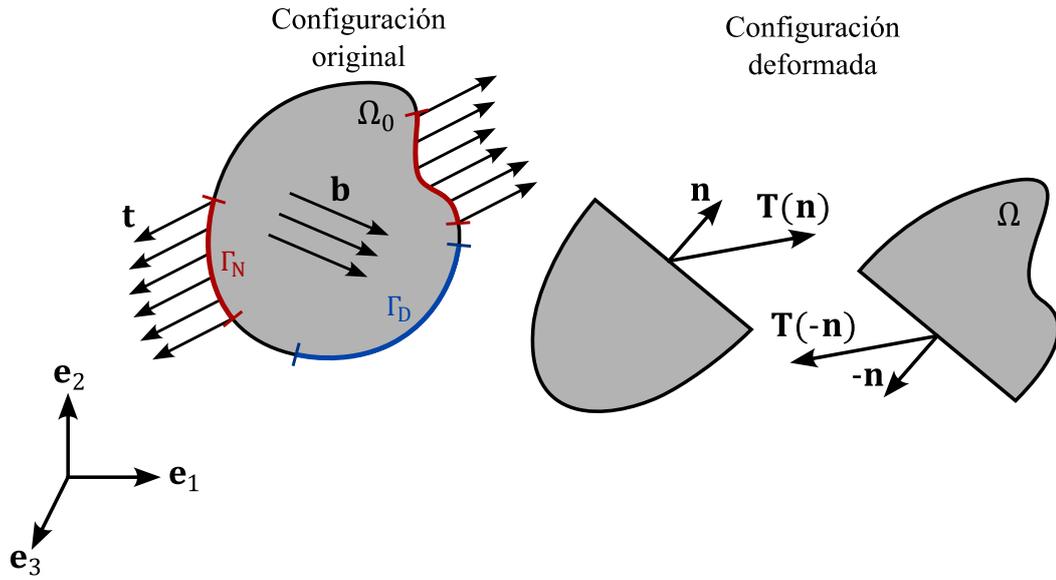


Figura 4.2. En la configuración original, se observa cómo actúan las fuerzas superficiales \mathbf{t} y volumétricas \mathbf{b} . Además, la frontera de Dirichlet se representa en azul y la de Neumann en rojo. En la configuración deformada se muestra el vector tensión $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ que actúan sobre el volumen interior del sólido, el cual es consecuencia de las cargas externas aplicadas.

Para completar la formulación fuerte del problema, deben especificarse las condiciones de contorno, que dividen la frontera $\partial\Omega_0$ del dominio material en dos partes disjuntas:

- Condiciones de Dirichlet: donde se imponen desplazamientos prescritos

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \text{ en } \Gamma_D. \quad (4.6)$$

- Condiciones de Neumann: donde se aplican tensiones superficiales

$$\mathbf{t} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}, t) \text{ en } \Gamma_N, \quad (4.7)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior en la frontera y $\bar{\mathbf{t}}$ la tensión superficial prescrita en la configuración de referencia.

Estas condiciones de contorno están representadas en la **Figura 4.2**, que muestra:

- En la configuración de referencia Ω_0 , las fuerzas volumétricas \mathbf{b} distribuidas en todo el volumen y las tensiones superficiales $\bar{\mathbf{t}}$ aplicadas sobre Γ_N .
- En la configuración deformada Ω , el sólido separado en dos partes para ilustrar el vector de tensión interno $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ ²³, que surge del esfuerzo transmitido a través de una sección transversal imaginaria del material.

En resumen, la formulación fuerte del problema queda definida por el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{b} &= \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}, & \mathbf{X} \in \Omega_0, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}, & \mathbf{X} \in \Gamma_D, \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}}, & \mathbf{X} \in \Gamma_N. \end{aligned} \quad (4.8)$$

²³ La notación $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ muestra que el vector tensión interno depende de la normal del plano interno, denotada como \mathbf{n} .

4.3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

La resolución analítica de la Ecuación (4.8) es posible solo en casos simples, por lo que se recurre a métodos numéricos como el método de elementos finitos (*finite element method*, FEM). El FEM discretiza el sólido en un conjunto finito de elementos, sobre los cuales las ecuaciones del problema se resuelven numéricamente. Este método se fundamenta en una formulación débil de las ecuaciones de movimiento, que puede obtenerse a partir del principio de trabajo virtual, lo cual permite aproximar las soluciones mediante funciones de interpolación definidas en cada elemento.

El principio del trabajo virtual establece que, para cualquier campo de desplazamientos virtuales compatible con las condiciones de contorno cinemáticas, el trabajo virtual interno realizado por los esfuerzos es igual al trabajo virtual externo debido a las cargas aplicadas.

Multiplicando la Ecuación (4.4) por un campo de desplazamiento virtual $\delta \mathbf{u}$, que satisface $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ en Γ_D , e integrando sobre la configuración de referencia Ω_0

$$\int_{\Omega_0} \left[\nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho \left(\mathbf{b} - \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right) \right] \delta \mathbf{u} dV = 0. \quad (4.9)$$

Aplicando el teorema de la divergencia y reordenando los términos, se obtiene el principio del trabajo virtual

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Omega_0} \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \cdot \delta \mathbf{u} dV, \quad (4.10)$$

donde \mathbf{S} es el segundo tensor de Piola-Kirchhoff²⁴, \mathbf{E} es el tensor de Green-Lagrange y $\bar{\mathbf{t}}$ es el vector de tensión superficial prescrito. El miembro izquierdo de la Ecuación (4.10) es conocido como el trabajo virtual interno. El primer término del miembro derecho es el trabajo virtual debido a las fuerzas superficiales $\bar{\mathbf{t}}$, el segundo término es debido a las fuerzas volumétricas \mathbf{b} que actúan en el sólido (trabajo = fuerza \times desplazamiento) y el último término es debido a la inercia.

Es importante destacar que el tensor de Green-Lagrange se define como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (4.11)$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ es el tensor derecho de Cauchy-Green. Al sustituir la Ecuación (4.2), se puede reescribir \mathbf{E} en términos del gradiente de desplazamiento

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u})^T (\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}) - \mathbf{I}], \quad (4.12)$$

simplificando se obtiene

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla_0 \mathbf{u}^T + \nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u}^T \nabla_0 \mathbf{u}). \quad (4.13)$$

Este desarrollo muestra el origen de la no linealidad geométrica en la teoría de grandes deformaciones. Mientras que los dos primeros términos son lineales, el tercer término es cuadrático, lo que introduce no linealidad en la relación entre desplazamientos y deformaciones.

En simulaciones biomecánicas como el estudio de aneurismas cerebrales, donde las paredes arteriales pueden experimentar grandes deformaciones bajo la acción de la presión sanguínea,

²⁴ El segundo tensor de Piola-Kirchhoff es una medida de las fuerzas que actúan en Ω_0 , y se calcula como

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T},$$

donde $\mathbf{J} = \det(\mathbf{F})$ es el jacobiano, el cual define la relación del cambio de volumen entre la geometría de referencia y deformada.

esta no linealidad es crucial. Ignorarla puede llevar a errores significativos en la predicción del estado pretensionado.

La Ecuación (4.10) contiene términos de tensiones (como el segundo tensor de Piola-Kirchhoff) y desplazamientos. Sin embargo, en el FEM las incógnitas primarias suelen ser los desplazamientos, los cuales están relacionados con las deformaciones. Por lo que, es necesario contar con una ecuación constitutiva que describa el comportamiento macroscópico de un material en términos de la relación entre tensión y deformación.

Los modelos materiales generalmente se describen mediante una función de densidad de energía de deformación $W(\mathbf{E})$, la cual es una propiedad intrínseca del modelo material que cuantifica la energía almacenada por deformación. A partir de esta función, se obtiene la relación constitutiva

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (4.14)$$

Esta relación depende del tipo de material y se analiza con mayor detalle en la Sección 4.4.

Finalmente, para implementar FEM, el volumen de referencia Ω_0 se discretiza en un conjunto finito de elementos

$$\Omega_0 = \sum_e \Omega_0^e. \quad (4.15)$$

Dentro de cada elemento, el campo de desplazamiento se aproxima mediante funciones de forma $\phi_i(\mathbf{x})$ y valores nodales \mathbf{u}_i

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i. \quad (4.16)$$

Dividiendo cada una de las integrales de la Ecuación (4.10) en cada volumen y usando las funciones de forma, se transforma la formulación variacional en un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales en el espacio, tal como

$$\mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}, \quad (4.17)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez que representa las propiedades del material, \mathbf{M} es la matriz de masas y \mathbf{F} es el vector de fuerzas que representa las cargas externas aplicadas. Esta es la ecuación fundamental que resuelve el FEM para problemas estructurales no lineales, donde la matriz \mathbf{K} depende del vector de desplazamiento \mathbf{u} .

En este trabajo, dicho sistema se resuelve utilizando el *software* CalculiX, el cual implementa métodos de integración temporal adecuados para simulaciones dinámicas, como el método α (ver Anexo D.I).

Dado que las paredes arteriales en aneurismas cerebrales presentan una geometría de pared delgada respecto a sus demás dimensiones, se adopta una estrategia de discretización basada en elementos tipo *shell*. Estos elementos permiten representar la superficie media del espesor de la pared arterial, facilitando la generación de mallas eficientes y reduciendo el costo computacional frente a modelos volumétricos.

En particular, se utilizan elementos triangulares de tres nodos. Aunque definidos como elementos bidimensionales, CalculiX internamente genera elementos tridimensionales tipo *wedge* de seis nodos, que incorporan el espesor físico de la pared arterial como parte de la geometría computacional. Cada elemento tipo *wedge* se construye a partir de un triángulo base y su extrusión en la dirección normal a la superficie, formando un prisma con dos caras triangulares y tres caras laterales cuadriláteras (ver **Figura 4.3**).

Esta conversión permite aplicar la formulación tridimensional estándar de FEM sobre una malla se define superficialmente, sin que el usuario deba construir explícitamente un mallado volumétrico. Las condiciones de contorno y las cargas aplicadas sobre los nodos o elementos *shell* se transfieren internamente al modelo tridimensional, respetando tanto la cinemática como el equilibrio mecánico de la estructura. Este procedimiento asegura una representación física precisa, manteniendo al mismo tiempo la simplicidad del preprocesado.

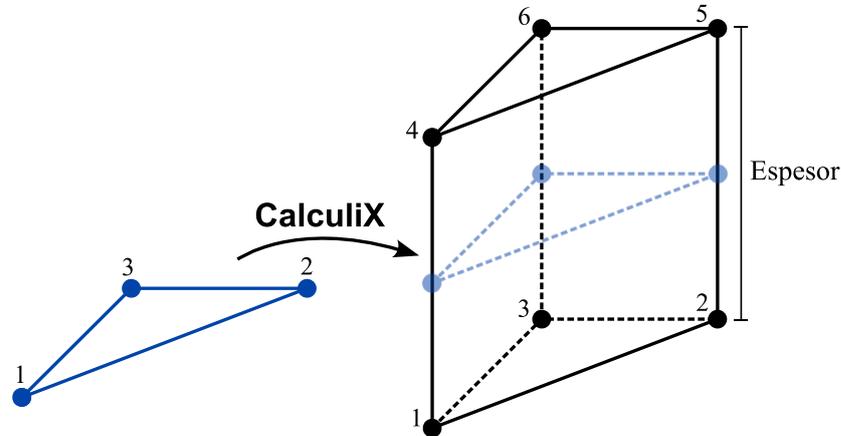


Figura 4.3. Expansión tridimensional de un elemento *shell* en CalculiX. A partir del triángulo que representa la superficie media, se genera un elemento tipo *wedge* de seis nodos mediante la extrusión del espesor.

4.4 MODELOS MATERIALES

Como se introdujo en la Sección 4.3, el comportamiento mecánico de los materiales continuos se describe mediante modelos constitutivos, que definen la relación entre tensiones y deformaciones específica del material.

En particular, los tejidos arteriales suelen modelarse como materiales hiperelásticos, es decir, aquellos cuyo trabajo de deformación es independiente de la trayectoria y se caracterizan por la existencia de una función de densidad de energía de deformación W , que depende de las medidas de deformación. Esta función contiene las propiedades mecánicas intrínsecas del material y permite obtener las tensiones internas mediante derivación respecto al estado de deformación.

Tal como se expuso en la Ecuación (4.14), si se utiliza el tensor de Green-Lagrange \mathbf{E} como medida de deformación, el segundo tensor de Piola-Kirchhoff se obtiene como

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}. \quad (4.18)$$

Alternativamente, dado que \mathbf{E} está relacionado con el tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} , también puede definirse la función de energía en términos de \mathbf{C} , lo que resulta conveniente para muchos modelos hiperelásticos

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}. \quad (4.19)$$

La existencia de W se postula independientemente del proceso de deformación, lo que hace que los modelos hiperelásticos sean especialmente útiles en contextos biomecánicos donde las trayectorias de deformación pueden ser complejas y no predecibles.

Distintas expresiones de $W(\mathbf{E})$ o $W(\mathbf{C})$ caracterizan diferentes tipos de respuesta mecánica. Estas funciones pueden ajustarse a datos experimentales obtenidos *in vitro* o derivarse de consideraciones microestructurales del tejido. Su elección influye significativamente en la precisión de las simulaciones realizadas mediante el FEM, especialmente cuando se trata de

predecir el estado tensional en estructuras como los aneurismas cerebrales bajo carga fisiológica.

A continuación, se presentan tres modelos constitutivos ampliamente utilizados en la mecánica del continuo no lineal aplicada a tejidos blandos.

4.4.1 Modelo de Saint Venant-Kirchhoff

El modelo de Saint Venant-Kirchhoff [46] representa uno de los modelos hiperelásticos más simples y ampliamente utilizados como punto de partida en la mecánica no lineal de sólidos deformables. Se trata de un material isótropo cuya respuesta constitutiva se basa en una extensión del modelo lineal de Hooke al régimen de grandes desplazamientos y rotaciones.

En elasticidad lineal, la relación entre el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ y el tensor de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}$, que se define como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (4.20)$$

está dada por la ley de Hooke generalizada

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.21)$$

siendo λ y μ los parámetros de Lamé²⁵, y $\text{tr}(\cdot)$ denota la traza del tensor. Esta relación es válida únicamente para materiales sometidos a pequeñas deformaciones, donde el campo de desplazamientos y sus gradientes son suficientemente pequeños como para despreciar el término cuadrático de la Ecuación (4.13).

Para extender este modelo al régimen de grandes deformaciones, se reemplaza el tensor de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}$ por el tensor de Green-Lagrange \mathbf{E} , y el tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ por el segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , obteniendo el modelo de Saint Venant-Kirchhoff

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}. \quad (4.22)$$

Esta expresión también puede derivarse a partir de la función de energía de deformación

$$W(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} [\text{tr}(\mathbf{E})]^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2), \quad (4.23)$$

utilizando la Ecuación (4.19).

Una ventaja fundamental del modelo de Saint Venant-Kirchhoff es su simplicidad matemática, lo cual facilita su implementación computacional en simulaciones mediante el FEM. Además, cualquier material elástico sometido a pequeñas deformaciones se aproxima asintóticamente a este comportamiento, lo que lo convierte en un modelo de referencia en el límite lineal.

Sin embargo, el modelo presenta limitaciones cuando se trabaja con grandes deformaciones. A pesar de estar definido en términos de deformaciones finitas, no es realmente válido para grandes deformaciones, ya que la relación lineal entre \mathbf{S} y \mathbf{E} implica que el modelo no puede capturar el comportamiento altamente no lineal que presentan muchos materiales, como tejidos blandos o cauchos. Además, la función de energía $W(\mathbf{E})$ es cuadrática en \mathbf{E} , lo que implica que es convexa en todo el dominio de deformación, lo cual no es físico en grandes compresiones.

Por esta razón, aunque el modelo de Saint Venant-Kirchhoff se formula en el marco de la elasticidad no lineal, su rango de validez es aquel donde las deformaciones son pequeñas, aun cuando los desplazamientos sean grandes.

²⁵ Los parámetros de Lamé son dos constantes elásticas que caracterizan por completo el comportamiento elástico lineal de un sólido isótropo en pequeñas deformaciones.

4.4.2 Modelo de Ciarlet

Una alternativa para modelar materiales isótropos en grandes deformaciones es el modelo desarrollado por Philippe G. Ciarlet. La función de densidad de energía de deformación propuesta por Ciarlet tiene la forma

$$W(\mathbf{C}) = \frac{\lambda}{4} (\text{III}_C - \ln \text{III}_C - 1) + \frac{\mu}{4} (\text{I}_C - \ln \text{III}_C - 3), \quad (4.24)$$

donde $\text{I}_C = \text{tr}(\mathbf{C})$ y $\text{III}_C = \det(\mathbf{C})$ son el primer y tercer invariante del tensor derecho de Cauchy-Green, respectivamente.

Esta formulación puede considerarse una extensión del modelo de Saint Venant-Kirchhoff, donde se introducen términos logarítmicos que mejoran la consistencia física del modelo en grandes compresiones o estiramientos, especialmente cuando el volumen tiende a cero. Bajo esta condición, la energía de deformación puede crecer sin límites reflejando el aumento de tensión.

A partir de esta función de energía, y usando la Ecuación (4.19), se obtiene la ecuación constitutiva

$$\mathbf{S} = \frac{\lambda}{2} (\det(\mathbf{C}) - 1) \mathbf{C}^{-1} + \mu (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}). \quad (4.25)$$

Este resultado muestra cómo la tensión depende explícitamente de la inversa de \mathbf{C} , lo cual introduce no linealidad adicional, y permite una mayor fidelidad en la representación de la rigidez del material bajo compresión.

4.4.3 Modelo de Mooney-Rivlin

El modelo de Mooney-Rivlin [47] es uno de los modelos hiperelásticos más utilizados para describir el comportamiento de materiales incompresibles e isotrópicos, como cauchos vulcanizados o ciertos tejidos blandos. Este modelo fue propuesto originalmente por Melvin Mooney en 1940 y posteriormente reformulado por Ronald Rivlin en 1948, en términos de los invariantes del tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} .

La función densidad de energía de deformación asociada tiene la forma

$$W(\mathbf{C}) = C_1 (\text{I}_C - 3) + C_2 (\text{II}_C - 3), \quad (4.26)$$

donde C_1 y C_2 son constantes que se determinan experimentalmente para cada material en concreto, y $\text{II}_C = 1/2 [\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)]$ es el segundo invariante de \mathbf{C} .

Este modelo puede considerarse una extensión del modelo Neo-Hookeano, que corresponde al caso particular en el que $C_2 = 0$. La inclusión de este término, permite mejorar la capacidad del modelo para describir situaciones complejas de deformación, como tracción biaxial o cortante puro.

El modelo de Mooney-Rivlin destaca por su simplicidad matemática y su capacidad para reproducir razonablemente bien el comportamiento de materiales sometidos a grandes estiramientos, dentro de un rango típico de hasta 100% de elongación axial. Sin embargo, presenta algunas limitaciones: no predice correctamente el endurecimiento del material a grandes deformaciones, tiende a fallar en escenarios de compresión pura y, en ensayos de corte puro, ha mostrado una tendencia opuesta al comportamiento real del espesor del material, indicando engrosamiento en lugar de adelgazamiento.

4.5 ESTADO PRETENSIONADO

Numerosos enfoques se han propuestos para incorporar el estado pretensionado en simulaciones de FSI de aneurismas cerebrales, cada uno con sus ventajas y limitaciones. Algunos buscan recuperar una configuración libre de tensiones que, al someterse a una presión interna conocida, reproduzca la forma del aneurisma obtenida de imágenes médicas. Otros, en cambio, suponen que la geometría inicial permanece fija y estiman directamente el campo de tensiones que equilibra dicha configuración bajo carga.

Debido a la naturaleza hiperelástica y no lineal del tejido arterial, la resolución numérica de estos enfoques requiere algoritmos iterativos, que pueden ser computacionalmente costosos. En general, la mayoría de los métodos se basan en resolver la ecuación de equilibrio mecánico mediante esquemas iterativos, y su precisión depende del modelo constitutivo adoptado, la geométrica y los criterios de convergencia aplicados. No obstante, no existe aún un consenso sobre el método más adecuado, ya que su efectividad puede variar según el tipo de aneurisma, las condiciones de carga o la calidad de la imagen médica.

En las siguientes secciones, se presentan y comparan distintos métodos empleados en la literatura para estimar el estado pretensionado de aneurismas cerebrales.

4.5.1 Formulación Lagrangiana Actualizada Modificada

Una estrategia para incorporar el estado pretensionado sin necesidad de estimar una configuración libre de tensiones es la formulación lagrangiana actualizada modificada (*Modified Updated Lagrangian Formulation*, MULF), desarrollada por Gee et al. [48]. Este método parte de una geometría conocida, como las adquiridas mediante imagenología médica, que ya se encuentra bajo cargas fisiológicas *in vivo*. En lugar de reconstruir una configuración sin tensiones, el objetivo es imponer un estado de tensiones internas dentro de esa configuración observada.

La idea central del método es aplicar una carga superficial conocida $\bar{\mathbf{t}}$ de manera incremental, en una serie de pasos sucesivos. En cada paso, denotado por i , se incrementa la carga y se resuelve la Ecuación (4.10) manteniendo fija la configuración original Ω_0 . En este contexto, se asume que el tejido vascular se encuentra en equilibrio estático ($\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$) y que no actúan fuerzas volumétricas ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$), por lo que la ecuación de equilibrio se reduce a

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0. \quad (4.27)$$

Tal como se definió en la Sección 4.2, Ω_0 representa la configuración de referencia. En el método MULF, esta configuración corresponde a la geometría inicial obtenida a partir de imágenes médicas, la cual está ya sometida a presión sanguínea. Por lo tanto, Ω_0 no representa un estado libre de tensiones, sino una configuración en equilibrio con las cargas fisiológicas existentes. A lo largo del método, la geometría permanece inalterada: las coordenadas nodales no se actualizan, y las deformaciones se acumulan de forma puramente virtual.

Cada incremento de carga genera un gradiente de deformación incremental \mathbf{F}_{i+1} , definido como

$$\mathbf{F}_{i+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{i+1}}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad (4.28)$$

el cual describe cómo se deformaría la estructura si pudiera adoptar una nueva configuración bajo ese incremento de carga. Aunque esta deformación no se aplica físicamente al dominio computacional, sí se acumula para construir una historia del estado de tensiones internas.

Esta acumulación se realiza de forma multiplicativa mediante el gradiente de deformación histórico $\tilde{\mathbf{F}}$, que se actualiza en cada paso de carga como

$$\tilde{\mathbf{F}} \leftarrow \mathbf{F}_{i+1} \tilde{\mathbf{F}}. \quad (4.29)$$

Inicialmente, $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{I}$, representando un estado sin deformación acumulada. Este valor va evolucionando en función de los incrementos de carga aplicados.

Además, se actualiza la inverso de la matriz jacobiana, que relaciona el sistema de referencia con el espacio isoparamétrico

$$\mathbf{J}_{i+1}^{-1} = \mathbf{J}_i^{-1} \mathbf{F}_{i+1}^{-1}, \quad (4.30)$$

donde \mathbf{J}_i^{-1} corresponde al paso anterior. Esta operación muestra cómo la deformación virtual afectaría la relación entre la configuración de referencia y la configuración deformada.

El procedimiento se repite iterativamente hasta que la carga aplicada sea igual a la carga fisiológica real. En este punto, el sistema permanece en equilibrio estático bajo dicha carga, pero con un estado de tensiones internas acorde a una historia de deformación implícita.

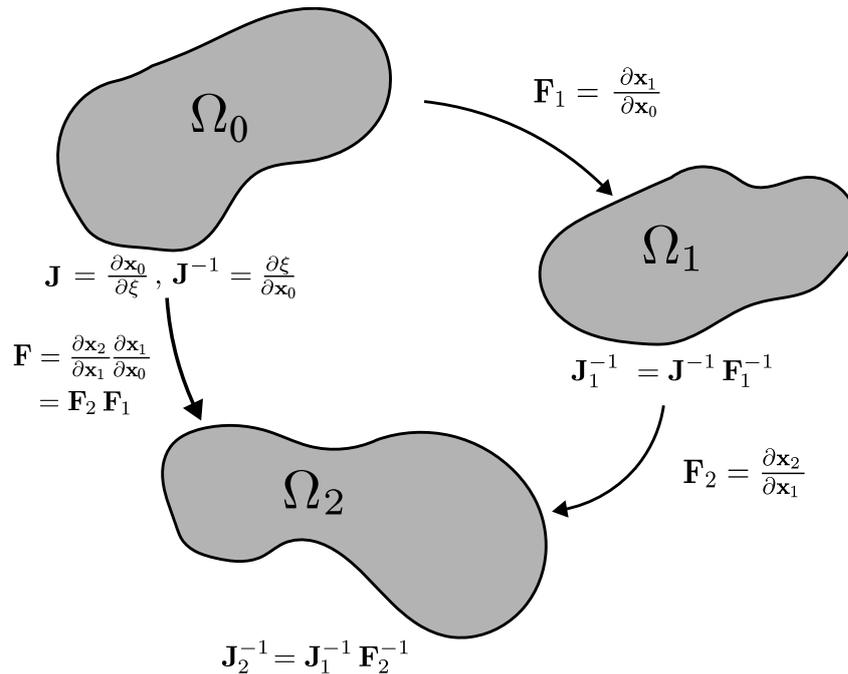


Figura 4.4. Visión general del procedimiento incremental del método MULF. Aunque se representan configuraciones virtuales intermedias (Ω_1 , Ω_2), la geometría inicial Ω_0 , correspondiente a la configuración obtenida por imagenología médica, no se modifica. Las flechas indican los gradientes de deformación \mathbf{F}_i , que se acumulan virtualmente sin alterar las posiciones nodales. El gradiente de deformación total \mathbf{F} permite obtener la configuración final Ω_2 a partir de la configuración inicial Ω_0 . La coordenada \mathbf{x}_0 es el equivalente a la coordenada \mathbf{X} , definida en la Sección 4.2. Adaptada de [49].

4.5.2 Pretensado mediante el segundo tensor de Piola-Kirchhoff

Una alternativa para incorporar el estado pretensionado consiste en modificar la formulación del problema estructural mediante una descomposición aditiva del segundo tensor de Piola-Kirchhoff, tal como se plantea en [20].

Este método parte de la formulación fuerte de la conservación del momento lineal, expresada en la Ecuación (4.4), y se multiplica por funciones de prueba vectoriales \mathbf{w} , integrando luego sobre la configuración de referencia Ω_0 , obtenida a partir de imágenes médicas. Aplicando el teorema de la divergencia y la integración por partes, se obtiene la siguiente ecuación

$$\underbrace{\int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{w} dV}_{\text{Energía cinética}} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \mathbf{FS} : \nabla_0 \mathbf{w} dV}_{\text{Energía interna}} = \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV}_{\text{Trabajo de fuerzas de volumen}} + \underbrace{\int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} dA}_{\text{Trabajo por tensión superficial}}, \quad (4.31)$$

donde el primer tensor de Piola-Kirchhoff se expresa como $\mathbf{P} = \mathbf{FS}$.

Para introducir el estado pretensionado, se propone una descomposición aditiva del tensor \mathbf{S} mediante un tensor de pretensión \mathbf{S}_0 , diseñado para equilibrar las fuerzas del flujo sanguíneo cuando no hay desplazamiento ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$). Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior y descartando las fuerzas volumétricas ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$), se obtiene

$$\int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{w} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{F}(\mathbf{S} + \mathbf{S}_0) : \nabla_0 \mathbf{w} dV = \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} dA. \quad (4.32)$$

En ausencia de desplazamientos, el gradiente de deformación $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}$ se reduce a la identidad. Además, el tensor de Green-Lagrange $\mathbf{E} = 1/2(\nabla_0 \mathbf{u}^T + \nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u}^T \nabla_0 \mathbf{u})$ se vuelve cero, y por lo tanto $\mathbf{S} = \partial W / \partial \mathbf{E} = \mathbf{0}$. La Ecuación (4.32) se reduce entonces a

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S}_0 : \nabla_0 \mathbf{w} dV + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} dA = 0, \quad (4.33)$$

donde Γ_N coincide con la interfaz fluido-estructura y $\bar{\mathbf{t}}$ corresponde a la presión ejercida por el flujo sanguíneo, denotada como $\bar{\mathbf{t}}$. Este término $\bar{\mathbf{t}}$ puede obtenerse de una simulación CFD previa bajo el supuesto de pared rígida, realizada sobre la misma geometría Ω_0 y utilizando condiciones de contorno fisiológicas, tal como se detalla en el Capítulo 3.

La Ecuación (4.33) tiene una incógnita tensorial \mathbf{S}_0 y, al ser una ecuación vectorial, admite en principio un número infinito de soluciones. Para encontrar una solución físicamente aceptable, se emplea un procedimiento iterativo que se describe a continuación:

Se comienza con el paso $n = 1$ y se asume un tensor de pretensión inicial nulo $\mathbf{S}_0^1 = \mathbf{0}$. Luego, se repiten los siguientes pasos:

1. En el paso n , se define el tensor de pretensión actual como $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_0^n$ y se asume que el desplazamiento inicial es nulo ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$), lo que implica que $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{S} = \mathbf{0}$, tal como se mencionó anteriormente.
Por ejemplo, en el primer paso, $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_0^1 = \mathbf{0}$.
2. Para t_n a t_{n+1} , se resuelve el siguiente problema variacional: encontrar \mathbf{u} , tal que

$$\int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{w} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{F}(\mathbf{S} + \mathbf{S}_0) : \nabla_0 \mathbf{w} dV + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} dA = 0, \quad (4.34)$$

donde \mathbf{S} se calcula mediante un modelo constitutivo, como los descritos en la Sección 4.4, a partir del desplazamiento \mathbf{u} obtenido en este paso.

Por ejemplo, en el primer paso, la ecuación anterior se simplifica al ser $\mathbf{S}_0 = \mathbf{0}$.

3. Se actualiza el tensor de pretensión para la siguiente iteración como $\mathbf{S}_0^{n+1} = \mathbf{S} + \mathbf{S}_0^n$ y se incrementa n .
Por ejemplo, para el primer paso, $\mathbf{S}_0^2 = \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}_0^1 = \mathbf{S}^1$. Para el próximo paso, $n = 2$, el tensor de pretensión \mathbf{S}_0^2 ya no valdrá cero.

El procedimiento iterativo se repite hasta que el campo de desplazamiento \mathbf{u} tiende a cero. Esto significa que se ha encontrado un tensor \mathbf{S}_0 tal que la geometría Ω_0 está en equilibrio con el flujo sanguíneo, sin sufrir deformaciones adicionales.

4.5.3 Algoritmo de Sellier

El algoritmo de Sellier es otra alternativa para estimar el estado pretensionado que se caracteriza por su naturaleza predominantemente geométrica, lo que hace relativamente insensible al modelo constitutivo del material. Esta característica lo vuelve compatible con la mayoría de los paquetes de FEM comerciales, ya que se apoya en simulaciones directas repetidas del problema mecánico.

En lo sigue, se describe el algoritmo aplicado a un problema bidimensional, definido sobre un dominio Ω_0 , donde el campo de desplazamiento está expresado como un vector con componentes que dependen de las coordenadas cartesianas (e_1, e_2), como se muestra en la **Figura 4.5**.

Antes de detallar los pasos del algoritmo, es necesario establecer la notación utilizada, ilustrada en la **Figura 4.6**.

- Sean $\{M_1^d, M_2^d, \dots, M_L^d\}$ los nodos de la frontera de la configuración deformada conocida, siendo L el número total de nodos. Esta geometría representa la forma del cuerpo bajo carga, a partir de la cual se intenta reconstruir la configuración libre de tensiones.
- Sean $\{M_1^{ini}, \dots, M_L^{ini}\}$ los nodos de la frontera de la configuración libre de tensiones, que se desea estimar. La posición de cada nodo se actualiza en cada iteración j , generando una secuencia de configuraciones $\{M_i^j\}$.
- En cada iteración, la aplicación de una carga sobre cada nodo M_i^j , produce un desplazamiento U_i^j , que lleva al nodo a una nueva posición N_i^j .
- El objetivo del algoritmo es ajustar los nodos M_i^j hasta que la configuración deformada obtenida N_i^j coincida con la configuración conocida M_i^d .

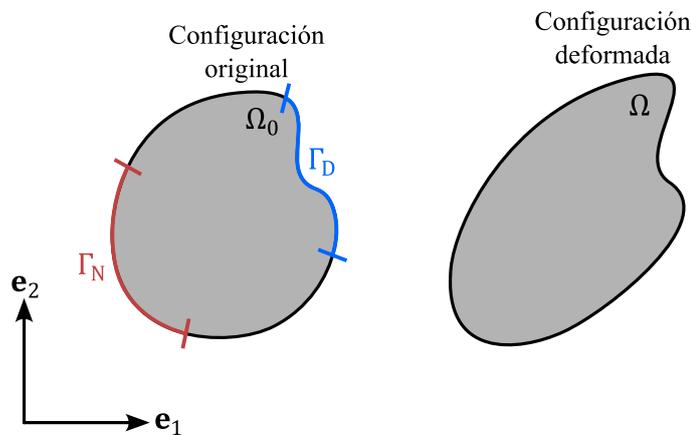


Figura 4.5. Esquema del cuerpo bidimensional sometido a cargas mecánicas. Los desplazamientos sobre Γ_D y las tensiones sobre Γ_N .

El procedimiento puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Primera iteración: Se asume que la configuración deformada conocida es una primera aproximación de la configuración libre de tensiones

$$\mathbf{OM}_i^1 = \mathbf{OM}_i^d, \text{ para } i = 1, \dots, L, \quad (4.35)$$

donde \mathbf{OM}_i^1 representa el vector posición del i -ésimo nodo de la configuración inicial y \mathbf{OM}_i^d la posición en la configuración deformada conocida.

Se realiza una simulación mediante un *software* FEM, aplicando las cargas sobre esta geometría inicial. El resultado es una configuración deformada calculada con nodos en posiciones

$$\mathbf{ON}_i^1 = \mathbf{OM}_i^1 + \mathbf{U}_i^1, \quad (4.36)$$

donde \mathbf{U}_i^1 es el desplazamiento obtenido. A partir de aquí, se define el vector residual como la diferencia entre la posición conocida y la calculada

$$\Delta_i^1 = \mathbf{OM}_i^d - \mathbf{ON}_i^1. \quad (4.37)$$

Este vector mide la distancia entre la configuración deformada calculada y la real, y sirve para corregir la estimación en la próxima iteración.

2. Sigüientes iteraciones: En cada iteración j , se actualiza la configuración inicial mediante

$$\mathbf{OM}_i^j = \mathbf{OM}_i^{j-1} + \Delta_i^{j-1}. \quad (4.38)$$

Se repite la simulación con FEM, aplicando las mismas cargas sobre esta nueva estimación. Se obtiene una nueva configuración deformada con

$$\mathbf{ON}_i^j = \mathbf{OM}_i^j + \mathbf{U}_i^j, \quad (4.39)$$

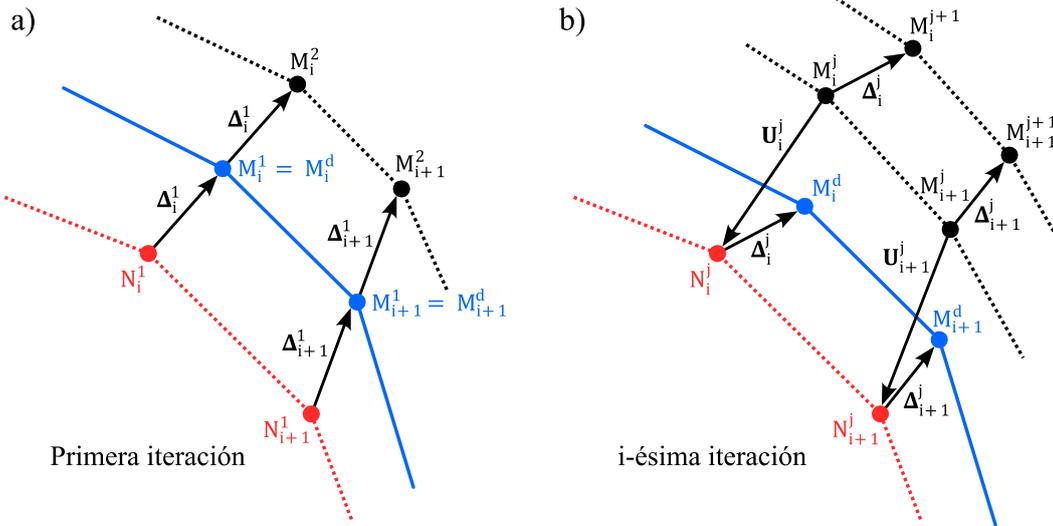
y se calcula el nuevo vector residual

$$\Delta_i^j = \mathbf{OM}_i^d - \mathbf{ON}_i^j. \quad (4.40)$$

3. Convergencia: El algoritmo continúa iterando hasta que el valor máximo de la norma de los residuos sea menor que una tolerancia predefinida ϵ

$$\max(\|\Delta_i^j\|) < \epsilon. \quad (4.41)$$

Cuando se cumple esta condición, se considera que la configuración estimada es una buena aproximación de la forma libre de tensiones, ya que, al aplicarle las cargas, reproduce la geometría deformada conocida con suficiente precisión.



-● Configuración deformada calculada
-● Configuración deformada conocida
-● Configuración libre de tensiones estimada

Figura 4.6. Representación del algoritmo de Sellier. En a) se muestra la primera iteración, en la que se toma la configuración deformada como estimación inicial. En b) se ilustran las iteraciones posteriores. La curva azul representa la frontera de la configuración deformada conocida, la curva negra la estimación libre de tensiones y la curva roja la configuración deformada calculada.

4.6 METODOLOGÍA PROPUESTA Y VALIDACIÓN

Como se mencionó en este capítulo, modelar adecuadamente el estado pretensionado de la pared arterial es importante a la hora de realizar simulaciones biomecánicas más realistas. Sin embargo, integrar todos los factores fisiológicos y estructuras involucrados, como propiedades heterogéneas, anisotropía, entre otros, supone una gran complejidad tanto desde el punto de vista teórico como computacional. A esto se suma la dificultad de obtener parámetros experimentales específicos para cada paciente, lo cual limita la aplicabilidad clínica inmediata.

Por este motivo, se propone una metodología que equilibra fidelidad biomecánica y eficiencia computacional, utilizando el algoritmo de Sellier adaptado a modelos tridimensionales, con elementos tetraédricos.

El punto de partida son los modelos tridimensionales provistos por la base de datos AneuriskWeb, como se detalló en la Sección 3.2.1, que ya incluyen la superficie arterial, el cuello del aneurisma y las líneas centrales. Esto permite omitir etapas iniciales de segmentación y reconstrucción geométrica, facilitando el desarrollo del *pipeline* de simulación.

El algoritmo fue desarrollado en MATLAB, aprovechando ciertas herramientas generadas por el grupo MoCCAI para simulaciones de deformaciones no lineales mediante pasos de cargas iterativos. La validación del algoritmo se realiza utilizando una geometría sencilla, tal como se hizo en [48], donde se implementó el método MULF en lugar de Sellier. La geometría es un tubo de 160 mm de largo, 20 mm de diámetro exterior y 4 mm de espesor (ver **Figura 4.7**), mallado con 24012 tetraedros y 6090 nodos (ver **Figura 4.8**). La malla fue generada con SALOME.

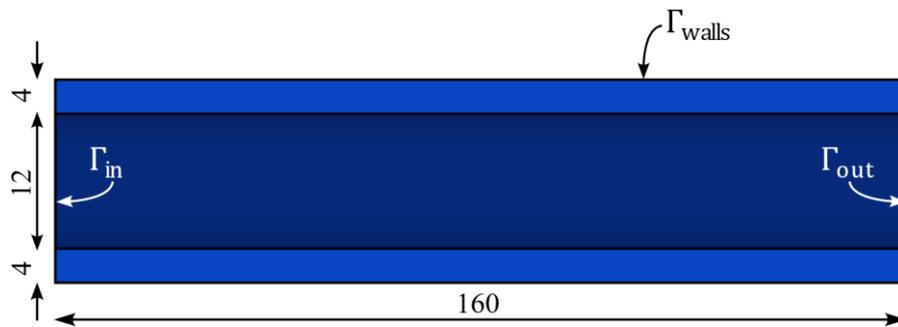


Figura 4.7. Dimensiones de la geometría propuesta para validar el algoritmo de Sellier en MATLAB.

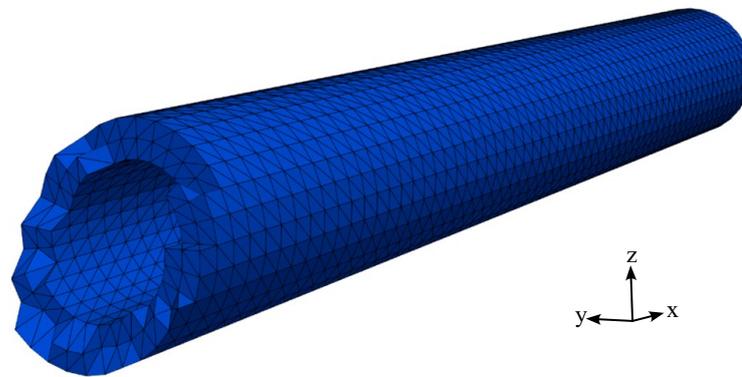


Figura 4.8. Malla de tetraedros utilizada para validar el algoritmo de Sellier en MATLAB. Se han colocado dos elementos por espesor del tubo.

Las condiciones de contorno consideran los extremos fijos y se aplica una presión interna de 87 mmHg (11598 Pa). Se utiliza el modelo de Saint Venant-Kirchhoff para el comportamiento mecánico de la pared del tubo, con un módulo de elasticidad de 1.044 MPa y coeficiente de Poisson de 0.49. Todos estos parámetros se extrajeron de [48]. Para más detalles sobre este experimento consulta el Anexo B.II.

En cada iteración del algoritmo de Sellier, se obtiene una estimación de la configuración libre de tensiones. Para evaluar qué tan precisa es esta estimación, se aplica sobre dicha configuración una carga conocida y se calcula la correspondiente configuración deformada. Esta nueva configuración se compara con la geometría original (en el caso de aneurismas cerebrales, se trata de la obtenida por imagenología), y la diferencia entre ambas indica qué tan

cerca está la estimación de la solución real del problema inverso. La formulación y el código para obtener este desplazamiento se desarrolla en el Anexo D.II.

La resolución de este problema requiere encontrar un campo de desplazamientos que minimiza el residuo del sistema no lineal derivado del principio del trabajo virtual (ver Sección 4.3), ya que se trata con deformaciones finitas. Por ello, se emplea el método de Newton-Raphson, que permite encontrar este desplazamiento. No obstante, este método depende fuertemente del valor inicial: si la estimación está muy alejada de la solución real, el algoritmo puede no converger o requerir muchas iteraciones.

Por este motivo, antes de aplicar Newton-Raphson, se utiliza el método L-BFGS²⁶, una técnica de optimización cuasi-Newton eficiente para problemas de gran tamaño. Este método aproxima el mínimo de una función (en este caso, el residuo del sistema), utilizando únicamente la función y su gradiente, sin necesidad de construir la matriz Hessiana completa, lo cual reduce el uso de memoria.

L-BFGS proporciona una semilla inicial suficientemente cercana a la solución, lo que mejora la estabilidad y convergencia del método de Newton-Raphson. A continuación, se realiza la búsqueda más precisa del mínimo utilizando este segundo método, que en este código se complementa con el método de Brent²⁷ para la búsqueda lineal. Este es un método híbrido de búsqueda de raíces que combina el método de bisección, el método de la secante y la interpolación cuadrática inversa, ofreciendo una buena combinación entre robustez y velocidad.

Una vez obtenido el campo de desplazamientos, se aplica el algoritmo de Sellier tal como se explicó en la Sección 4.5: se aplica la presión interna a la configuración estimada como libre de tensiones, se obtiene una nueva configuración deformada y se evalúa la diferencia respecto a la configuración original. Este procedimiento se repite hasta alcanzar una tolerancia predefinida.

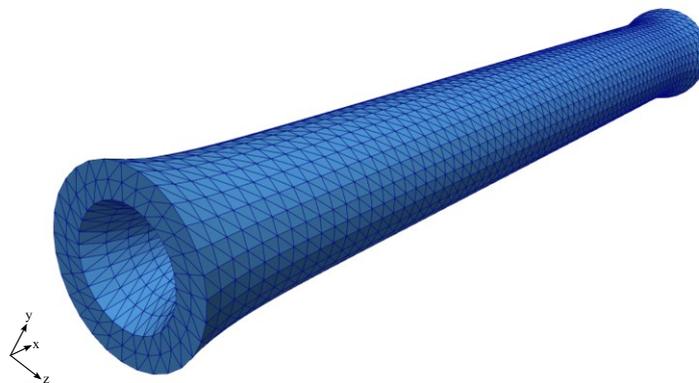


Figura 4.9. Estado pretensionado del tubo sometido a una presión interna. Los resultados se han escalado por un factor de 10.

La **Figura 4.9** muestra el resultado del tubo pretensionado, con los resultados escalados por un factor de 10 para mejorar la visualización.

Dado que no se cuenta con datos experimentales para una validación directa, se aplica un procedimiento de verificación inversa. Se simula la aplicación de la presión interna sobre el tubo bajo el estado pretensionado y se evalúa si recupera su forma original. La **Figura 4.10** muestra el campo de deformación que surge al someter bajo presión a la geometría pretensionada. Por otro lado, la **Figura 4.11** muestra la comparación entre la geometría pretensionada y la deformada.

²⁶ L-BFGS. <https://es.wikipedia.org/wiki/L-BFGS>

²⁷ Brent's method. https://en.wikipedia.org/wiki/Brent%27s_method

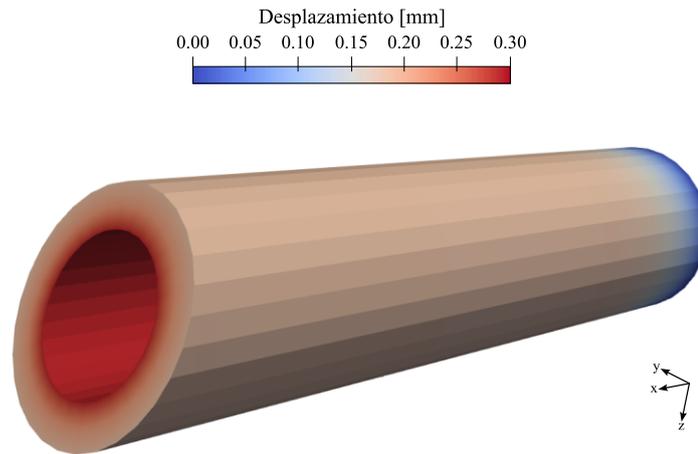


Figura 4.10. Campo de deformación del tubo sometido a presión interna a partir del estado pretensionado. Se ha realizado un corte transversal para mostrar la deformación en la pared interior del tubo.

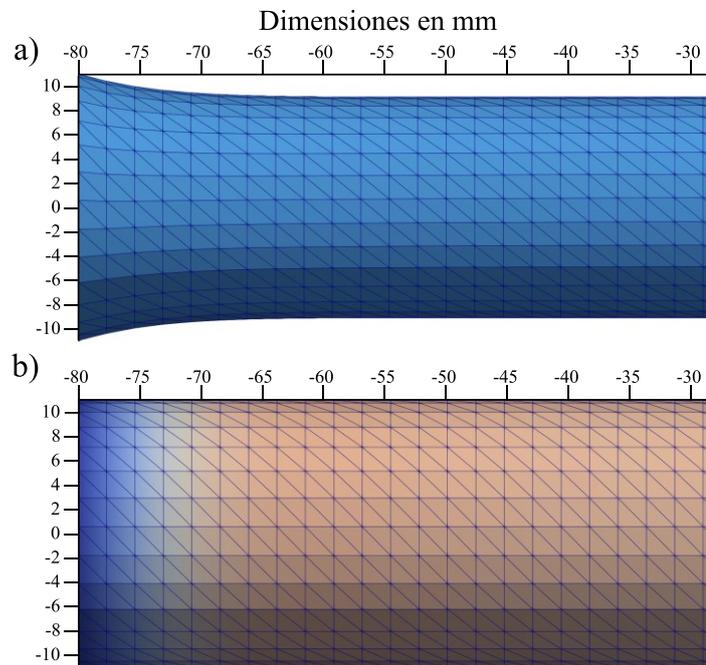


Figura 4.11. Comparación entre a) estado pretensionado del tubo y b) geometría deformada bajo carga a partir del estado pretensionado.

Por último, se calcula las tensiones de von Mises en la configuración deformada a partir del estado pretensionado. Los resultados muestran que la tensión máxima de von Mises es 34781 Pa, lo cual coincide con los resultados mostrados en [48].

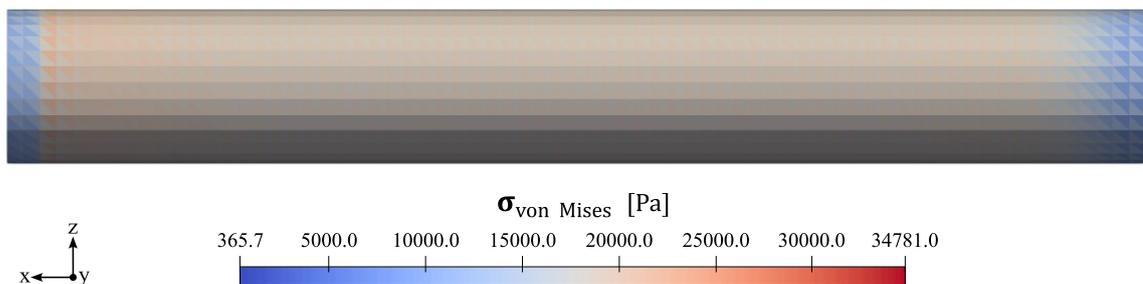


Figura 4.12. Campo de tensiones von Mises de la geometría deformada a partir del estado pretensionado.

CAPÍTULO 5 INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA

5.1 INTRODUCCIÓN

Si bien el análisis fluidodinámico mediante CFD ha permitido avances importantes en la comprensión del crecimiento y posible rotura de los aneurismas cerebrales, la suposición de paredes arteriales rígidas limita la precisión de los resultados obtenidos. Esta simplificación impide capturar fenómenos biomecánicos relevantes relacionados con la deformación de la pared arterial.

Una forma más realista de modelar el comportamiento de los UIAs consiste en incorporar la FSI, permitiendo simular de forma acoplada el flujo sanguíneo y la deformación dinámica de las paredes del aneurisma. En los últimos años, el uso de FSI ha crecido considerablemente gracias a los avances en imagenología médica, técnicas de mallado, capacidades computacionales y herramientas de visualización. Las simulaciones actuales más avanzadas incluyen modelos FSI totalmente acoplados que abarcan grandes porciones del sistema cardiovascular humano.

Sin embargo, el modelado FSI implica una complejidad algorítmica mayor y un alto costo computacional. Para abordarlo, se han desarrollado diversas herramientas de acoplamiento entre códigos especializados. En este trabajo, se optó por utilizar OpenFOAM para la simulación del flujo, CalculiX para el análisis estructural y preCICE como interfaz de acoplamiento entre ambos. PreCICE es una biblioteca de código abierto diseñada específicamente para facilitar la interacción entre múltiples códigos de simulación en problemas multifísicos (**Figura 5.1**).



Figura 5.1. Acoplamiento entre OpenFOAM y CalculiX a través de preCICE para realizar simulaciones de interacción fluido-estructura.

A lo largo de este capítulo se desarrollarán los siguientes temas:

- las principales funcionalidades de preCICE, como los métodos de acoplamiento entre mallas no coincidentes (Sección 5.2),
- los resultados de realizar una simulación FSI sobre un caso de referencia estándar, utilizado frecuentemente en la literatura para validar códigos de acoplamiento (Sección 5.3), y
- una comparación de los resultados obtenidos con estudios previos, evaluando la precisión y robustez del código de acoplamiento (Sección 5.4).

5.2 FUNDAMENTOS DE PRECICE

En esta sección se presenta los aspectos más relevantes de la biblioteca preCICE. La **Figura 5.2** muestra los componentes funcionales básicos. Esta biblioteca permite acoplar distintos tipos de códigos de simulación, como códigos de CFD, FEM, códigos propios y códigos de partículas. Cada uno de estos códigos, en el contexto del acoplamiento, se denomina participante.

El código de unión entre cada participante y la biblioteca preCICE se denomina adaptador. Un adaptador es responsable de gestionar la física del acoplamiento, es decir, cómo se comunican e interpretan los datos entre participantes. Por ejemplo, en una simulación FSI, el adaptador del código de CFD extrae el campo de presiones en la superficie de acoplamiento y lo transmite como una fuerza nodal hacia el código de FEM. Esta fuerza es un término de forzamiento, ya

que influye directamente en el comportamiento del segundo participante. A su vez, el código de FEM devuelve el campo de desplazamiento de la pared, el cual se utiliza como condición de contorno en el dominio fluido.

Esta transferencia de información entre participantes permite representar de forma coherente los efectos mutuos de cada física involucrada.

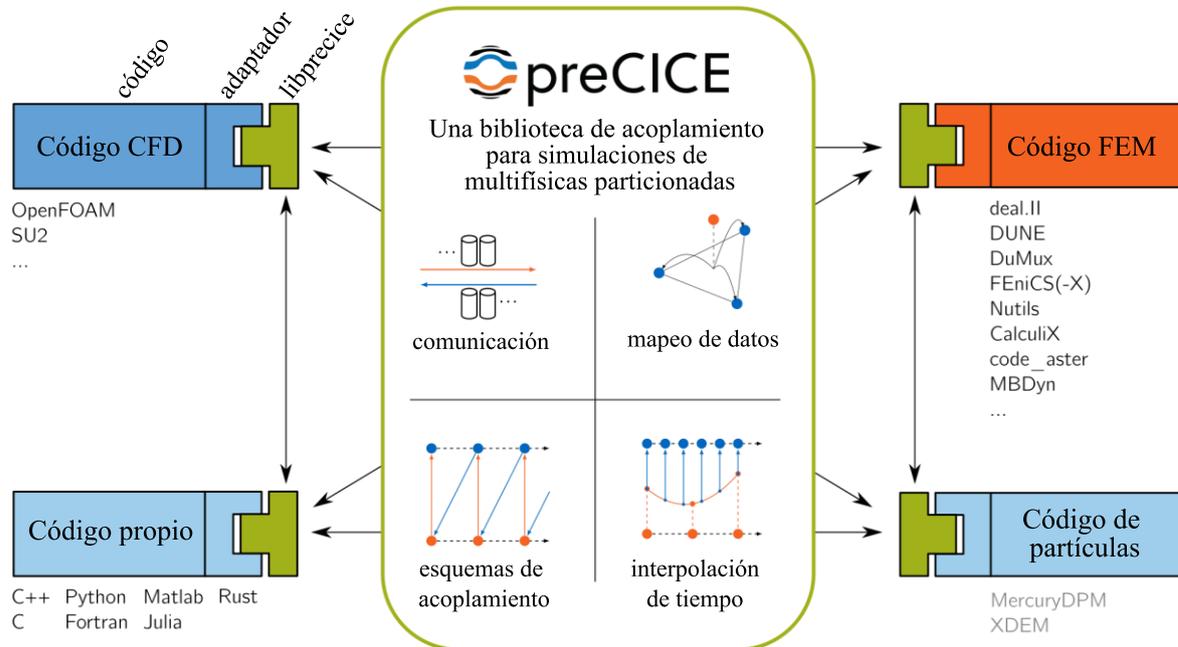


Figura 5.2. Componentes funcionales básicos de preCICE. Se muestra la posibilidad de acoplar distintos tipos de simulaciones: dinámica de fluidos computacional (CFD), método de elementos finitos (FEM), códigos internos y códigos de partículas. Traducida de [50].

La biblioteca preCICE no se enfoca en la física del problema, si no que se encarga de los aspectos técnicos del acoplamiento, como la comunicación entre participantes, el mapeo de datos entre mallas no coincidentes y los esquemas numéricos de acoplamiento. Esto significa que preCICE sigue un enfoque de caja negra, es decir, sólo se dispone de la información mínima que ofrece cada participante en particular: tipo de datos de entrada, datos de salida y el paso de tiempo de la simulación.

En las siguientes secciones se describen cada uno de los componentes básicos de preCICE presentados en la **Figura 5.2**.

5.2.1 Comunicación

En preCICE, la comunicación entre los participantes acoplados se realiza de forma paralela y asíncrona. La comunicación paralela permite que los participantes puedan enviar y recibir datos de acoplamiento al mismo tiempo, sin tener que esperar que el resto de los participantes completen sus envíos o recepciones. Esto contribuye a la eficiencia en simulaciones a gran escala, ya que reduce los tiempos de espera y permite que los participantes trabajen de manera más eficiente en conjunto. La comunicación asíncrona significa que un participante puede enviar datos sin tener que esperar una confirmación instantánea de que el otro participante los ha recibido. En lugar de esperar, el participante puede realizar otras tareas, y la recepción de los datos puede ocurrir en un momento posterior. Esto ayuda a evitar bloqueos y cuellos de botella en la comunicación.

La comunicación entre participantes se realiza utilizando puertos MPI (*Message Passing Interface*) o TCP/IP (*Transmission Control Protocol/Internet Protocol*), y la elección entre uno u otro se puede configurar en el momento en el que se ejecuta la simulación. Además, la

comunicación es selectiva, es decir, no todos los procesos (o *ranks*, en la terminología de MPI) deben comunicarse entre sí. Solo aquellos procesos que tienen datos específicos para intercambiar en la comunicación, lo cual evita transferencias innecesarias y mejora el rendimiento global.

En la **Figura 5.3** se ilustra el proceso de inicialización de la comunicación entre dos participantes S_1 y S_2 . El participante S_1 se ejecuta en tres procesos, mientras que S_2 se ejecuta en dos. Los nodos de la interfaz de acoplamiento están distribuidos entre estos procesos. El mapeo de datos, indicado con flechas, define la forma en la que se transfieren los valores de un participante al otro, a través de sus respectivas mallas. Combinando la información de la distribución de los nodos y el mapeo de datos, preCICE deduce el patrón de comunicación requerido entre los procesos, lo cual se representa en la figura mediante las conexiones grises.

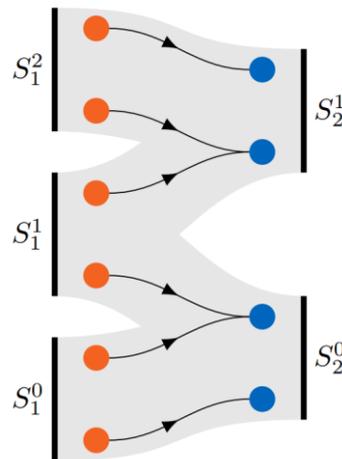


Figura 5.3. Inicialización de la comunicación en preCICE. El participante S_1 se ejecuta en tres procesos, mientras que el participante S_2 en dos. Los nodos de la interfaz de acoplamiento se distribuyen entre estos procesos. Las flechas indican el mapeo de datos entre los nodos de cada uno de los procesos [50].

5.2.2 Esquemas de acoplamiento

Los esquemas de acoplamiento en preCICE definen qué datos envía un participante a otro (flujo de acoplamiento) y cómo se sincroniza la ejecución de los pasos de tiempo entre ellos. Entre dos participantes, los datos se pueden transferir de manera unidireccional o bidireccional. En el primer caso, los datos se transfieren únicamente desde un participante a otro en una sola dirección, mientras que, en el segundo, se realiza en ambas direcciones. Por ejemplo, una simulación FSI es un esquema de acoplamiento bidireccional, donde el fluido ejerce fuerzas sobre la estructura y esta se deforma, afectando al flujo del fluido.

Además, el esquema de acoplamiento puede ser explícito o implícito. En el acoplamiento explícito, los datos se intercambian entre los participantes una sola vez por paso de tiempo. Cada participante utiliza los valores del otro provenientes del paso de tiempo anterior para realizar sus cálculos en el paso actual. En cambio, en el acoplamiento implícito, los participantes intercambian datos iterativamente dentro de un mismo paso de tiempo hasta alcanzar la convergencia. Este esquema es más estable que el primero, especialmente en problemas con interacciones fuertes entre los participantes, como en muchos problemas FSI.

Por último, preCICE también permite que el acoplamiento sea paralelo o serial, es decir, que los participantes se ejecuten simultáneamente o uno tras otro.

Combinando todas las opciones mencionadas, los esquemas de acoplamiento pueden ser: unidireccional o bidireccional, implícito o explícito, en serie o en paralelo, con un total de seis esquemas de acoplamiento diferentes entre dos participantes, tal como se muestra en la **Figura 5.4**.

- Unidireccional, explícito y paralelo: los datos se transfieren en una sola dirección. Cada participante se ejecuta una vez por paso de tiempo y lo hacen de forma simultánea.
- Unidireccional, explícito y serial: igual que el anterior, pero los participantes se ejecutan uno tras otro.
- Bidireccional, explícito y paralelo: los datos se transfieren en ambas direcciones. Cada participante se ejecuta una vez por paso de tiempo simultáneamente.
- Bidireccional, explícito y serial: igual que el anterior, pero los participantes se ejecutan uno tras otro.
- Bidireccional, implícito y paralelo: los datos se transfieren en ambas direcciones. Los participantes se ejecutan más de una vez por paso de tiempo de forma simultánea.
- Bidireccional, implícito y serial: igual que anterior, pero los participantes se ejecutan uno tras otro.

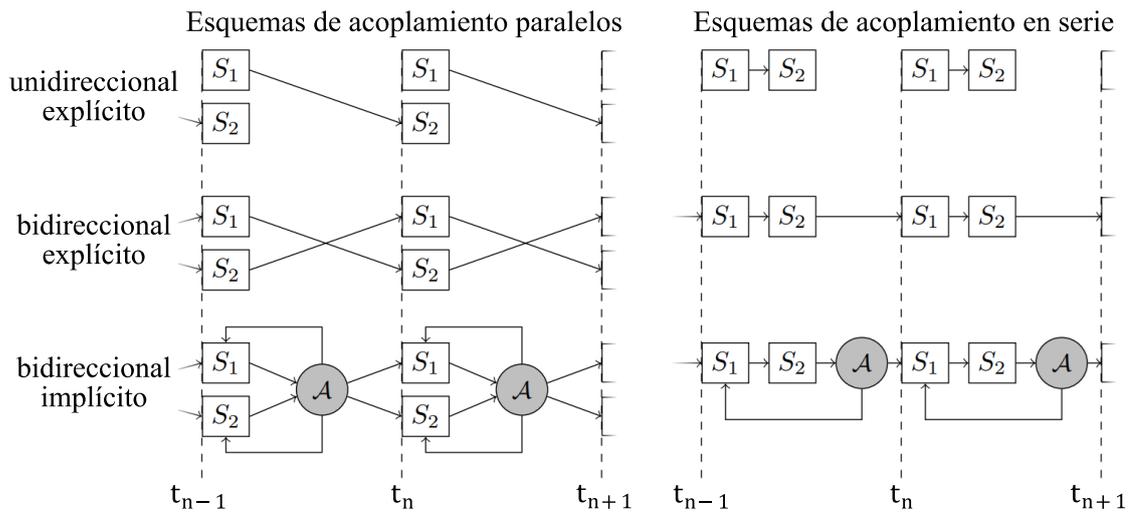


Figura 5.4. Tipos de esquemas de acoplamiento en preCICE para dos participantes S_1 y S_2 definidos por combinaciones de (i) unidireccional o bidireccional; (ii) explícito o implícito; (iii) paralelo o en serie. Se presentan las posibles combinaciones para un esquema de acoplamiento en paralelo y los posibles métodos de acoplamiento en serie. Traducida de [50].

Cuando se utilizan esquemas de acoplamiento implícitos, es importante asegurar la estabilidad del sistema y la convergencia de la solución. Estos esquemas requieren múltiples iteraciones por paso de tiempo para satisfacer las condiciones de acoplamiento, lo que puede llevar a inestabilidades numéricas si no se implementan adecuadamente. Para mitigar estos riesgos y mejorar la eficiencia, se usan métodos de aceleración²⁸, tales como los métodos Quasi-Newton, que utilizan información de iteraciones anteriores para acelerar la convergencia hacia una solución estable. En esencia, un esquema implícito siempre debe complementarse con un método de aceleración, ya que, sin este, no ofrece ventajas significativas sobre un esquema explícito.

5.2.3 Mapeo de datos

En una simulación acoplada, los participantes intercambian datos mediante mallas de acoplamiento que discretizan la interfaz común (para acoplamiento de superficie) o volumen común (para acoplamiento de volumen). Sin embargo, la discretización del dominio computacional de cada participante suele ser diferente, lo que da lugar a mallas de acoplamiento que no coinciden. Entonces, para transferir variables físicas entre mallas que no coinciden se utiliza el mapeo de datos.

²⁸ Para más información consultar [55].

Consideremos un mapeo de datos entre dos participantes, S_1 y S_2 , cuyas mallas de acoplamiento están definidas como

$$\mathcal{M}_{S_1} = \{\mathbf{x}_1^{S_1}, \dots, \mathbf{x}_{n_1}^{S_1}\} \text{ con } \mathbf{x}_i^{S_1} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{M}_{S_2} = \{\mathbf{x}_1^{S_2}, \dots, \mathbf{x}_{n_2}^{S_2}\} \text{ con } \mathbf{x}_i^{S_2} \in \mathbb{R}^d, \quad (5.1)$$

siendo d la dimensión espacial, y n_1, n_2 el número de nodos de la malla de acoplamiento del participante S_1 y del participante S_2 , respectivamente.

El objetivo del mapeo de datos es transferir una variable física escalar w desde \mathcal{M}_{S_1} a \mathcal{M}_{S_2} . Entonces, se busca transformar el vector $\mathbf{w}^{S_1} = (w_1^{S_1}, w_2^{S_1}, \dots, w_{n_1}^{S_1})^T$ en un vector equivalente $\mathbf{w}^{S_2} = (w_1^{S_2}, w_2^{S_2}, \dots, w_{n_2}^{S_2})^T$. Este proceso puede escribirse como una transformación lineal

$$\mathbf{w}^{S_2} = \mathbf{M}\mathbf{w}^{S_1}, \quad (5.2)$$

donde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ es la matriz de mapeo. Cada fila de \mathbf{M} expresa cómo los nodos de la malla \mathcal{M}_{S_1} influyen sobre un nodo de la malla \mathcal{M}_{S_2}

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n_21} & m_{n_22} & \dots & m_{n_2n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{S_1} \\ w_2^{S_1} \\ \vdots \\ w_{n_1}^{S_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1^{S_2} \\ \vdots \\ w_{n_2}^{S_2} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Por ejemplo, si se toma la primera fila de la matriz \mathbf{M} y aplicamos la Ecuación (5.3) se obtiene

$$m_{11}w_1^{S_1} + m_{12}w_2^{S_1} + \dots + m_{1n_1}w_{n_1}^{S_1} = w_1^{S_2}, \quad (5.4)$$

donde el i -ésimo elemento m_{1i} representa la contribución del valor de w en el i -ésimo nodo $w_i^{S_1}$ al valor de w en el primer nodo $w_1^{S_2}$.

Los métodos de mapeo definen una restricción que indica cómo se mapean los datos entre las mallas de acoplamiento, la cual puede ser consistente o conservadora. El mapeo consistente reproduce exactamente los datos constantes de \mathcal{M}_{S_1} en \mathcal{M}_{S_2} (ver **Figura 5.5**).

Para que el mapeo sea consistente, la suma de todos estos pesos debe ser igual a uno. Esto asegura que, si todos los nodos en la malla \mathcal{M}_{S_1} tienen el mismo valor, el nodo correspondiente en la malla \mathcal{M}_{S_2} también tendrá ese mismo valor. Entonces la Ecuación (5.4) se convierte en

$$w_1^{S_1} = w_2^{S_1} = \dots = w_{n_1}^{S_1} \Rightarrow (m_{11} + m_{12} + \dots + m_{1n_1})w_1^{S_1} = w_1^{S_2}. \quad (5.5)$$

Como $m_{11} + m_{12} + \dots + m_{1n_1} = 1$ entonces $w_1^{S_2} = w_1^{S_1}$, tal como se espera en un mapeo consistente.

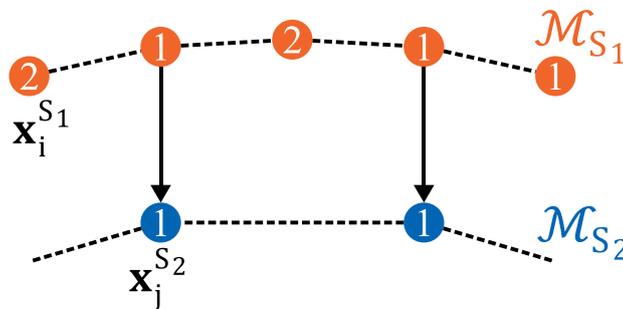


Figura 5.5. Restricción de mapeo consistente. En el interior de los nodos se han colocado los valores de la variable $w_i^{S_1}$ y $w_j^{S_2}$.

Los esquemas de mapeos consistentes se usan para variables físicas como desplazamiento, velocidad, presión o tensiones.

En cambio, el mapeo conservador garantiza que la suma de todos los elementos de \mathbf{w}^{S_1} sea igual a la suma de todos los elementos de \mathbf{w}^{S_2} , es decir, que se conserve (ver **Figura 5.6**).

Para lograr el mapeo conservador, la suma de las entradas en cada columna de la matriz \mathbf{M} debe ser igual a uno. A continuación, se expresa la Ecuación (5.3) a partir de los vectores columnas de \mathbf{M} para demostrarlo

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{n_2 1} \end{bmatrix} w_1^{S_1} + \begin{bmatrix} m_{12} \\ \vdots \\ m_{n_2 2} \end{bmatrix} w_2^{S_1} + \dots + \begin{bmatrix} m_{1 n_1} \\ \vdots \\ m_{n_2 n_1} \end{bmatrix} w_{n_1}^{S_1} = \begin{bmatrix} w_1^{S_2} \\ \vdots \\ w_{n_2}^{S_2} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Como queremos que $\sum_{i=1}^{n_1} w_i^{S_1} = \sum_{i=1}^{n_2} w_i^{S_2}$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n_2} w_i^{S_2} = \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_1} m_{ij} w_j^{S_1} = \sum_{j=1}^{n_1} w_j^{S_1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n_2} m_{ij}}_{=1} = \sum_{j=1}^{n_1} w_j^{S_1}, \quad (5.7)$$

donde el término $\sum m_{ij}$ es la suma de las entradas de la columna j de \mathbf{M} , que debe ser igual a uno para cumplir la condición del mapeo conservador.

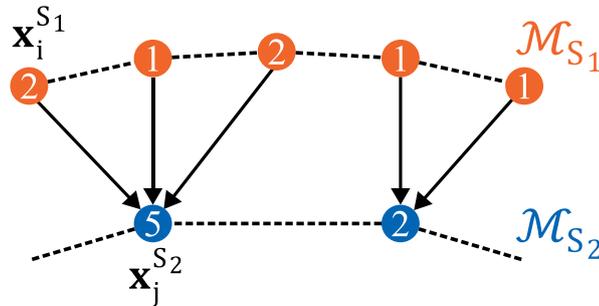


Figura 5.6. Restricción de mapeo conservadora. En el interior de los nodos se han colocado los valores de la variable $w_i^{S_1}$ y $w_j^{S_2}$. El valor mapeado en la malla de salida es la suma de los valores de los nodos involucrados.

Este tipo de mapeo se utiliza para variables acumulativas como la fuerza.

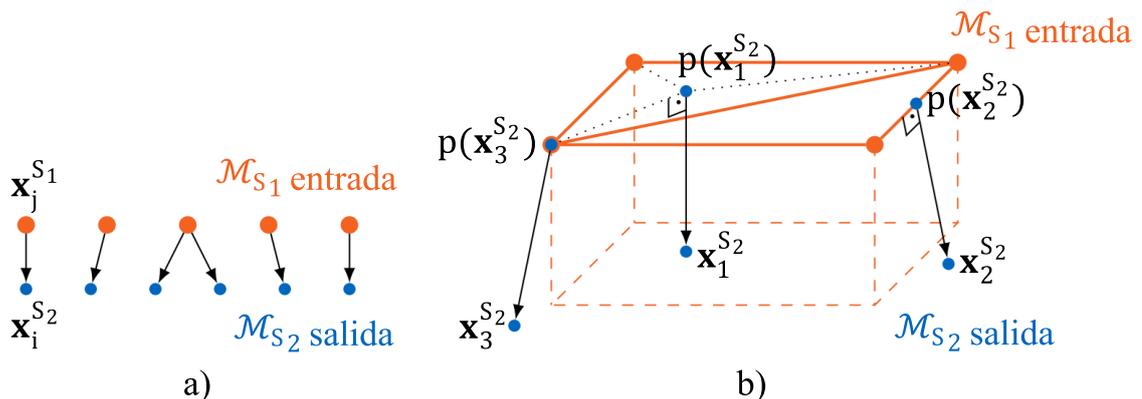


Figura 5.7. Métodos de mapeos de vecino más cercano y proyección más cercana: (a) Mapeo de cada valor $w_{j(i)}^{S_1}$ en el vecino más cercano $x_{j(i)}^{S_1}$ en la malla de entrada al nodo $x_i^{S_2}$ en la malla de salida. (b) Proyección de los nodos $x_1^{S_2}$, $x_2^{S_2}$ y $x_3^{S_2}$ de la malla de salida a un triángulo, una arista y un nodo, respectivamente, de la malla de entrada. Adaptada y traducida de [50].

Actualmente, hay tres métodos de mapeo disponibles en preCICE: mapeo del vecino más cercano, mapeo de proyección más cercana y mapeo de datos usando funciones de base radial.

El mapeo del vecino más cercano relaciona cada nodo $\mathbf{x}_i^{S_2}$ de la malla de salida \mathcal{M}_{S_2} , con el nodo espacialmente más cercano $\mathbf{x}_{j(i)}^{S_1}$ de la malla de entrada \mathcal{M}_{S_1} (**Figura 5.7a**). El mapeo se define simplemente como

$$w_i^{S_2} = w_{j(i)}^{S_1}. \quad (5.8)$$

El mapeo de proyección más cercana utiliza información de conectividad entre varios nodos de la malla de entrada para interpolar a un nodo de la malla de salida. Para calcular el valor del nodo de salida $\mathbf{x}_i^{S_2}$, se proyecta primero este punto sobre la malla de entrada \mathcal{M}_{S_1} , tal como se muestra en la **Figura 5.7b**. Puede ocurrir que el nodo proyectado $p(\mathbf{x}_i^{S_2})$ se encuentre sobre un triángulo, un borde o un nodo de la malla de entrada. Si la proyección del nodo cae dentro de un triángulo, se aplica interpolación baricéntrica para determinar el valor de la variable física. Se realiza interpolación lineal si $p(\mathbf{x}_i^{S_2})$ se encuentra en un borde. Si $p(\mathbf{x}_i^{S_2})$ coincide con un nodo, se utiliza directamente su valor.

El mapeo con funciones de base radial es un método de interpolación que utiliza una combinación lineal de funciones radialmente simétricas, centradas en los nodos de la malla de entrada, para crear una función de interpolación.

Para entenderlo mejor, en la **Figura 5.8** se muestra una versión simplificada del proceso con varios nodos $\mathbf{x}_1^{S_1}$, $\mathbf{x}_2^{S_1}$, $\mathbf{x}_3^{S_1}$, $\mathbf{x}_4^{S_1}$ y $\mathbf{x}_5^{S_1}$ de la malla de entrada, cada uno con su valor correspondiente $w_1^{S_1}$, $w_2^{S_1}$, $w_3^{S_1}$, $w_4^{S_1}$ y $w_5^{S_1}$. Además, se muestra un nodo $\mathbf{x}_i^{S_2}$ de la malla de salida, donde se quiere determinar el valor interpolado $w_i^{S_2}$. Para cada nodo $\mathbf{x}_i^{S_1}$ se define una función de base radial centrada en ese punto. La forma específica de la función (gaussiana, C-TPS, entre otras) determina cómo la influencia de ese nodo disminuye con la distancia.

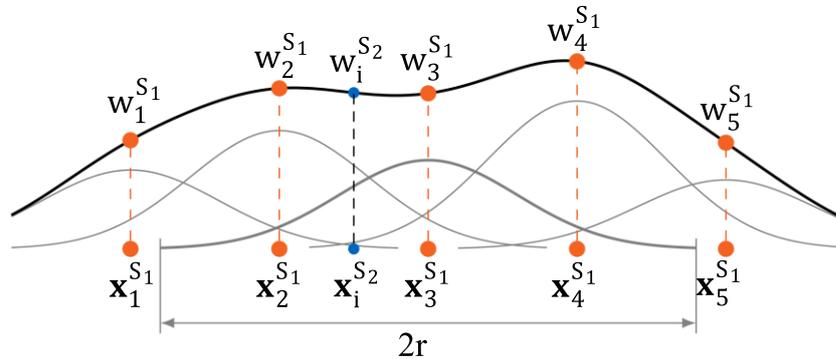


Figura 5.8. Representación unidimensional simplificada del mapeo con funciones de base radial. La creación del interpolante se basa en una combinación lineal de funciones base gaussianas con radio de soporte r . En 3D, las funciones base son radialmente simétricas en todas las dimensiones espaciales. Adaptada de [50].

El interpolante, simbolizado como s , se construye como una suma ponderada de estas funciones de base radial. El peso de cada función base en la suma ponderada se elige de manera que el interpolante coincida con los valores conocidos $w_i^{S_1}$ que se muestran en la **Figura 5.8**. El valor interpolado $w_i^{S_2}$ se calcula como

$$w_i^{S_2} = s(\mathbf{x}_i^{S_2}). \quad (5.9)$$

Existen dos tipos de funciones base: función base con soporte local y función base con soporte global. En el primer caso, las funciones base solo afectan dentro de un radio específico, conocido como radio de soporte. Fuera de ese radio, la función es cero. En cambio, las funciones base con soporte global, tienen influencia en todo el dominio computacional. Esto significa que cada nodo de la malla de salida está afectado por cada nodo de la malla de entrada.

5.2.4 Pasos de tiempo no coincidentes

En una simulación acoplada, el tiempo total se divide en intervalos denominados ventanas de tiempo, durante los cuales los participantes intercambian información. Cada participante define su propio paso de tiempo, sobre el cual realiza los cálculos. Sin embargo, cuando los participantes usan pasos de tiempo diferentes, pueden realizar subciclos, es decir, ejecutar múltiples pasos de tiempo dentro de una misma ventana de tiempo. El intercambio de datos base ocurre solo al final de cada ventana.

Existen dos enfoques principales:

- Ventana de tiempo fija
- Ventana de tiempo definida por un participante

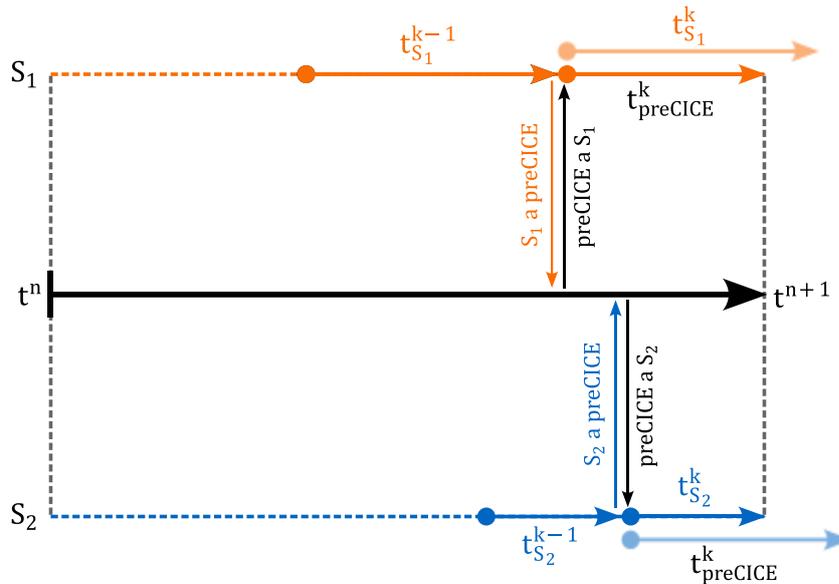


Figura 5.9. Esquema de ventana de tiempo fija. Al final de cada paso de tiempo de cada participante, preCICE compara el tamaño del paso de tiempo propuesto por el participante con el tiempo restante para finalizar la ventana de tiempo, con el objetivo de no exceder la ventana de tiempo.

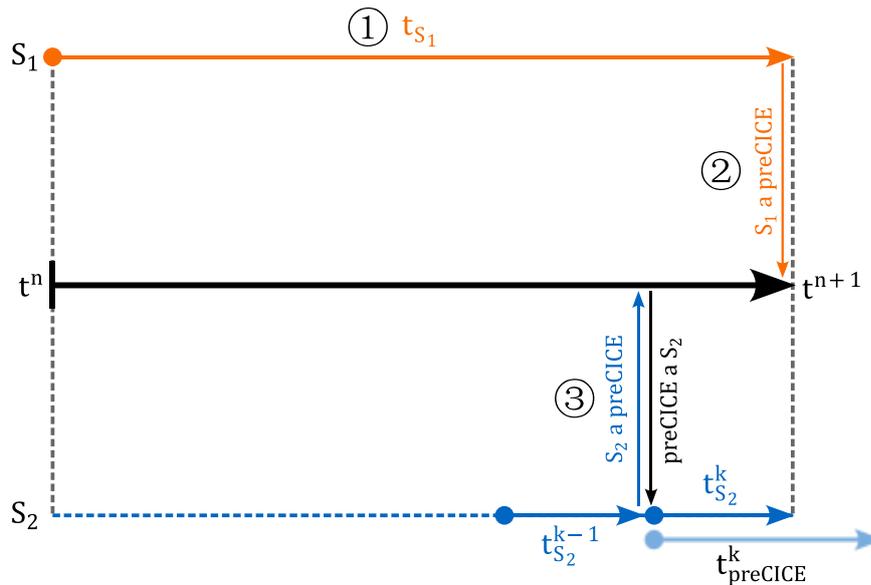


Figura 5.10. Esquema de ventana de tiempo definida por el participante S_1 . Al final de cada paso de tiempo del participante S_1 , preCICE compara el tamaño del paso de tiempo calculado por el participante S_2 y el tiempo restante para finalizar la ventana de tiempo. El tamaño del próximo paso de tiempo del participante S_2 estará dado por el mínimo entre estos dos.

En el primer caso, se define un tamaño específico de ventana de tiempo en el archivo de configuración de preCICE. Cada participante informa a preCICE el tamaño del paso de tiempo que ha completado, y preCICE calcula cuánto tiempo falta para finalizar la ventana actual. Si el próximo paso de tiempo de un participante excede ese tiempo restante, preCICE lo ajusta para coincidir exactamente con el final de la ventana.

La **Figura 5.9** ilustra este procedimiento donde τ_{S_1} representa el paso de tiempo del participante S_1 , k el índice del subciclo, y t^n , t^{n+1} marcan el inicio y final de la n -ésima ventana de tiempo, respectivamente.

Supongamos que el participante S_1 propone un próximo paso $t_{S_1}^{k-1}$ y que el tiempo restante hasta el final de la ventana es t_{preCICE}^k . Si $t_{S_1}^k > t_{\text{preCICE}}^k$, preCICE ajusta el próximo paso de S_1 a t_{preCICE}^k para mantener la ventana de tiempo en el valor establecido. En cambio, si otro participante como S_2 tiene $t_{S_2}^k < t_{\text{preCICE}}^k$, puede mantener su paso de tiempo sin cambios.

En el segundo enfoque, uno de los participantes define el tamaño de la ventana de tiempo. La **Figura 5.10** muestra este procedimiento, considerando que el participante S_1 fija el tamaño. Este enfoque solo es válido para esquemas de acoplamiento en serie, donde se define un orden de ejecución: S_1 se ejecuta antes que S_2 .

En este caso, cada vez que S_1 completa un paso de tiempo t_{S_1} , informa a preCICE su duración. Teniendo en cuenta el paso de tiempo actual de S_2 , preCICE calcula el tiempo restante t_{preCICE}^k que S_2 debe avanzar para completar la ventana. Por otro lado, S_2 calcula su próximo paso de tiempo $t_{S_2}^k$, que puede ser mayor o menor t_{preCICE}^k . Se elige el mínimo entre estos dos valores. Como en este caso, $t_{S_2}^k < t_{\text{preCICE}}^k$, entonces el tamaño del próximo paso de tiempo es $t_{S_2}^k$.

5.2.5 Interpolación de tiempo

Por defecto, los datos de acoplamiento se intercambian solo al final de cada ventana de tiempo, lo que implica que cada participante usa un valor constante durante toda la ventana. Este enfoque puede generar discontinuidades o saltos al pasar de una ventana de tiempo a la siguiente.

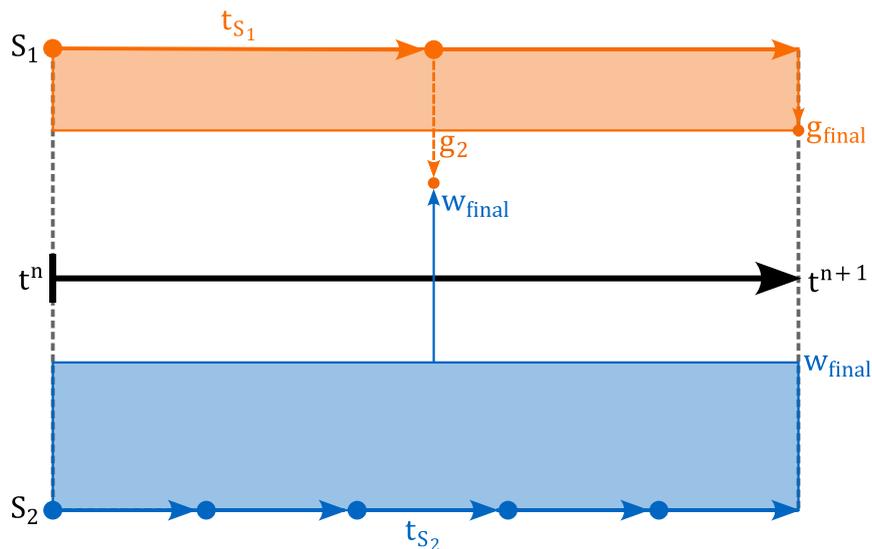


Figura 5.11. Ejemplo del proceso de subciclo sin interpolación. Los participantes simplemente asumen que los datos de acoplamiento permanecen constantes durante toda la ventana de tiempo. Cuando el participante S_1 completa el primer paso de tiempo, recibe el valor de la variable w proveniente de S_2 , el cual es igual al valor calculado en el final de la ventana de tiempo.

En la **Figura 5.11** se muestra esta situación para una sola ventana de acoplamiento que va desde t^n a t^{n+1} . Los participantes S_1 y S_2 utilizan los pasos de tiempo t_{S_1} y t_{S_2} para calcular los datos

de acoplamiento g y w , respectivamente. Sin embargo, solo intercambian los valores finales que se obtienen en el último paso de tiempo, identificados como g_{final} y w_{final} . Como resultado, cada participante usa un valor fijo del otro participante durante toda la ventana, independientemente del paso de tiempo actual.

Una solución para alcanzar una mayor precisión es aplicar interpolación lineal dentro de la ventana de tiempo, obteniendo condiciones de contorno de acoplamiento más suaves. En este enfoque, los participantes intercambian funciones dependientes del tiempo en lugar de valores fijos.

En la **Figura 5.12** se ilustra este enfoque. El participante S_2 calcula los valores w_{inicial} y w_{final} al inicio y al final de la ventana de tiempo. Con estos dos puntos, se construye una función lineal que aproxima la variación de esta variable en el tiempo. El participante S_1 ya no recibe un valor constante en cada paso de tiempo, si no que muestrea la función interpolada en cualquier momento dentro de la ventana de tiempo.

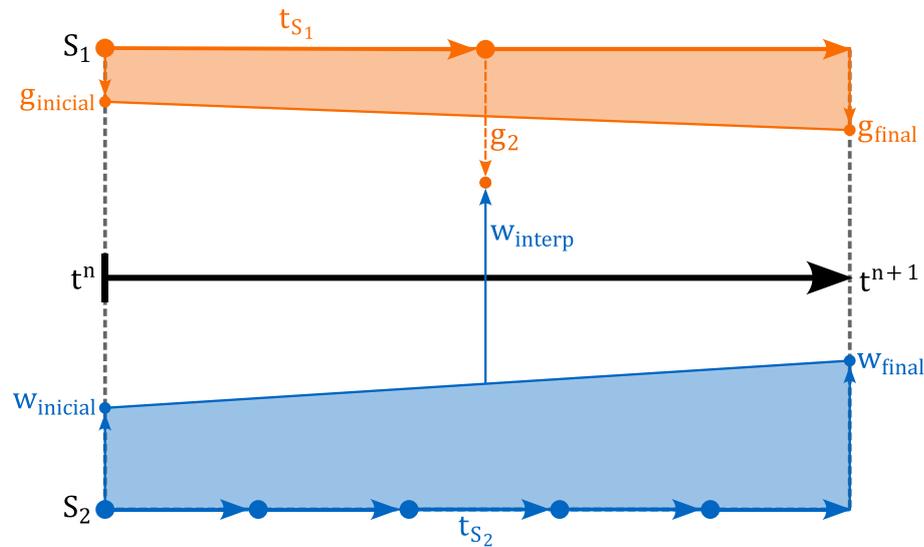


Figura 5.12. Ejemplo del proceso de subciclo con interpolación lineal. En cada paso de tiempo, cada participante recibe un valor de la propiedad que no es constante, si no proviene de interpolar linealmente los valores extremos de la ventana de tiempo. A diferencia del subciclo sin interpolación, S_1 al final de su primer paso de tiempo recibe un valor interpolado w_{interp} en lugar de w_{final} .

5.3 INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA EN UN CASO DE REFERENCIA

En la Sección 5.2 se presentaron las principales características de preCICE. Ahora, el siguiente paso consiste en mostrar cómo se implementa esta herramienta en una simulación acoplada concreta, utilizando un caso de referencia que permite validar el procedimiento técnico antes de aplicarlo a problemas más complejos como los de aneurismas cerebrales.

Para ello se selecciona un *benchmark* clásico en FSI: la propagación de una onda de presión a través de un tubo elástico tridimensional, caso ampliamente utilizado en la literatura para validar algoritmos de acoplamiento en modelos de flujo arterial [17]. La geometría consiste en un tubo de 5 mm de radio, 50 mm de longitud y 1 mm de espesor, sometido a una onda de presión durante tres milisegundos, con el objetivo de observar las deformaciones que esta genera.

La simulación se realiza mediante el acoplamiento de OpenFOAM y CalculiX, utilizando preCICE como código de acoplamiento. El flujo de información entre ambos participantes ocurre en cada paso de tiempo, configurando un esquema de acoplamiento bidireccional. Específicamente:

- OpenFOAM calcula los campos de velocidad y presión, y transmite las fuerzas de interacción (presión y esfuerzos viscosos) a CalculiX.
- CalculiX recibe estas fuerzas y calcula el campo de desplazamiento de la pared del tubo.
- Luego, los desplazamientos se transfieren a OpenFOAM, cerrando el ciclo de FSI.

Este se realiza en cada paso de tiempo y se repite de forma iterativa hasta alcanzar la convergencia dentro de cada ventana de tiempo, lo cual caracteriza al acoplamiento como implícito y en serie.

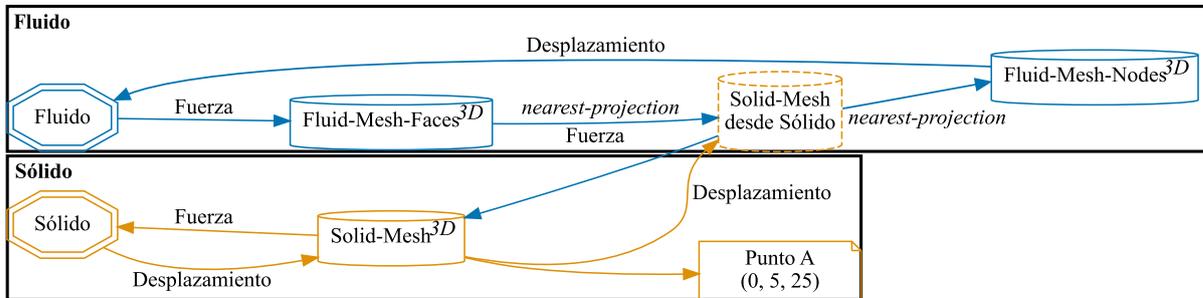


Figura 5.13. Esquema de acoplamiento FSI para el caso de tubo elástico. Se observa el flujo bidireccional de datos entre OpenFOAM y CalculiX a través de preCICE, incluyendo el método de mapeo de proyección más cercana (*nearest-projection*). A lo largo de la simulación, se guardan los desplazamientos de un punto A, ubicado en la mitad de la longitud del tubo para postproceso. Imagen creada con la herramienta *precice-config-visualizer*, adaptada y traducida por el autor.

La **Figura 5.13** muestra el esquema de acoplamiento entre ambos participantes. En este contexto, es importante clarificar cómo se manejan las mallas de acoplamiento en cada participante. El término Fluid-Mesh-Faces representa los centros de las caras de las celdas de la malla utilizada en OpenFOAM. Aquí es donde se calculan las fuerzas de fluido, dado que en un código de FVM, como OpenFOAM, los datos generalmente se calculan en los centros de las celdas o en los centros de sus caras.

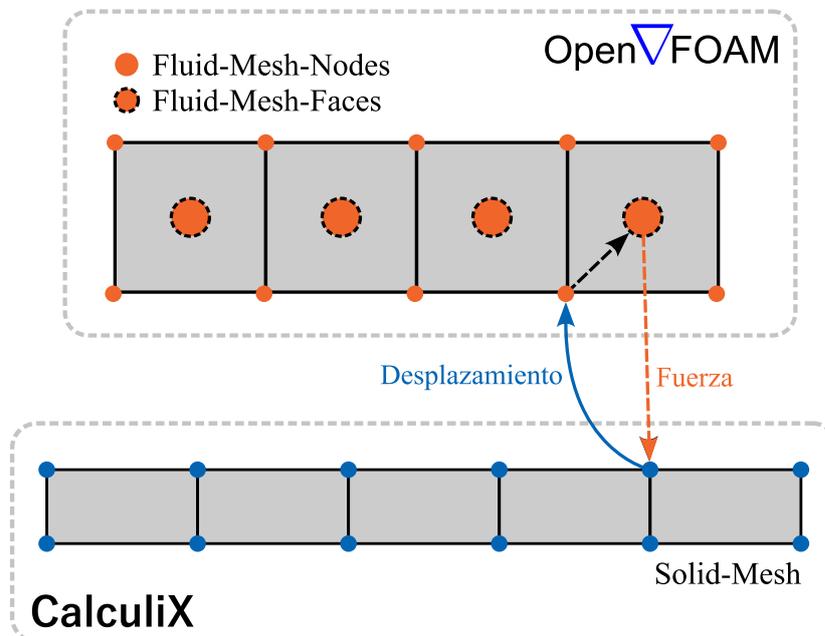


Figura 5.14. Representación conceptual del flujo de datos en una interfaz coincidente. En gris se ha representado algunas celdas de la malla del fluido, identificando los nodos tanto en los vértices de las celdas (Fluid-Mesh-Nodes) como los que se ubican en el centro (Fluid-Mesh-Faces). Las flechas a trazos indican transferencia de las variables mediante mapeo de datos.

Por otro lado, Fluid-Mesh-Nodes se refiere a los nodos de las celdas de la malla del fluido. Es donde OpenFOAM espera recibir los desplazamientos provenientes de CalculiX. En definitiva,

el dominio que caracteriza al fluido utiliza una única malla, pero los datos se almacenan de dos maneras diferentes.

El término Solid-Mesh corresponde a la superficie de la pared del tubo, utilizada en CalculiX para calcular su deformación mecánica.

Aunque en este caso las mallas en la interfaz de acoplamiento son coincidentes, el uso de diferentes ubicaciones de almacenamiento de las fuerzas y los desplazamientos hace necesario aplicar un método de mapeo de datos.

Por lo tanto, para aplicar correctamente los desplazamientos en OpenFOAM, es necesario mapear los valores desde los nodos (Fluid-Mesh-Nodes) a los centros de las caras de la malla del fluido. Asimismo, una vez calculadas las fuerzas del fluido en esas caras, deben transferirse devuelta a los nodos de la malla utilizada en CalculiX (Solid-Mesh). En la **Figura 5.14** se ilustra este procedimiento de manera conceptual.

En ambos casos se utiliza el método de mapeo de proyección más cercana, que permite interpolar de forma precisa entre ubicaciones espaciales distintas dentro de una interfaz coincidente.

5.3.1 Modelo material

En esta simulación, el fluido se considera incompresible, newtoniano y bajo flujo transitorio, por lo que su comportamiento está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (5.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5.11)$$

en donde se han despreciado las fuerzas volumétricas, como la gravedad. Se considera una viscosidad cinemática de 3 mm²/s y una densidad de 1000 kg/m³.

Por otro lado, la pared del tubo se modela como un sólido tridimensional de material elástico y compresible, utilizando el modelo constitutivo de Ciarlet. Los parámetros del modelo estructural son: un módulo de Young de 300 kPa y un coeficiente de Poisson de 0.3. La densidad del material es 1200 kg/m³.

5.3.2 Dominio computacional

El dominio computacional del caso de referencia consiste en un tubo tridimensional de 50 mm de longitud, 5 mm de radio y 1 mm de espesor. La **Figura 5.15** muestra la geometría del tubo, en el que se ha representado la línea media de la superficie de referencia, ubicada a 0.5 mm de la superficie interna.

Debido a la simplicidad de la geometría, las mallas fueron generadas directamente con SALOME utilizando el algoritmo NETGEN 1D-2D-3D, a diferencia del procedimiento más complejo descrito en el Capítulo 3 para geometrías de aneurismas.

Se definió un tamaño uniforme de elemento de 0.6 mm. La malla volumétrica resultante, utilizada en OpenFOAM, consta de 87063 elementos y 22763 nodos, tal como se ilustra en la **Figura 5.16**. En esta figura se destacan también las zonas refinadas próximas a la pared del tubo, donde se agregaron tres capas de celdas con un factor de estiramiento de 1.3, alcanzando un espesor total de 0.6 mm.

A partir de la malla volumétrica generada para el dominio fluido, se extrajo la superficie para generar la malla superficial utilizada por CalculiX. Dado que se emplea una superficie de referencia, el espesor de las paredes del tubo no se representa explícitamente en la malla, si no que se define directamente en el archivo de configuración de CalculiX.

La malla superficial está compuesta de 10052 elementos triangulares y 5078 nodos. Como ambas mallas fueron generadas a partir de una misma geometría base, la interfaz de acoplamiento entre ambas es coincidente, lo que facilita la transferencia de información durante la simulación FSI.

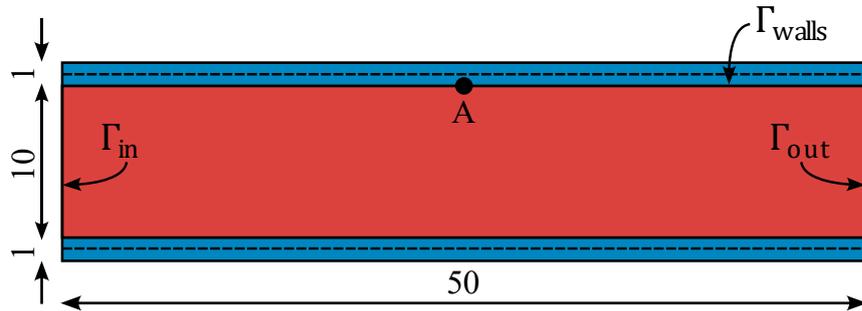


Figura 5.15. Geometría inicial del caso *benchmark*. Las dimensiones están en mm. En línea de trazos se indica la línea media de la superficie de referencia, a 0.5 mm de la superficie interna.

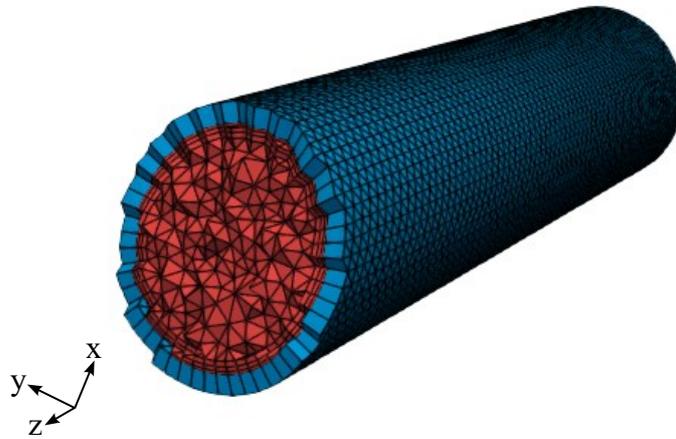


Figura 5.16. Dominio computacional del caso de referencia estándar. La malla en rojo hace referencia al lumen, y la malla en azul hace referencia a la extensión de la malla superficial a un sólido 3D.

5.3.3 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno para el dominio fluido se definen con el objetivo de generar una onda de presión que se propaga a lo largo del tubo con el tiempo.

En la salida del dominio, se impone una condición de Dirichlet para la presión, fijando su valor en cero

$$P = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{out}. \quad (5.12)$$

En la entrada, la presión se define como una función escalón en el tiempo: se aplica una presión de 10 mmHg (equivalente a 1.33 kPa) durante los primeros 3 ms, y luego se reduce bruscamente a cero, generando así una onda que se propaga hacia el extremo opuesto

$$P(t) = \begin{cases} 10 \text{ mmHg}, & 0 \leq t \leq 3 \text{ ms}, \\ 0, & 3 \text{ ms} < t \leq 20 \text{ ms}, \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{in}. \quad (5.13)$$

En las paredes del tubo se impone una condición de Neumann homogénea para la presión, garantizando que no se generen flujos normales a la superficie debido a gradientes de presión. Matemáticamente, esta condición se expresa como

$$\nabla_{\mathbf{n}} P = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{walls}}.^{29} \quad (5.14)$$

Respecto a la velocidad, se aplican condiciones de Neumann tanto en la entrada como en la salida, especificando que el gradiente normal de velocidad es cero. Físicamente significa que el flujo no se acelera espacialmente en estas regiones, permitiendo el desarrollo natural del flujo

$$\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}}. \quad (5.15)$$

En las paredes se aplica la condición conocida en OpenFOAM como *movingWallVelocity*, la cual es una extensión de la condición de no deslizamiento, adaptada para superficies en movimiento. Esta condición asegura que la velocidad relativa entre el fluido y la pared móvil sea cero

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{walls}}, \quad (5.16)$$

donde \mathbf{v}_f es la velocidad del fluido y \mathbf{v}_s la velocidad de la pared.

En cuanto al dominio sólido, las cargas externas sobre los extremos se consideran nulas, ya que no forman parte del objetivo del análisis. Además, se fijan los extremos del tubo restringiendo los desplazamientos en las tres direcciones del espacio

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{in}}, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{out}}, \end{cases} \quad (5.17)$$

siendo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ el vector de desplazamiento en un punto \mathbf{x} . En coordenadas cartesianas, $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_x(\mathbf{x}), u_y(\mathbf{x}), u_z(\mathbf{x}))$.

5.4 RESULTADOS Y VALIDACIÓN

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar el modelo de FSI al caso de referencia descrito en la Sección 5.3. La **Figura 5.17** muestra la deformación de la pared del tubo a los 5 ms. Se observa una deformación simétrica con respecto al eje longitudinal del tubo, lo que concuerda con la naturaleza simétrica del campo de presión aplicado. Para facilitar su interpretación visual, los resultados se han amplificados por un factor de diez.

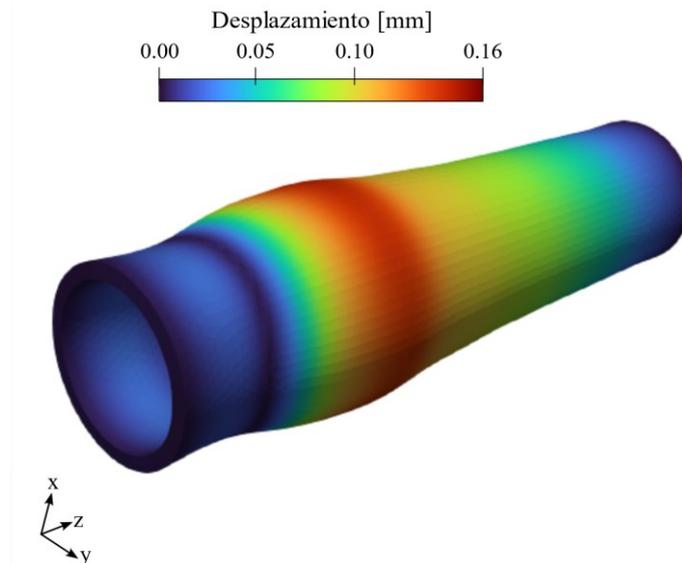


Figura 5.17. Campo de desplazamiento cuando $t = 5$ ms. Los resultados se han amplificado por diez para una mejor visualización de la deformación.

Para validar cuantitativamente la simulación, se analiza el desplazamiento de un punto ubicado en el centro de la longitud del tubo, identificado punto A en la **Figura 5.15**. En particular, se

²⁹ $\nabla_{\mathbf{n}} \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla$.

estudian sus desplazamientos radial y axial a lo largo del tiempo, y se comparan con los resultados reportados en [17, 51, 52, 53].

La **Figura 5.18** y **Figura 5.19** muestran, respectivamente, la evolución temporal del desplazamiento radial y axial del punto A. Los resultados obtenidos presentan una alta concordancia con las referencias mencionadas, lo que valida la configuración utilizada y el esquema de acoplamiento implementado en preCICE. Esto refuerza la confiabilidad del modelo, una condición esencial para su aplicación posterior en geometrías más complejas, como las de aneurismas cerebrales.

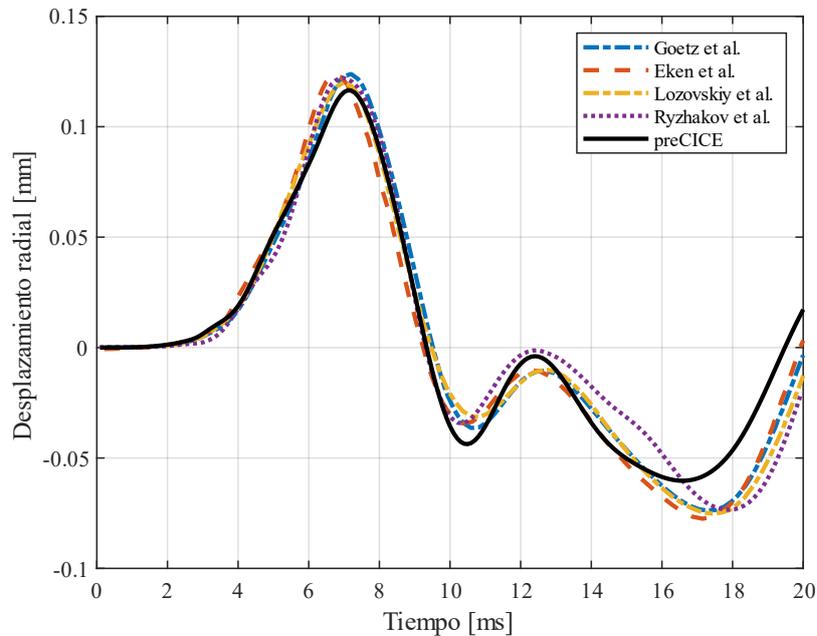


Figura 5.18. Desplazamiento radial del punto A de la Figura 5.15. Los resultados se comparan con cuatro artículos (Goetz et al., Eken et al., Lozovskiy et al. y Ryzhakov et al.). Los resultados propios están dados por la curva de color negro.

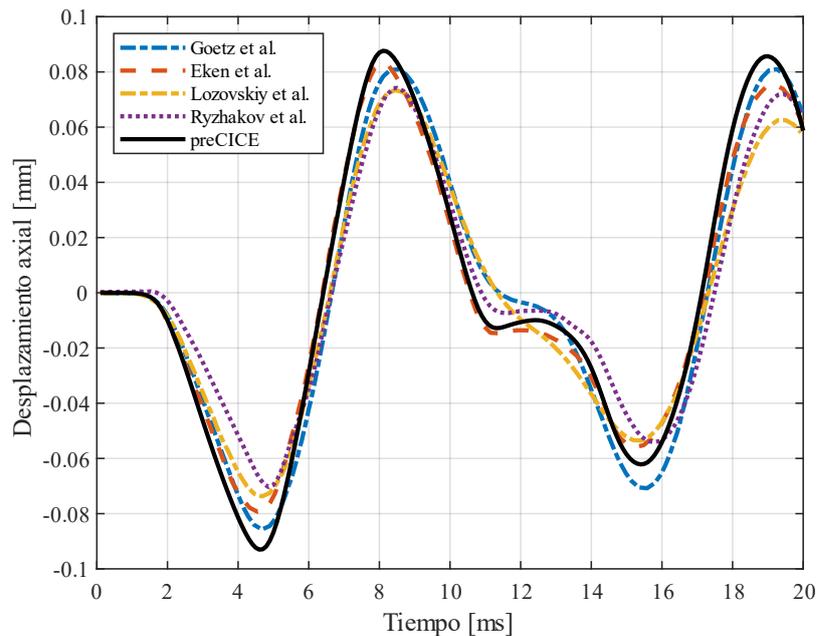


Figura 5.19. Desplazamiento axial del punto A de la Figura 5.15 y comparación con las referencias mencionadas anteriormente.

Es importante señalar que las diferencias observadas entre los distintos estudios pueden atribuirse a diversos factores, como el modelo material utilizado para representar la pared, el tipo y la cantidad de elementos en las mallas. Por ejemplo, mientras que algunos autores modelan el sólido como un material de Saint Venant-Kirchhoff, mientras que otros utilizan modelos neo-Hookeanos o hiperelásticos. Además, el uso de elementos tetraédricos o hexaédricos, así como el refinamiento de la malla, puede impactar en la precisión y estabilidad de la simulación. Un mayor número de elementos generalmente conduce a resultados más precisos, pero también a un mayor costo computacional. Las diferencias en la discretización espacial y temporal, como el tamaño del paso de tiempo y el método de integración temporal, también pueden influir en la precisión y estabilidad de las simulaciones. Por lo tanto, al comparar los resultados entre diferentes estudios, es importante tener en cuenta estas diferencias.

La **Tabla 5.1** resume los modelos materiales utilizados en cada estudio, junto con el número de elementos empleados en la malla del fluido y del sólido.

Tabla 5.1. Modelo material utilizado por cada autor para el cálculo de las deformaciones de la pared. También se especifican el número de elementos en la malla del fluido y del sólido.

| Autor(es) | Modelo material de la pared | Número de elementos en la malla del fluido | Número de elementos en la malla del sólido |
|------------------|--------------------------------------|--|--|
| Goetz et al. | Neo-hookeano (sólido 3D) | 176k (tetraedros) | 64k (tetraedros) |
| Eken et al. | Saint Venant - Kirchhoff (sólido 3D) | 270k en total (hexaedros) | |
| Lozovskiy et al. | Saint Venant - Kirchhoff (sólido 3D) | 89k (tetraedros) | 38k (tetraedros) |
| Ryzhakov et al. | Hipoelástico (sólido 3D) | 300k en total (tetraedros) | |
| Este trabajo | Ciarlet (lámina delgada) | 87k (tetraedros) | 10k (triángulos) |

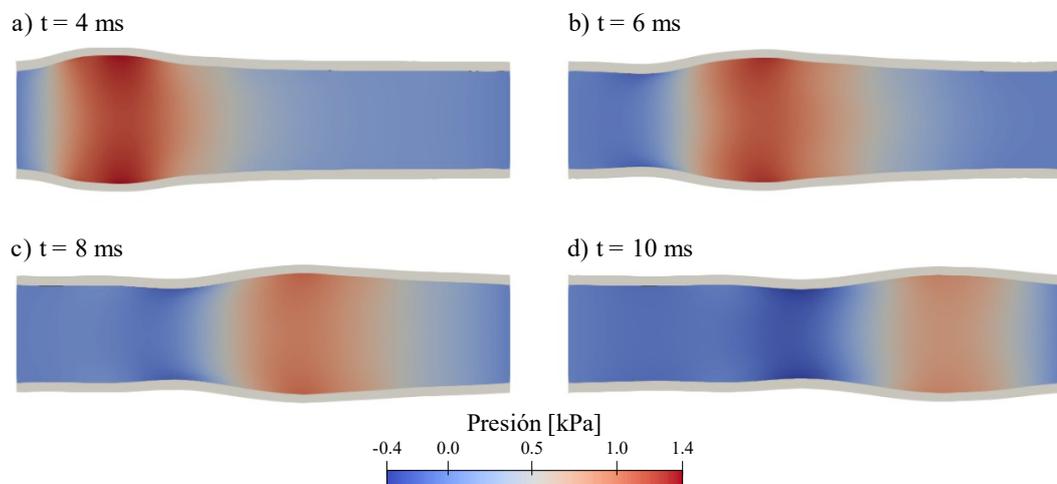


Figura 5.20. Viste de corte longitudinal medio en diferentes instantes de tiempo: a) $t = 4$ ms, b) $t = 6$ ms, c) $t = 8$ ms y d) $t = 10$ ms. Se ha representado el campo de presión en kPa y las deformaciones experimentadas multiplicadas por un factor de diez para una mejor visualización.

Para visualizar la propagación de la onda de presión y su efecto sobre la deformación del tubo, se presenta en la **Figura 5.20** una vista de corte longitudinal del dominio en cuatro instantes de tiempo. Se muestra el campo de presión y las deformaciones de la pared amplificadas por diez para una mejor visualización.

Durante los primeros intentos de simulación, se obtuvo una curva incorrecta de desplazamiento radial (**Figura 5.21**), producto de una configuración inadecuada del algoritmo PIMPLE en OpenFOAM. Para corregirlo, se aplicaron tolerancias más estrictas para la presión y velocidad y se añadieron correctores externos, como se detalla en la Sección 3.3.

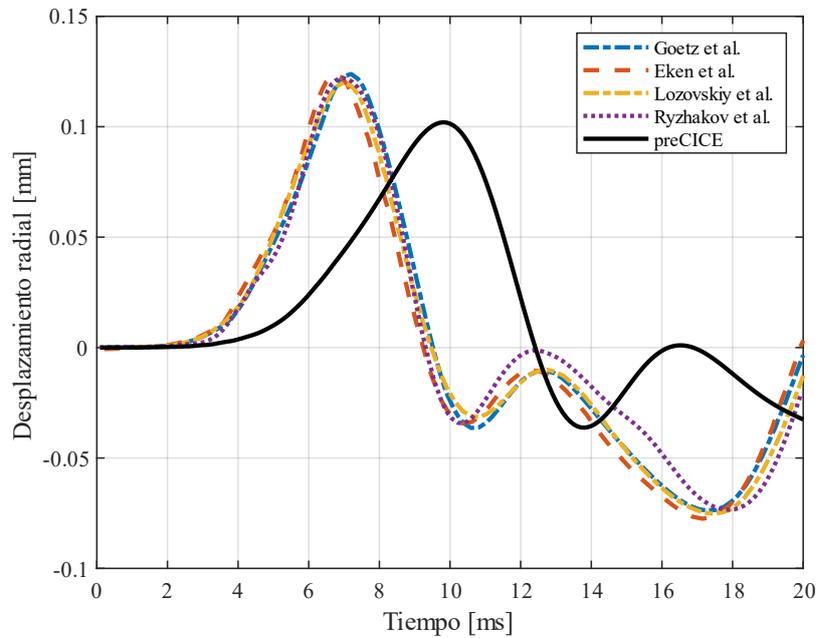


Figura 5.21. Curva de desplazamiento radial desfasada de los resultados esperados como consecuencia de una mala configuración en el algoritmo PIMPLE, implementado en OpenFOAM.

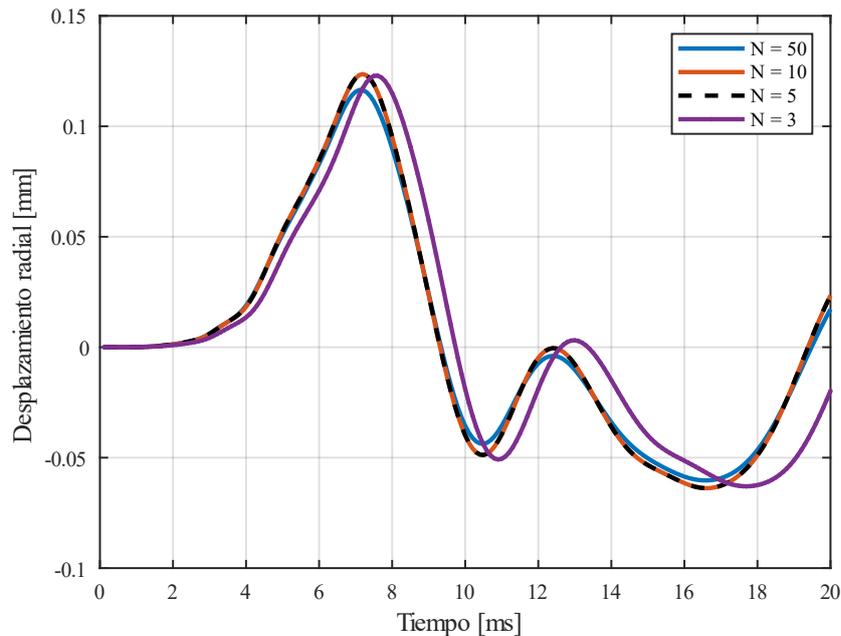


Figura 5.22. Desplazamiento radial del punto ubicado en la mitad de la longitud del tubo para diferentes valores de correctores externos del algoritmo PIMPLE.

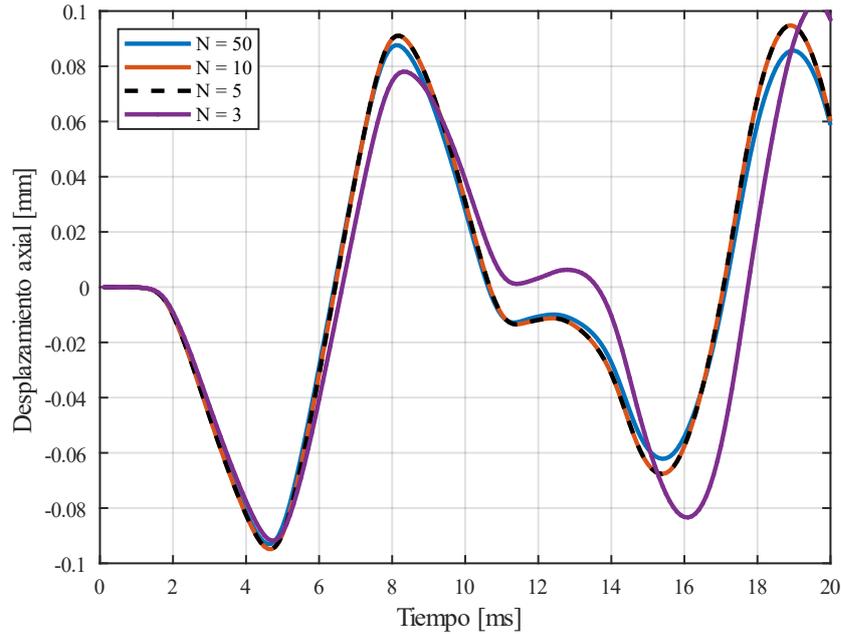


Figura 5.23. Desplazamiento axial para diferentes valores de correctores externos.

En los resultados presentados en la **Figura 5.18** y la **Figura 5.19**, se utilizó un número de correctores externos de $N = 50$. Sin embargo, este valor representa un alto costo computacional, especialmente en simulaciones con geometrías reales de aneurismas cerebrales. Por este motivo, se realizó un estudio de sensibilidad variando el número de correctores externos.

La **Figura 5.22** y la **Figura 5.23** muestran el desplazamiento radial y axial del punto A para diferentes valores de correctores externos. Se observa que con $N = 3$, la diferencia respecto a los resultados previos es notable, mientras que $N = 5$ y $N = 10$ las curvas son prácticamente coincidentes. Dado que ambas opciones conducen a los mismos resultados, se opta por utilizar $N = 5$ correctores externos en simulaciones posteriores, reduciendo así el costo computacional sin comprometer la precisión.

CAPÍTULO 6 ANÁLISIS DE UN CASO ESPECÍFICO DE ANEURISMA

En este capítulo se analiza el caso C0005 de la base de datos AneuriskWeb, con el objetivo de comparar los resultados de simulaciones numéricas bajo distintos supuestos. Esta comparación permite evaluar la sensibilidad de los modelos fluidodinámicos y estructurales a ciertas hipótesis comúnmente utilizadas en el estudio de aneurismas cerebrales, y valorar su validez en función del impacto que generan sobre el WSS.

Todas las simulaciones se llevaron a cabo a lo largo de un único ciclo cardíaco, siguiendo lo observado en el Capítulo 3, donde se concluyó que simular más de un ciclo no producía diferencias significativas en los resultados. Esta elección permite reducir el tiempo computacional sin comprometer la precisión en los resultados.

Uno de los análisis es evaluar la hipótesis de pared rígida, comúnmente adoptada en simulaciones de CFD, comparándola con el modelo adoptado de FSI descrito en el Capítulo 5. Dado que los modelos FSI presentan una mayor complejidad numérica y costo computacional, se busca determinar si este supuesto es una aproximación razonable.

Además, se analiza el efecto del estado pretensionado de la pared, estimado mediante la metodología presentada en el Capítulo 4. Para ello, se realizan simulaciones FSI sobre el mismo modelo geométrico con y sin considerar dicho estado, y se cuantifica su influencia sobre el WSS.

A lo largo del capítulo se desarrolla:

- la descripción del preprocesamiento geométrico y generación de los dominios computacionales (Sección 6.1),
- la estimación de zonas críticas mediante WSS y el patrón de flujo (Sección 6.2),
- la comparación entre modelos con pared rígida y modelos FSI (Sección 6.3), y
- la estimación del estado pretensionado en simulaciones FSI (Sección 6.4).

6.1 PREPARACIÓN DEL CASO

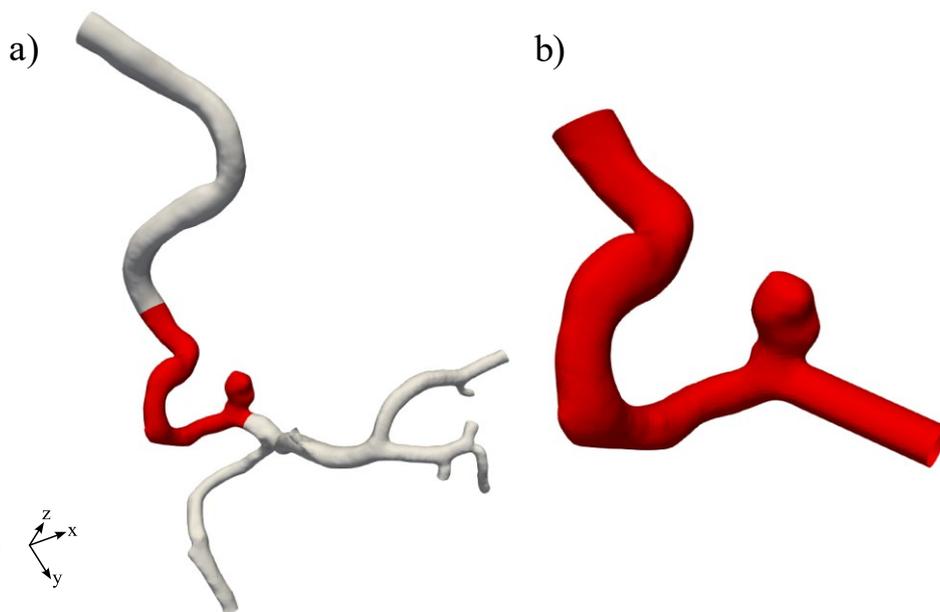


Figura 6.1. Geometría del caso C0005 de la base AneuriskWeb. a) Árbol arterial completo destacando en rojo la porción de interés, a partir de la cual se construye la geometría de análisis. b) Geometría utilizada para realizar las simulaciones propuestas, en donde se ha modificado la arteria en la región distal para evitar incorporar una bifurcación.

La geometría correspondiente al caso C0005 fue adaptada para definir un dominio computacional adecuado para las simulaciones. El modelo original incluye el árbol arterial con múltiples ramificaciones. Para reducir la complejidad del dominio y facilitar la implementación de las condiciones de contorno, se seleccionó una región de interés que contiene el aneurisma, y se realizaron cortes en zonas proximales y distales definiendo la región de entrada y de salida. Con el objetivo de evitar el tratamiento de la bifurcación presente en el extremo distal del modelo original, esta porción fue reemplazada por la extrusión de una sección arterial representativa, lo que permite trabajar con una única salida.

El resultado de este preprocesamiento se muestra en la **Figura 6.1**, donde:

- en a) se observa el árbol arterial completo, destacando en rojo la porción seleccionada,
- en b) se ilustra la geometría final utilizada en las simulaciones.

6.1.1 Modelo material

La pared arterial se modeló como una estructura delgada con espesor constante de 0.25 mm, tanto en las regiones sanas como en la zona del aneurisma. Este valor se encuentra dentro del rango comúnmente reportado en la literatura para geometrías similares [54, 17, 21].

Para describir el comportamiento mecánico del tejido, se adopta el modelo de hiperelástico de Ciarlet, introducido previamente en el Capítulo 4, con módulo de elasticidad de 4 MPa, coeficiente de Poisson de 0.45, y densidad de 1000 kg/m³. Se asumen propiedades homogéneas en toda la estructura.

En cuanto al fluido, se lo modela newtoniano, con una viscosidad dinámica de 3.5 mPa·s, y una densidad de 1054 kg/m³. Esta elección se basa en los resultados obtenidos en el análisis de los casos C0034 y C0005 (ver 0), donde se observó que modelar la sangre como fluido newtoniano o no newtoniano no produce diferencias significativas en la distribución ni en los valores máximos de WSS.

Tabla 6.1. Parámetros materiales utilizados para el modelo de la sangre y la pared arterial.

| Dominio | Parámetro | Valor | Unidad | Observaciones |
|---------|-------------------------|-------|-------------------|--------------------------------|
| Sólido | Espesor de la pared | 0.25 | mm | Constante en toda la geometría |
| | Módulo de elasticidad | 4 | MPa | Modelo de Ciarlet |
| | Coefficiente de Poisson | 0.45 | - | - |
| | Densidad | 1000 | kg/m ³ | - |
| Fluido | Densidad | 1054 | kg/m ³ | - |
| | Viscosidad dinámica | 3.5 | mPa·s | Modelo newtoniano |

6.1.2 Dominios computacionales

La malla superficial de la pared arterial se generó a partir de una serie de pasos utilizando SALOME y algunas de las herramientas desarrolladas por el grupo MoCCAI, similares a los descrito previamente en el Capítulo 3. El procedimiento incluye un remallado uniforme de la superficie, seguido de un refinamiento localizado en la región del cuello del aneurisma. La **Figura 6.2** resume el flujo de trabajo para esta etapa.

Además, en SALOME se identificaron las distintas regiones de la superficie: entrada, salida y pared arterial, para la correcta asignación de las condiciones de contorno descritas más adelante. La malla superficial obtenida, está compuesta por 39104 elementos triangulares y 19615 nodos.

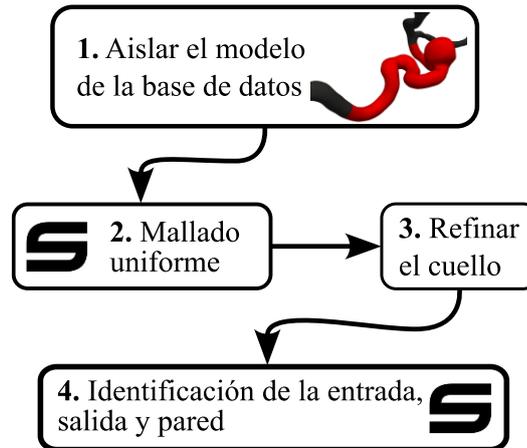


Figura 6.2. Procedimiento para generar la malla superficial utilizada en CalculiX para el cálculo del campo de desplazamiento.

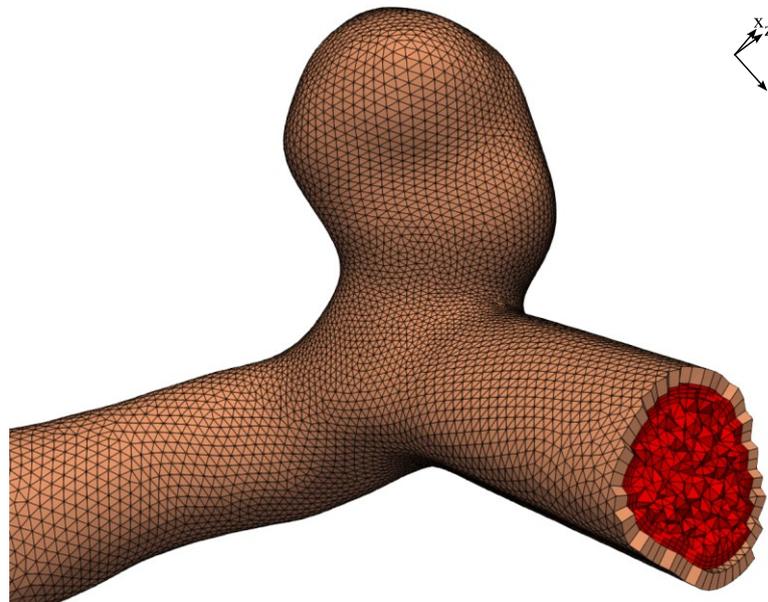


Figura 6.3. Malla superficial que describe la pared arterial, para estimar las deformaciones en CalculiX y malla volumétrica utilizada en OpenFOAM. En la pared arterial, se observan los elementos tipo *wedge*.

La malla del dominio fluido se generó siguiendo el procedimiento descrito en el Capítulo 3. Se aplicaron refinamientos en la región del cuello del aneurisma con elementos de 0.11 mm, y en la región cercana a la pared arterial. En esta última zona, se añadieron tres capas prismáticas para capturar los gradientes de velocidad. Esta malla, utilizada en OpenFOAM, está formada por 398091 elementos y 114244 nodos. La **Figura 6.3** muestra la malla superficial, que representa la pared arterial, y la volumétrica, que representa el lumen.

La interfaz entre ambos dominios corresponde a la superficie interna de la pared arterial. Para garantizar la coincidencia de los nodos en la interfaz, se utilizó como geometría de entrada para el mallado volumétrico la misma malla superficial mostrada en la **Figura 6.3**. De este modo, se simplifica la transferencia de fuerzas y desplazamientos durante el proceso de acoplamiento FSI.

6.1.3 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno para el fluido son las definidas en el Capítulo 3. En resumen, se impone en la entrada un perfil de velocidad uniforme pero variable en el tiempo según la forma de onda del ciclo cardíaco. En la salida del dominio, se implementa una resistencia hidráulica con el fin de mantener una presión fisiológica oscilando entre 80 y 120 mmHg.

La **Figura 6.4** esquematiza la configuración adoptada para el acoplamiento FSI, indicando las fronteras sobre las cuales se imponen las distintas condiciones de contorno para ambos participantes.

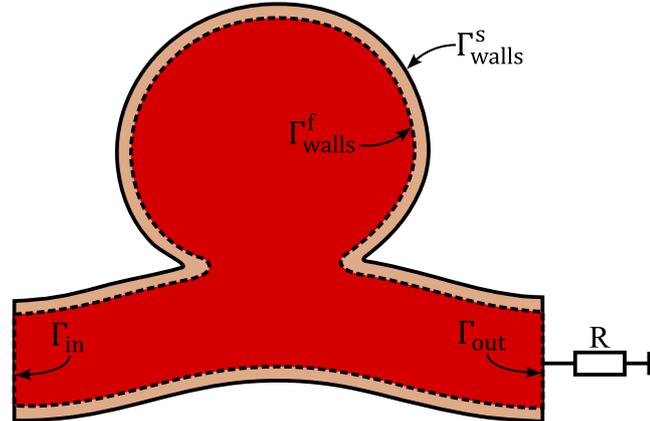


Figura 6.4. Configuración propuesta para FSI de un aneurisma. Se han indicado cada una de las fronteras sobre las cuales se imponen ciertas condiciones de contorno, para ambos participantes (OpenFOAM y CalculiX). En rojo se ha representado el lumen y en marrón la pared arterial. En línea de trazos se representa la superficie de referencia del sólido, a partir de la cual se construye la malla volumétrica de la pared arterial en CalculiX.

En el dominio estructural, los extremos de la arteria se fijan en las tres direcciones evitando las traslaciones de los nodos ubicados en las regiones de entrada y salida. No se aplican cargas externas adicionales distintas de las inducidas por el acoplamiento con el flujo sanguíneo.

Esta condición de contorno del sólido se expresa matemáticamente como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}, \quad (6.1)$$

donde $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ representa el vector de desplazamiento de un punto \mathbf{x} .

6.1.4 Esquema de acoplamiento

El acoplamiento entre OpenFOAM y CalculiX se realiza a través de preCICE, según lo descrito en el Capítulo 5. En este caso, se utiliza un esquema paralelo implícito especialmente adecuado para problemas de FSI donde existe un fuerte acoplamiento entre los campos de presión, velocidad y desplazamiento. En este tipo de simulaciones, las soluciones de ambos dominios están altamente relacionadas, por lo que la estabilidad numérica requiere un enfoque implícito.

En contraste, un esquema explícito obligaría a utilizar pasos de tiempo muy pequeños para mantener la estabilidad, lo cual implicaría un elevado costo computacional. Por otra parte, un esquema en serie limita la eficiencia en entornos paralelos debido a la ejecución secuencial de los participantes. En cambio, el esquema paralelo adoptado en estas simulaciones permite que ambos participantes se ejecuten simultáneamente, lo que mejora el rendimiento de la simulación [55].

La simulación comienza con el cálculo del flujo sanguíneo en OpenFOAM, a partir del campo de presión inicial. Luego, se transmiten las fuerzas hacia CalculiX, donde se resuelve la deformación de la pared. Este intercambio de datos ocurre en paralelo y se repite en cada paso de tiempo hasta alcanzar la convergencia establecida por el criterio de acoplamiento.

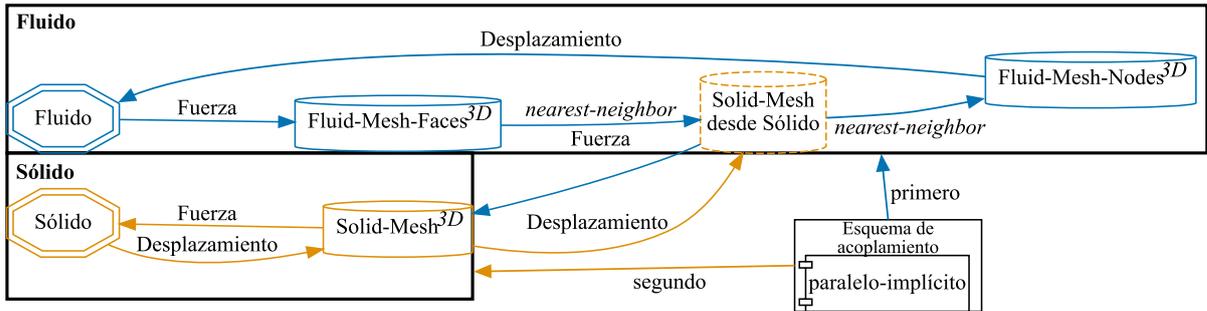


Figura 6.5. Esquema de acoplamiento establecido mediante preCICE para realizar FSI del caso propuesto. Imagen generada a partir de la herramienta “precice-config-visualizer” de preCICE y traducida por los autores.

La **Figura 6.5** presenta el esquema de acoplamiento definido en preCICE. En ella se representan gráficamente las superficies de interacción y los flujos de datos entre los participantes.

La transferencia de variables entre dominios se realiza mediante el método del vecino más cercano (*nearest-neighbor mapping*), aprovechando que las mallas coinciden en la interfaz de acoplamiento. Esto permite una transferencia directa y eficiente de los datos entre nodos coincidentes, sin necesidad de interpolaciones adicionales.

6.2 RESULTADOS Y ESTIMACIÓN DE ZONAS CRÍTICAS

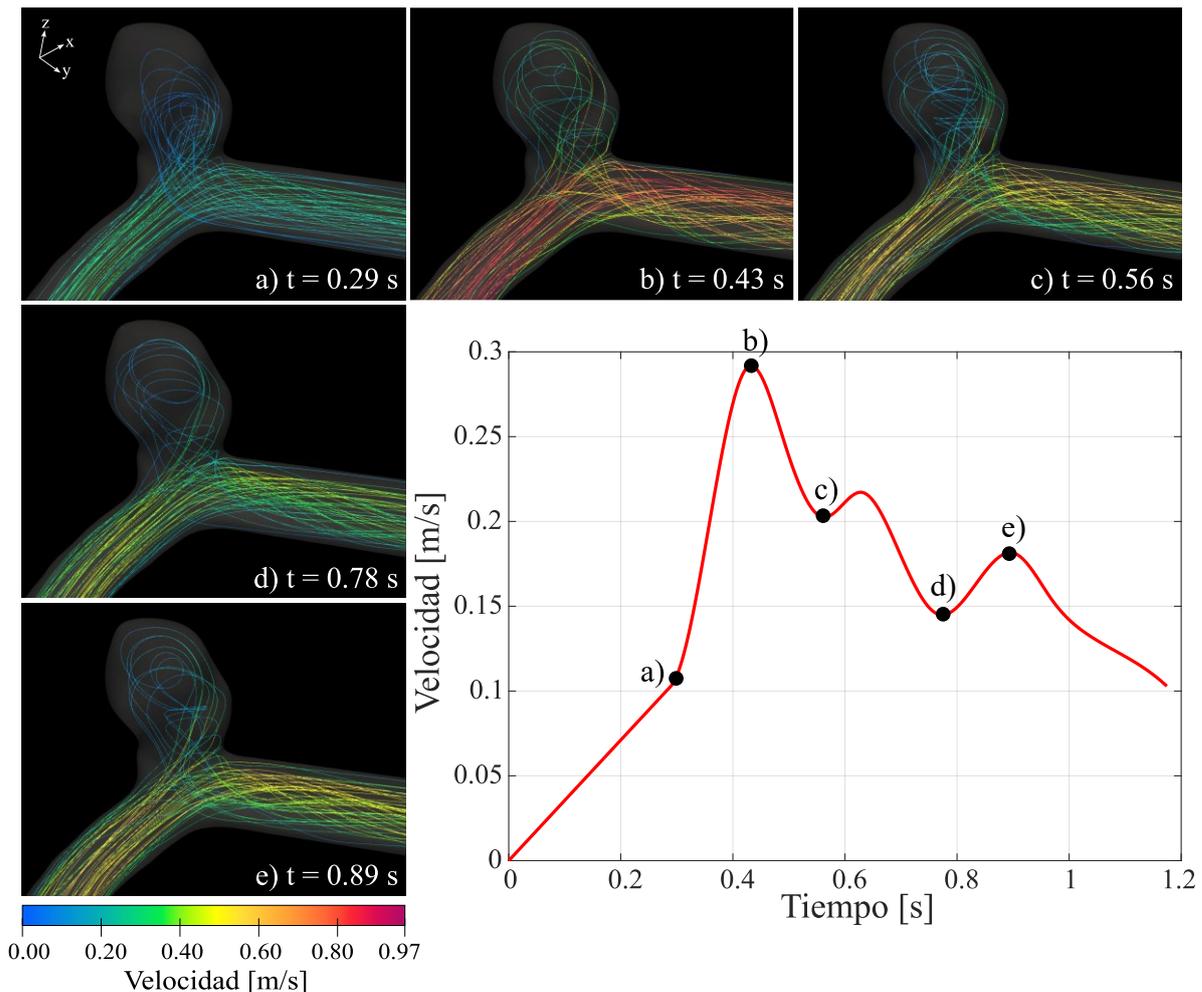


Figura 6.6. Líneas de corriente para distintos instantes del ciclo cardíaco. Se observa el patrón del flujo a lo largo del aneurisma, destacando zonas de recirculación y desvío de trayectoria.

En esta sección se identifican las regiones críticas del caso C0005, modelado bajo FSI. La geometría utilizada representa el estado actual de la arteria y del aneurisma, ya sometidos a cargas fisiológicas. Más adelante se analizan los efectos de considerar el estado pretensionado de la pared arterial.

El análisis se centra en el comportamiento del flujo y en la distribución del WSS durante el pico sistólico, es decir, el instante del ciclo cardíaco donde los esfuerzos hemodinámicos son máximos.

En la **Figura 6.6** se ilustran las líneas de corriente obtenidas en el lumen, en los instantes donde la velocidad en la entrada alcanza los valores máximos y mínimos. Se observa cómo parte del flujo se desvía hacia el aneurisma generando una región de recirculación. En el pico sistólico, el flujo principal se dirige tangencialmente hacia la región distal del cuello, lo que sugiere una zona crítica por valores elevados de WSS. También se aprecia que una fracción importante del flujo no circula por el interior del aneurisma, sino que continúa hacia la arteria distal.

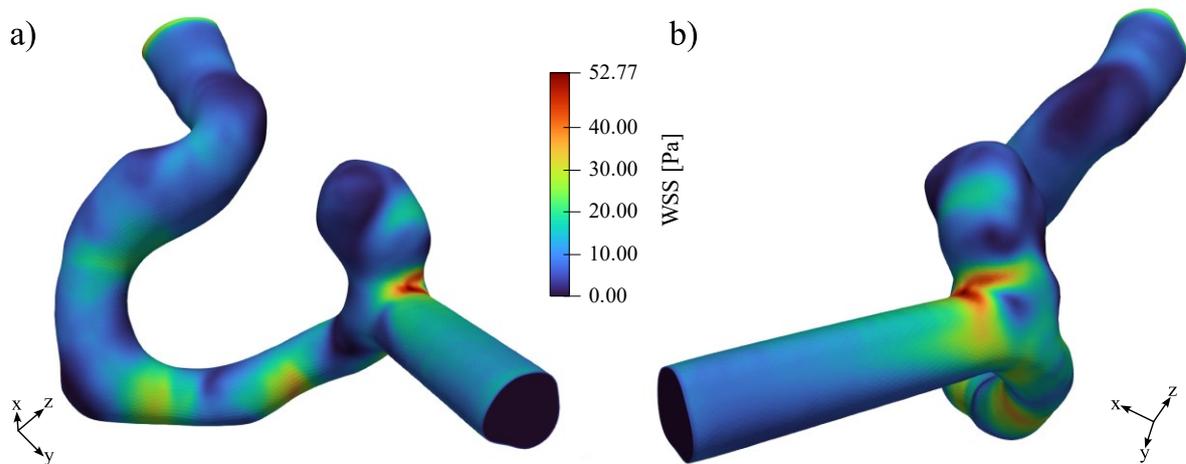


Figura 6.7. Campo de WSS sobre la superficie de la arteria y aneurisma en el pico sistólico. Se destacan valores máximos en la zona distal del cuello y valores mínimos en regiones de bajo flujo.

La **Figura 6.7** muestra la distribución de WSS sobre la pared arterial durante el pico sistólico. Se identifican valores máximos (52.77 Pa) en la zona distal del cuello, lo que refuerza la hipótesis de que esta región está sometida a condiciones críticas. En la cúpula del aneurisma, el WSS es también elevado pero menor (18.02 Pa), mientras que en otras regiones se observan valores significativamente más bajos, característicos de flujos lentos.

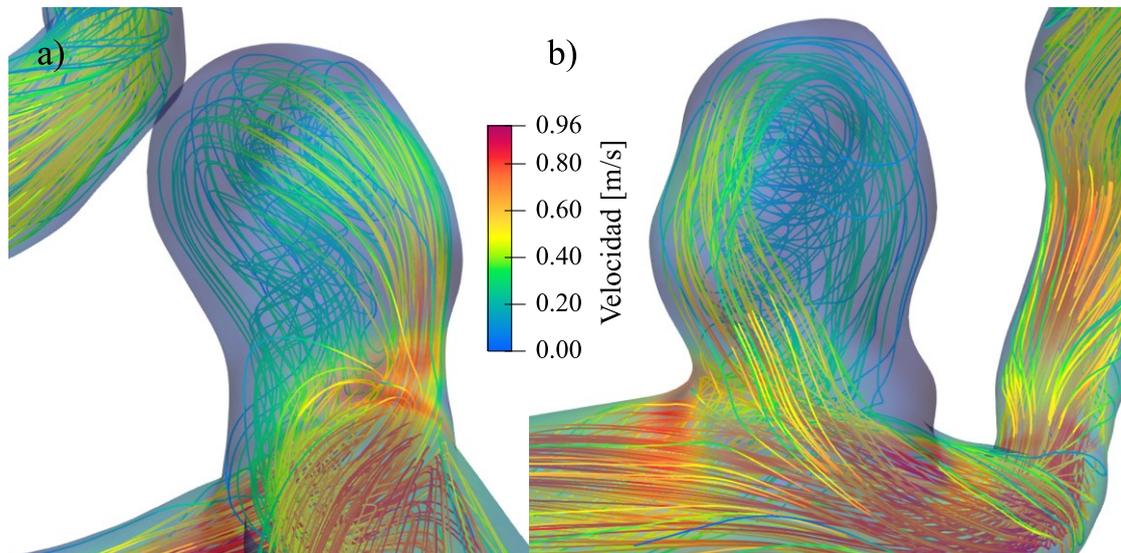


Figura 6.8. Líneas de corriente superpuestas al campo de WSS durante el pico sistólico. a) Vista frontal. b) Vista lateral.

En la **Figura 6.8** se combinan líneas de corriente con el campo de WSS. Se confirma la correspondencia entre las zonas de mayor velocidad y las regiones con WSS más elevado, en particular en el cuello distal y parte de la cúpula. En la vista frontal se observa la división del flujo entre la porción que ingresa al aneurisma y la que continúa por la arteria principal. Algunas líneas de corriente impactan directamente sobre el cuello, y luego se desvían siguiendo su trayectoria normal.

La **Figura 6.9** presenta el campo de desplazamiento de la pared arterial en el instante del pico sistólico. El desplazamiento máximo ocurre en la región posterior del aneurisma, alcanzando 0.25 mm, un valor comparable al espesor de la pared e incluso dentro de los rangos reportados por estudios previos [21, 54, 17].

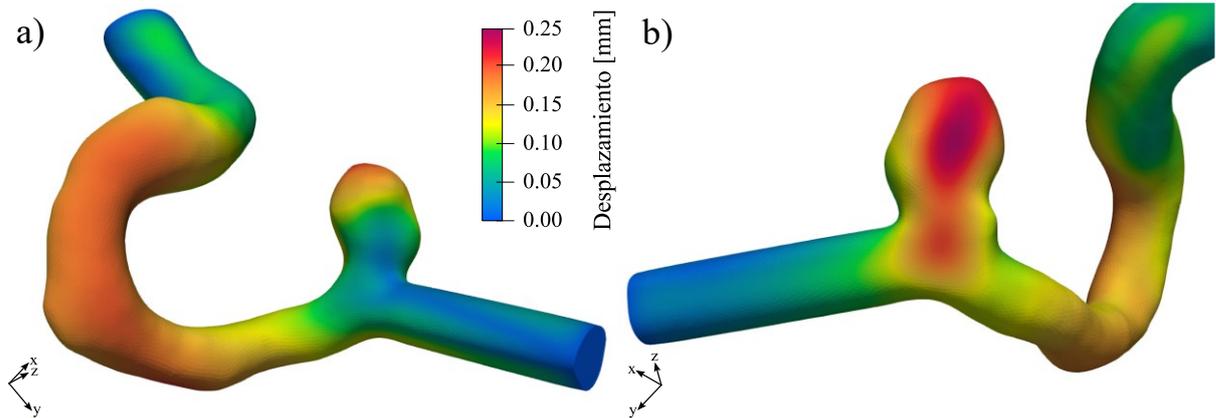


Figura 6.9. Campo de desplazamiento de la pared en el pico sistólico. Se observa una deformación máxima de 0.25 mm.

Para evaluar la pulsatilidad de la arteria, se analiza la variación del diámetro de la arteria entre los extremos del rango de presión fisiológica (80-120 mmHg). De acuerdo con [56], esta variación suele alcanzar el 10% en tejidos arteriales.

En el caso analizado, los resultados son

$$\Delta\phi_{\text{distal}} = \frac{\phi_{\text{Pmax}} - \phi_{\text{Pmin}}}{\phi_{\text{Pmin}}} 100\% = \frac{2.52 \text{ mm} - 2.47 \text{ mm}}{2.47 \text{ mm}} 100\% = 2.02 \%, \quad (6.2)$$

$$\Delta\phi_{\text{proximal}} = \frac{2.95 \text{ mm} - 2.84 \text{ mm}}{2.84 \text{ mm}} 100\% = 3.87 \%. \quad (6.3)$$

Estas variaciones moderadas son una consecuencia directa de la elección del módulo de elasticidad (4 MPa), que si bien es coherente con el rango típico para tejido arterial [56], también busca considerar la restricción parcial de deformación que experimenta la pared arterial debido al entorno cerebral.

Aunque el tejido aneurismático puede ser heterogéneo y en ocasiones más blando que el tejido arterial sano, el uso de un valor uniforme actúa como una simplificación razonable al incorporar implícitamente la restricción impuesta por las estructuras adyacentes. Esto explica que las variaciones radiales sean menores que en modelos más blandos, pero sigue capturando el efecto pulsátil del sistema.

Estos resultados sirven como referencia las siguientes secciones, donde se evalúan los efectos de diferentes hipótesis estructurales, como la pared rígida o la inclusión del estado pretensionado, sobre las regiones críticas previamente identificadas.

6.3 INFLUENCIA DEL SUPUESTO DE PARED RÍGIDA

En esta sección se comparan los resultados obtenidos mediante dos enfoques distintos: una simulación de CFD bajo el supuesto de pared rígida, y una simulación acoplada de FSI. Ambas simulaciones comparten condiciones de contorno y parámetros físicos para el fluido.

La **Figura 6.10** muestra la diferencia geométrica entre ambos modelos. Se observa que las deformaciones más importantes ocurren en la parte posterior del aneurisma, ya que la mayor parte del flujo de entrada impacta directamente sobre esta zona.

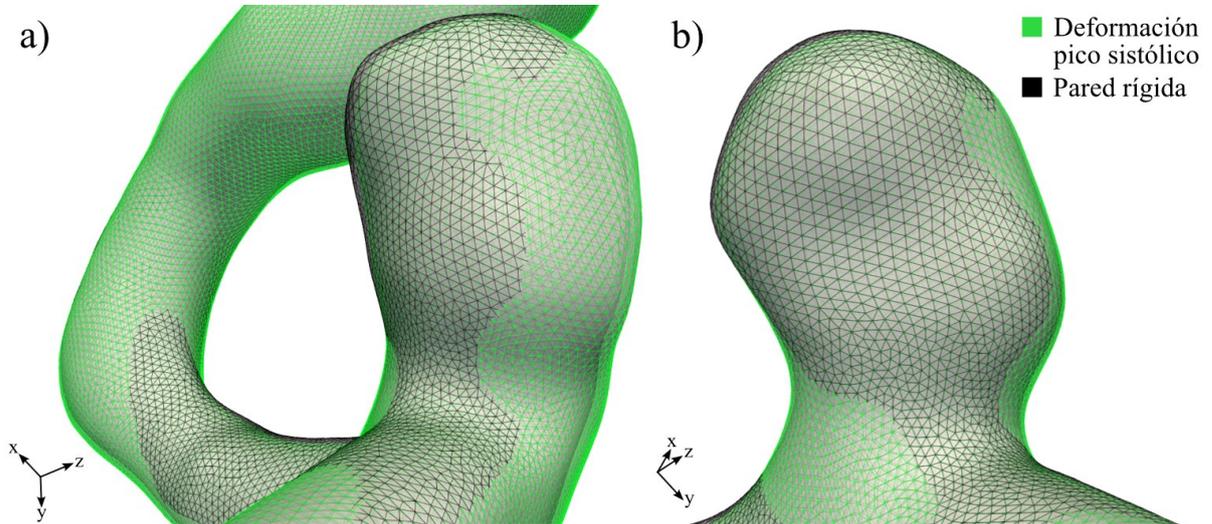


Figura 6.10. Comparación entre la configuración con pared flexible en el pico sistólico y el modelo con pared rígida. La mayor deformación se produce en la región posterior del aneurisma.

La **Figura 6.11** presenta la distribución del WSS durante el pico sistólico para ambos modelos. Aunque el patrón general se mantiene, existen diferencias en la magnitud de los máximos, especialmente en las regiones del cuello y la cúpula del aneurisma. En ambos casos, el modelo con pared rígida produce una sobrestimación del WSS con respecto al modelo que considera la deformación de la pared.

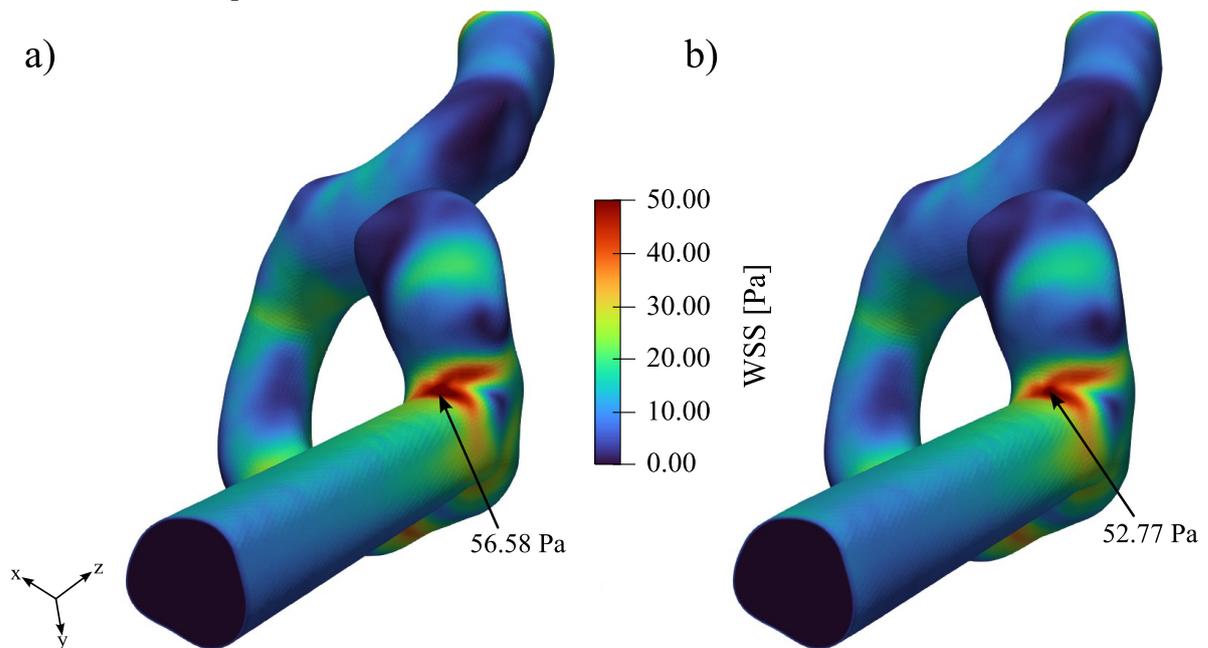


Figura 6.11. Comparación del campo de WSS en el cuello del aneurisma: a) modelo con pared rígida y b) modelo FSI.

La **Figura 6.12** refuerza esta observación al enfocarse únicamente en la cúpula del aneurisma. Si bien el patrón es el mismo, la magnitud de WSS es mayor en el caso rígido.

Para cuantificar esta diferencia, se calcula el porcentaje de sobrestimación relativa en ambas zonas críticas, utilizando como referencia el caso de pared rígida

$$\Delta \| \mathbf{t}_{\text{WSS}} \| = \frac{ \| \| \mathbf{t}_{\text{WSS}}^{\text{max}} \|_{\text{flex}} - \| \mathbf{t}_{\text{WSS}}^{\text{max}} \|_{\text{rig}} \| }{ \| \mathbf{t}_{\text{WSS}}^{\text{max}} \|_{\text{rig}} } 100\%, \quad (6.4)$$

siendo $\| \mathbf{t}_{\text{WSS}}^{\text{max}} \|_{\text{rig}}$ y $\| \mathbf{t}_{\text{WSS}}^{\text{max}} \|_{\text{flex}}$ los valores máximos de WSS bajo el supuesto de pared rígida y flexible, respectivamente.

Los resultados obtenidos son

$$\Delta \| \mathbf{t}_{\text{WSS}} \|_{\text{cuello}} = \frac{ |52.77 \text{ Pa} - 56.58 \text{ Pa}| }{ 56.58 \text{ Pa} } 100\% = 6.73 \%, \quad (6.5)$$

$$\Delta \| \mathbf{t}_{\text{WSS}} \|_{\text{cúpula}} = \frac{ |18.02 \text{ Pa} - 20.46 \text{ Pa}| }{ 20.46 \text{ Pa} } 100\% = 11.92 \%. \quad (6.6)$$

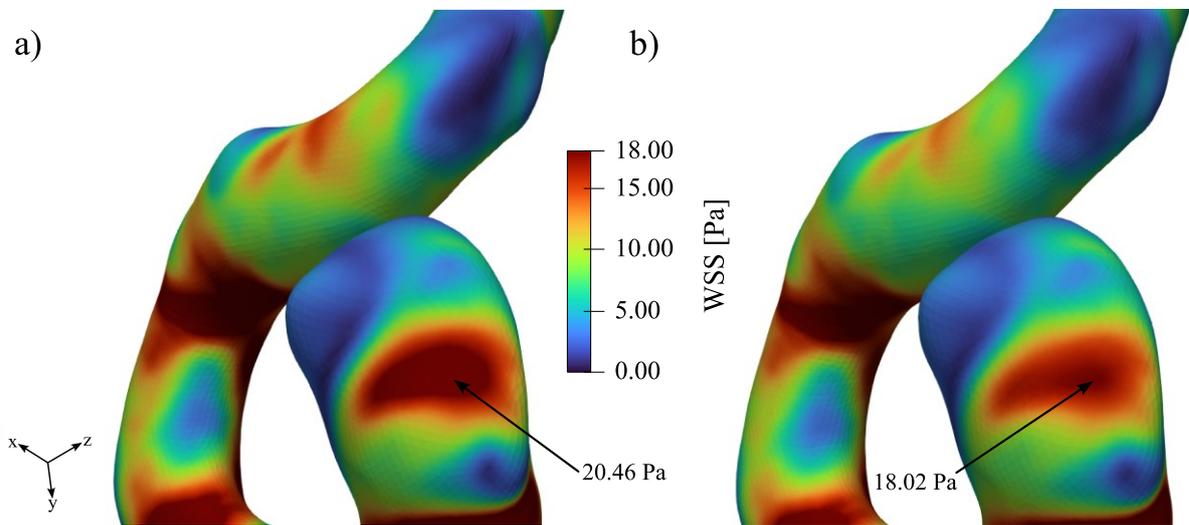


Figura 6.12. Comparación del campo de WSS en la cúpula del aneurisma entre a) modelo con pared rígida y b) modelo FSI.

Estos resultados están en línea con lo reportado por otros estudios, como [21], que resaltan cómo la geometría específica del aneurisma condiciona el impacto del modelo estructural sobre los esfuerzos hemodinámicos.

Un aspecto adicional discutido en [21], y confirmado por esta simulación, es que la diferencia entre ambos modelos depende de la dirección con la que el flujo impacta la pared. En particular:

- En la región del cuello, donde el flujo impacta mayormente en la dirección normal a la pared (ver **Figura 6.8**), el esfuerzo dominante es la presión. En esta zona, la influencia de la deformación sobre los gradientes de velocidad tangenciales, y por ende sobre el WSS, es limitada. Por eso, la diferencia entre modelos es moderada.
- En cambio, en la cúpula del aneurisma, el flujo impacta con mayor componente tangencial, y el WSS se convierte en un esfuerzo predominante. En este caso, la deformación de la pared altera de forma más significativa los gradientes de velocidad cercanos a la pared, incrementando así la discrepancia entre modelos.

Por otro lado, se realizó una simulación de FSI sin considerar el estado pretensionado utilizando un módulo de elasticidad igual a 2 MPa, y los resultados obtenidos son

$$\Delta \|t_{WSS}\|_{\text{cuello}}^{2 \text{ MPa}} = \frac{|47.73 \text{ Pa} - 56.58 \text{ Pa}|}{56.58 \text{ Pa}} 100 = 15.64 \%, \quad (6.7)$$

$$\Delta \|t_{WSS}\|_{\text{cúpula}}^{2 \text{ MPa}} = \frac{|16.16 \text{ Pa} - 20.46 \text{ Pa}|}{20.46 \text{ Pa}} 100 = 21.02 \%. \quad (6.8)$$

Estos valores muestran que modelar la pared arterial y aneurismática menos rígida genera una mayor sobrestimación del WSS al no considerar la deformabilidad de la misma.

6.4 INFLUENCIA DEL ESTADO PRETENSIONADO

Como se ha mencionado, la geometría de la base de datos representa el estado actual del aneurisma y de la arteria, es decir, una configuración ya tensionada. Esto se debe a que las imágenes médicas se adquieren con el paciente bajo condiciones fisiológicas normales, por lo que la pared arterial ya se encuentra sometida a presión sanguínea en el momento de adquisición. En consecuencia, esta geometría no representa un estado libre de tensiones.

El objetivo de esta sección es evaluar cómo varía el WSS al considerar una configuración libre de tensiones como configuración inicial en una simulación FSI. Para ello, se estima dicha configuración utilizando el algoritmo de Sellier, implementado en el Capítulo 4, que permite reconstruir una geometría tal que, al aplicarle una presión media, reproduzca la geometría observada *in vivo*.

El procedimiento parte de la superficie interna (ver **Figura 6.1**), a partir de la cual se genera una superficie externa desplazando los nodos una distancia constante correspondiente al espesor de la pared arterial, que se asume igual a 0.25 mm. Luego, se genera una geometría cerrada conectando ambas superficies, lo que delimita la región de entrada y salida, mediante un *script* desarrollado en MATLAB (ver Anexo B.VI). A partir de esta geometría, se genera un mallado volumétrico de tetraedros, con dos elementos a lo largo del espesor, como se muestra en la **Figura 6.13**. Esta elección se fundamenta en que el uso de un único elemento a lo largo del espesor no permite capturar las variaciones del esfuerzo cortante. Además, puede producirse *volumetric locking*, un efecto en el cual un elemento se vuelve artificialmente rígido, especialmente en situaciones de grandes deformaciones, como en este caso. Por otro lado, el uso de un solo elemento puede derivar en un mal condicionamiento del sistema de ecuaciones, afectando la convergencia y estabilidad del código.

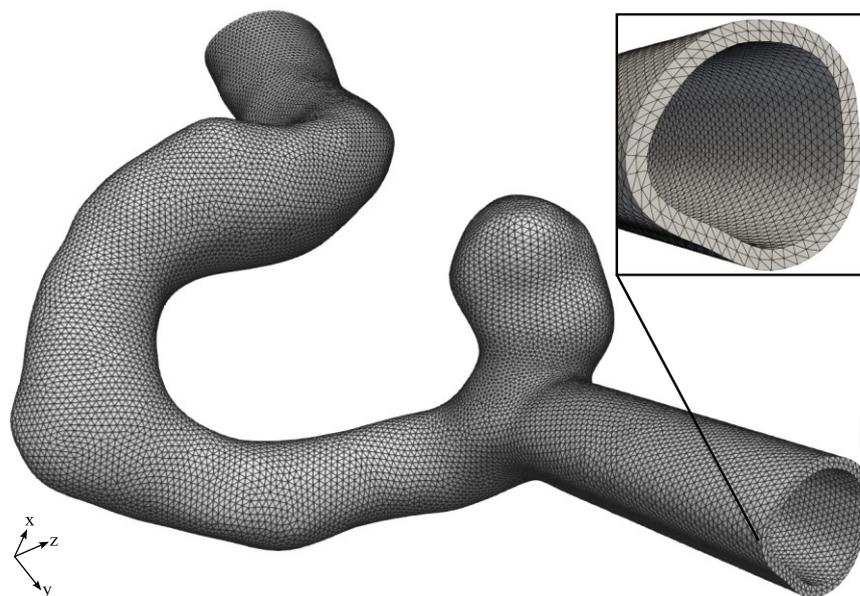


Figura 6.13. Malla volumétrica de la pared arterial, con espesor uniforme de 0.25 mm. La malla consta de 38906 nodos y 195368 elementos, de los cuales 76712 son los triángulos que componen las superficies y 118656 tetraedros que componen el volumen.

La estimación del estado libre de tensiones se realiza aplicando una presión interna de 85 mmHg, correspondiente al valor medio de un ciclo cardíaco, y se simula la deformación de la pared bajo las mismas condiciones de contorno descritas en la Sección 6.1. La pared arterial se describe mediante el modelo de Saint Venant-Kirchhoff utilizando los mismos parámetros materiales definidos en la **Tabla 6.1**.

El resultado es una nueva configuración geométrica, correspondiente al estado libre de tensiones. En la **Figura 6.14** se compara esta geometría con la original reconstruida por imágenes médicas.

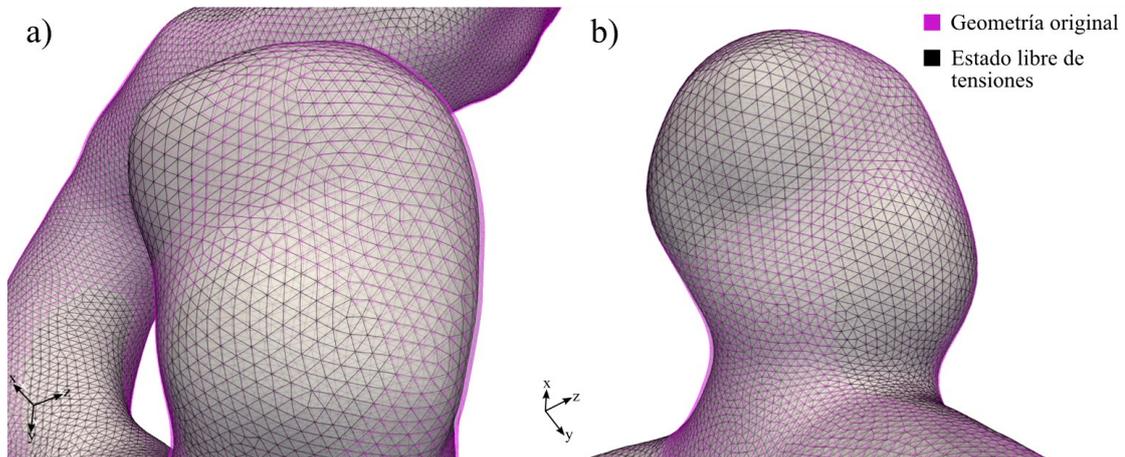


Figura 6.14. Comparación entre la geometría original y el estado libre de tensiones.

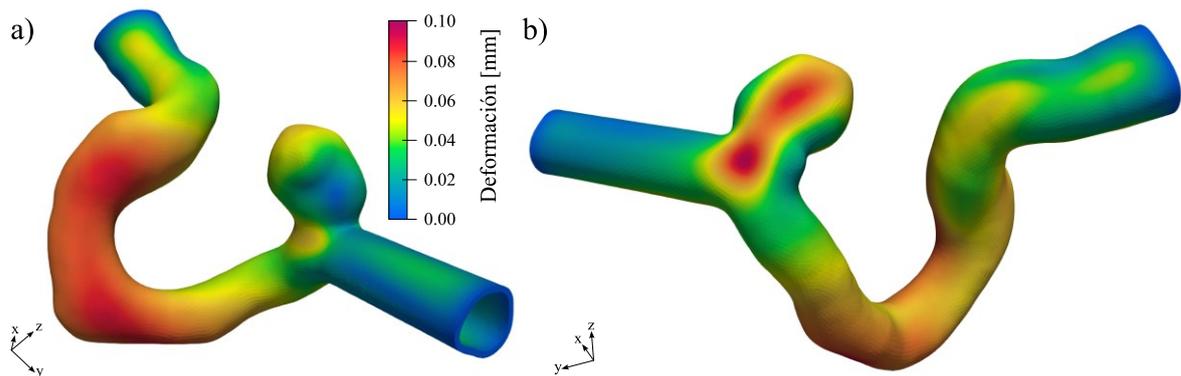


Figura 6.15. Campo de deformación sobre el estado libre de tensiones bajo presión interna para verificar que dicha configuración deformada coincida con la geometría original, obtenida a partir de imágenes médicas

Como se observa, en la mayoría de las regiones, la configuración libre de tensiones está contenida dentro de la geometría original, lo que es coherente con una estructura que, al ser cargada, se expande hacia su forma observada *in vivo*. Sin embargo, en algunas zonas esto no se cumple. Este comportamiento puede deberse a que las condiciones de contorno impuestas o a que longitud de arteria considerada es muy extensa, lo que genera desplazamientos residuales afectando a la estimación local del estado pretensionado.

La **Figura 6.15** muestra el campo de deformación obtenido al someter la configuración libre de tensiones a presión interna, para verificar que esta geometría deformada coincida con la geometría original, obtenida a partir de imagenología.

Utilizando la geometría libre de tensiones como nueva configuración de referencia, se construyen nuevamente los dominios fluido y sólido, y se realiza una simulación FSI bajo las mismas condiciones de contorno. En la **Figura 6.16** se compara el campo de WSS entre esta simulación y la realizada sin considerar el estado pretensionado.

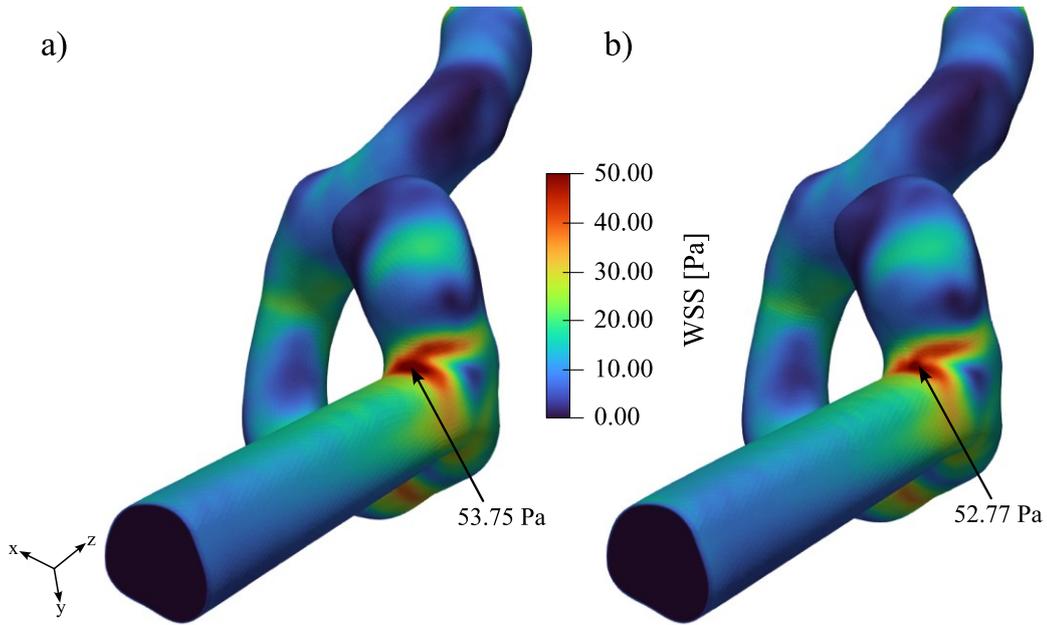


Figura 6.16. Comparación del WSS durante el pico sistólico: a) con estado pretensionado, b) sin estado pretensionado.

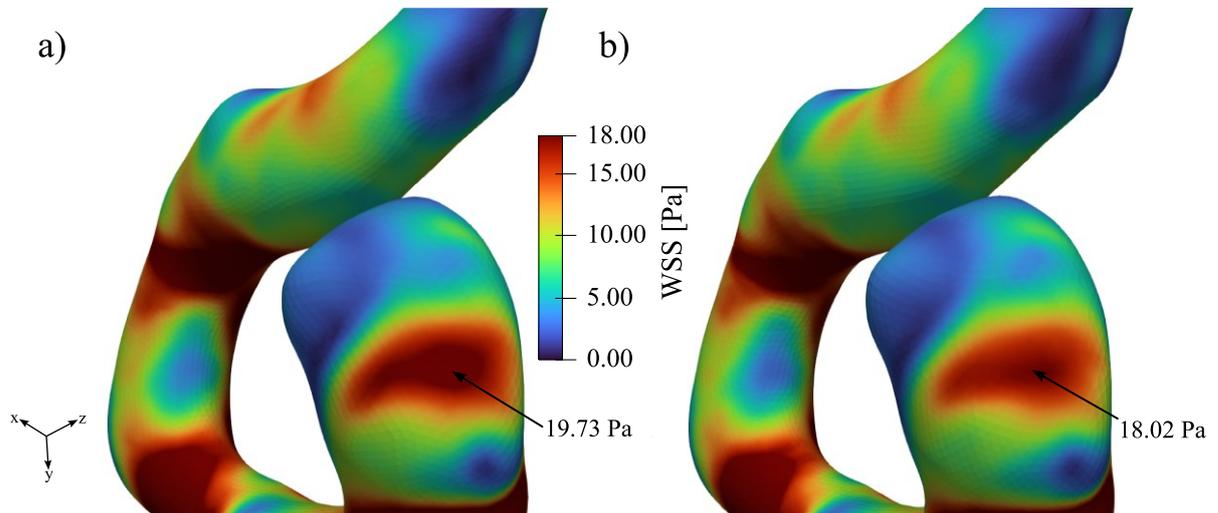


Figura 6.17. Comparación del WSS en la cúpula del aneurisma entre: a) estado pretensionado, b) sin estado pretensionado.

Las diferencias más notables se presentan en la región del cuello y la cúpula del aneurisma. En ambos casos, no usar el estado pretensionado tiende a subestimar los valores máximos de WSS. Esto también puede verse en la **Figura 6.17**, que muestra la región del aneurisma con más detalle.

Para cuantificar esta subestimación, se utiliza como referencia el caso de pared rígida, tal como se hizo en la sección anterior

$$\Delta \| \mathbf{t}_{\text{WSS}} \| = \frac{\| \| \mathbf{t}_{\text{WSS}_{\text{con}}}^{\text{max}} \| - \| \mathbf{t}_{\text{WSS}_{\text{rig}}}^{\text{max}} \| \|}{\| \mathbf{t}_{\text{WSS}_{\text{rig}}}^{\text{max}} \|} 100, \quad (6.9)$$

donde $\| \mathbf{t}_{\text{WSS}_{\text{con}}}^{\text{max}} \|$ y $\| \mathbf{t}_{\text{WSS}_{\text{rig}}}^{\text{max}} \|$ representan las magnitudes de los valores máximos de WSS con estado pretensionado y bajo el supuesto de pared rígida, respectivamente. Los resultados son

$$\Delta \|t_{WSS}\|_{\text{cuello}} = \frac{|53.75 \text{ Pa} - 56.58 \text{ Pa}|}{56.58 \text{ Pa}} 100 = 5 \%, \quad (6.10)$$

$$\Delta \|t_{WSS}\|_{\text{cúpula}} = \frac{|19.73 \text{ Pa} - 20.46 \text{ Pa}|}{20.46 \text{ Pa}} 100 = 3.57 \%. \quad (6.11)$$

A modo de resumen, la siguiente tabla compara los valores máximos de WSS obtenidos en las dos regiones críticas para los distintos supuestos analizados.

Tabla 6.2. Comparación de los valores máximos de WSS en las regiones del cuello y la cúpula del aneurisma para diferentes supuestos: suposición de pared rígida, pared deformable con estado pretensionado y pared deformable sin estado pretensionado.

| Región | WSS máx. pared rígida [Pa] | WSS máx. con estado pretensionado [Pa] | WSS máx. sin estado pretensionado [Pa] |
|--------|----------------------------|--|--|
| Cuello | 56.58 | 53.75 | 52.77 |
| Cúpula | 20.46 | 19.73 | 18.02 |

Esta tabla permite observar que el supuesto de pared rígida tiende a sobrestimar el WSS en ambas regiones. En cambio, al incorporar el estado pretensionado, se obtiene una predicción más conservadora en el cuello, pero levemente más alta en la cúpula, reforzando la idea de que el impacto tangencial del flujo genera diferencias más marcadas.

CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES

En este proyecto final se ha desarrollado una herramienta de modelado computacional capaz de simular la interacción fluido-estructura en aneurismas cerebrales, incorporando el estado pretensionado de la pared arterial para lograr resultados fisiológicos y clínicamente más relevantes. Como se evidenció en el Capítulo 6, la consideración del estado pretensionado representa un punto intermedio entre no considerarlo en una simulación de FSI y no considerarlo en una simulación CFD bajo supuesto de pared rígida. Por esta razón, se optó por estimar primero dicho estado y, a partir de él, realizar las simulaciones FSI.

Más allá de los resultados cuantitativos obtenidos en el Capítulo 6, estos concuerdan de manera cualitativa con los estudios a los que se hace referencia en dicho capítulo. Los resultados hallados en la literatura presentan mayores variaciones entre los distintos supuestos, al utilizar diferentes metodologías. Considerar el estado pretensionado podría ser aún más importante al utilizar condiciones de contorno y parámetros que reflejen mejor la fisiología del problema, como incorporar el efecto del tejido y el fluido circundante, mostrado en la Sección 2.3. En [57], se ha validado que la incorporación de estas condiciones reduce considerablemente el error, especialmente en zonas donde la arteria está en contacto estrecho con estructuras de soporte rígidas.

Desde el punto de vista computacional, realizar una simulación FSI bajo este esquema lleva aproximadamente cuatro días utilizando el servidor de la Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria que consta de 12 procesadores. Este tiempo podría optimizarse utilizando un servidor más potente, utilizar un clúster mediante servicio de terceros. Por otro lado, la estimación del estado pretensionado, realizada actualmente en MATLAB con un solo procesador en las computadoras del grupo MoCCAI, toma 35 horas. Sin embargo, se estima que, de poder paralelizar el código o implementar el algoritmo de Sellier en CalculiX, el tiempo podría reducirse considerablemente utilizando el servidor en su máxima capacidad. Esta diferencia temporal demuestra que incorporar el efecto del estado pretensionado mejora considerablemente la fiabilidad de las simulaciones sin aumentar significativamente el tiempo de cálculo total.

Una contribución fundamental de este trabajo es el desarrollo de un *pipeline* computacional robusto, que permite abordar casos específicos de pacientes mediante un conjunto de herramientas integradas: código propio en MATLAB para el pretensado, OpenFOAM para resolver el flujo sanguíneo, CalculiX para calcular la deformación de la pared arterial, preCICE para el acoplamiento entre ambos *solvers* y la combinación de herramientas como snappyHexMesh, SALOME y algunas desarrolladas por el grupo MoCCAI para generar los dominios computacionales del lumen y de la pared arterial. Este conjunto forma una herramienta *software* capaz de brindar soporte a médicos y neurorradiólogos en el análisis y posible intervención de aneurismas cerebrales.

El enfoque está orientado principalmente a pacientes asintomáticos, quienes representan la mayoría de los casos clínicos y cuya condición no implica una urgencia inmediata. En estos casos, el objetivo es aportar un reporte técnico en un plazo clínicamente razonable (por ejemplo, una semana), para ayudar a los médicos en su toma de decisiones, considerando factores del paciente como edad, sexo, hábitos (como el tabaquismo), estado general de salud, entre otros. Cabe mencionar que, en casos críticos, la intervención médica directa suele ser inevitable, y el soporte computacional puede no alterar sustancialmente la conducta clínica. Sin embargo, en escenarios menos claros, donde la urgencia no está definida, esta herramienta aporta un gran valor.

En la práctica clínica, puede ser necesario analizar un mismo caso bajo distintas condiciones: uso de anticoagulantes, cambios en la viscosidad sanguínea, variaciones en los perfiles de

entrada de flujo, entre otros. Además, cada paciente posee características particulares, como una curva de caudal no ideal o un módulo de elasticidad específico. Por estas razones, cada estudio puede derivar en varias simulaciones FSI distintas en función de las condiciones que se quieran analizar, lo que representa un alto costo computacional.

Ante esta situación, se propone una estrategia mixta: realizar una cantidad reducida y seleccionada de simulaciones representativas (por ejemplo, 4 o 5), y clasificar el aneurisma en tres niveles de riesgo como si se tratase de un semáforo: crítico (rojo), moderado (naranja/amarillo) o leve (verde). Esta clasificación permite construir una base de datos de casos clínicos, la cual servirá de sustento para futuras aplicaciones de técnicas de aprendizaje automático, como las Redes Neuronales Informadas en Física (*Physics-Informed Neural Network*, PINN).

Las PINN representan una tecnología emergente con gran potencial para el campo de la medicina computacional. Al combinar datos clínicos con leyes físicas gobernantes, estas redes permiten generar predicciones precisas aun con conjuntos de datos reducidos o ruidosos, y sin necesidad de mallas. Si bien enfrentan desafíos como la convergencia o el costo computacional, ofrecen ventajas significativas frente a los métodos puramente numéricos o basados en datos. Su aplicación a la dinámica de fluidos computacional, y por extensión a FSI, es particularmente prometedora.

En un futuro cercano, contar con una base de datos robusta permitiría, mediante PINN u otros algoritmos de *Machine Learning*, predecir el estado de un nuevo aneurisma (crítico, moderado o leve) de forma rápida, ayudando a priorizar los casos clínicos. Aquellos clasificados como críticos serían tratados con prioridad y validados posteriormente con simulaciones FSI completas, proporcionando un informe preciso y personalizado al médico tratante.

En resumen, este proyecto final sienta las bases para una herramienta computacional que no solo mejora la calidad de las simulaciones actuales, sino que también abre la puerta a un sistema inteligente de soporte clínico para la evaluación de aneurismas cerebrales, adaptable a cada paciente, escalable en complejidad, y con potencial de evolución hacia técnicas de inteligencia artificial.

ANEXOS

A HERRAMIENTAS DE MALLADO

A.I SNAPPYHEXMESH

En este anexo se adjunta el código utilizado para generar el refinamiento de la capa límite mediante el código `snappyHexMesh`, suministrado con OpenFOAM. El código `SnappyHexMesh` genera mallas tridimensionales compuestas de hexaedros y hexaedros divididos (*split-hexahedra*) a partir de geometrías de superficie trianguladas en formato STL (*Stereolithography*).

El proceso de mallado con `snappyHexMesh` se divide en tres etapas principales³⁰:

- *Castellated*: se construye una malla base cartesiana y luego se refina alrededor de la geometría objetivo para capturar los principales detalles. El nivel de refinamiento es controlado mediante el diccionario *castellatedMeshControls*.
- *Snapping*: la malla previamente fragmentada se ajusta para que los nodos se alineen con la superficie de la geometría de entrada. Este paso mejora la fidelidad del contorno y se configura mediante *snapControls*.
- *Layer addition*: finalmente, se generan capas prismáticas en las zonas cercanas a los límites de la geometría, lo cual es importante para modelar correctamente los gradientes en zonas de fronteras como, por ejemplo, la capa límite. Se controla por medio de *layerControls*.

```

1 /*----- C++ -----*/
2 | ===== |
3 | \\ / Field | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
4 | \\ / Operation | Version: v2212 |
5 | \\ / And | Website: www.openfoam.com |
6 | \\ / Manipulation |
7 /*-----*/
8 FoamFile
9 {
10     version      2.0;
11     format        ascii;
12     class         dictionary;
13     object        snappyHexMeshDict;
14 }
15 // ***** //
16
17 // Which of the steps to run
18 castellatedMesh false;
19 snap           false;
20 addLayers      true;
21
22
23 // Geometry. Definition of all surfaces. All surfaces are of class
24 // searchableSurface.
25 // Surfaces are used
26 // - to specify refinement for any mesh cell intersecting it
27 // - to specify refinement for any mesh cell inside/outside/near
28 // - to 'snap' the mesh boundary to the surface

```

³⁰ Para más detalles consultar [58].

```
29 geometry // Load in STL files here
30 {
31     C0005_remeshed.stl
32     {
33         type triSurfaceMesh;
34         name volume;
35
36         regions
37         {
38             inlet // Named region in the STL file
39             {
40                 name inlet; // User-defined patch name
41             }
42
43             outlet
44             {
45                 name outlet;
46             }
47
48             walls
49             {
50                 name walls;
51             }
52         }
53     }
54
55
56 // Settings for the castellatedMesh generation.
57 castellatedMeshControls
58 {
59
60     // Refinement parameters
61     // ~~~~~
62
63     // If local number of cells is >= maxLocalCells on any processor
64     // switches from from refinement followed by balancing
65     // (current method) to (weighted) balancing before refinement.
66     maxLocalCells 1000000;
67
68     // Overall cell limit (approximately). Refinement will stop immediately
69     // upon reaching this number so a refinement level might not complete.
70     // Note that this is the number of cells before removing the part which
71     // is not 'visible' from the keepPoint. The final number of cells might
72     // actually be a lot less.
73     maxGlobalCells 20000000;
74
75     // The surface refinement loop might spend lots of iterations refining just
76     // a few cells. This setting will cause refinement to stop if <=
77     // minimumRefine are selected for refinement. Note: it will at least do one
78     // iteration (unless the number of cells to refine is 0)
79     minRefinementCells 10;
80
81     // Allow a certain level of imbalance during refining
82     // (since balancing is quite expensive)
83     // Expressed as fraction of perfect balance (= overall number of cells /
84     // nProcs). 0=balance always.
85     maxLoadUnbalance 0.10;
86
87     // Number of buffer layers between different levels.
```

```

88 // 1 means normal 2:1 refinement restriction, larger means slower
89 // refinement.
90 nCellsBetweenLevels 3;
91
92 // Explicit feature edge refinement
93 // ~~~~~
94
95 // Specifies a level for any cell intersected by its edges.
96 // This is a featureEdgeMesh, read from constant/triSurface for now.
97 features // taken from STL from each .eMesh
98 (
99 );
100
101 // Surface based refinement
102 // ~~~~~
103
104 // Specifies two levels for every surface. The first is the minimum level,
105 // every cell intersecting a surface gets refined up to the minimum level.
106 // The second level is the maximum level. Cells that 'see' multiple
107 // intersections where the intersections make an
108 // angle > resolveFeatureAngle get refined up to the maximum level.
109
110 refinementSurfaces
111 {
112     volume
113     {
114         // global
115         // Surface-wise min and max refinement level
116         //level (0 2);
117         level (1 1);
118
119         //Local surface in STL
120         regions
121         {
122             walls
123             {
124                 level (4 4);
125
126                 patchInfo
127                 {
128                     type wall;
129                 }
130             }
131
132             inlet
133             {
134                 level (1 1);
135
136                 patchInfo
137                 {
138                     type patch;
139                 }
140             }
141
142             outlet
143             {
144                 level (1 1);
145

```

```
146         patchInfo
147         {
148             type patch;
149         }
150     }
151 }
152 }
153 }
154 }
155
156 // Feature angle:
157 // - used if min and max refinement level of a surface differ
158 //resolveFeatureAngle 30; //recommended
159 //To avoid too much refinement with curvature it also resolve feature edges
160 resolveFeatureAngle 60;
161
162 // Region-wise refinement
163 // ~~~~~
164
165 // Specifies refinement level for cells in relation to a surface. One of
166 // three modes
167 // - distance. 'levels' specifies per distance to the surface the
168 //   wanted refinement level. The distances need to be specified in
169 //   descending order.
170 // - inside. 'levels' is only one entry and only the level is used. All
171 //   cells inside the surface get refined up to the level. The surface
172 //   needs to be closed for this to be possible.
173 // - outside. Same but cells outside.
174
175 refinementRegions
176 {
177     //Refinement regions use the name of the whole STL
178     //It does not take sub-regions
179     //In this case pipe is not valid it only can use mixing_elbow
180     //If you need to use an specific region you will need to create a
181     //separate STL
182     /*
183 }
184
185 // Mesh selection
186 // ~~~~~
187
188 // After refinement patches get added for all refinementSurfaces and
189 // all cells intersecting the surfaces get put into these patches. The
190 // section reachable from the locationInMesh is kept.
191 // NOTE: This point should never be on a face, always inside a cell, even
192 // after refinement.
193 nSurfaceLayers 25;
194
195 // Whether any faceZones (as specified in the refinementSurfaces)
196 // are only on the boundary of corresponding cellZones or also allow
197 // free-standing zone faces. Not used if there are no faceZones.
198 expansionRatio 1.15;
199 allowFreeStandingZoneFaces true;
200 }
201
202 // Settings for the snapping.
203 snapControls
204 {
```

```
205     //- Number of patch smoothing iterations before finding correspondence
206     // to surface
207     nSmoothPatch 3;
208     firstLayerThickness .00003;
209     // or edge. True distance is this factor times local
210     // maximum edge length.
211     tolerance 2.0;
212
213     //- Number of mesh displacement relaxation iterations.
214     nSolveIter 30;
215     //- Maximum number of snapping relaxation iterations. Should stop
216     // before upon reaching a correct mesh.
217     nRelaxIter 5;
218
219     // Feature snapping
220
221     //- Number of feature edge snapping iterations.
222     // Leave out altogether to disable.
223     nFeatureSnapIter 10;
224
225     //- Detect (geometric only) features by sampling the surface
226     // (default=false).
227     implicitFeatureSnap false;
228
229     //- Use castellatedMeshControls::features (default = true)
230     explicitFeatureSnap true;
231
232     //- Detect points on multiple surfaces (only for explicitFeatureSnap)
233     multiRegionFeatureSnap false;
234 }
235
236 // Settings for the layer addition.
237 addLayersControls
238 {
239     // Are the thickness parameters below relative to the undistorted
240     // size of the refined cell outside layer (true) or absolute sizes (false).
241     relativeSizes true;
242
243     // Per final patch (so not geometry!) the layer information
244     layers
245     {
246         walls
247         {
248             nSurfaceLayers 3;
249         }
250     }
251
252     // Expansion factor for layer mesh
253     expansionRatio 1.2;
254
255     // Wanted thickness of final added cell layer. If multiple layers
256     // is the thickness of the layer furthest away from the wall.
257     // Relative to undistorted size of cell outside layer.
258     // See relativeSizes parameter.
259     finalLayerThickness 0.8;
260
261     // Minimum thickness of cell layer. If for any reason layer
262     // cannot be above minThickness do not add layer.
```

```
263 // Relative to undistorted size of cell outside layer.
264 minThickness 0.4;
265
266 // If points get not extruded do nGrow layers of connected faces that are
267 // also not grown. This helps convergence of the layer addition process
268 // close to features.
269 // Note: changed(corrected) w.r.t 1.7.x! (didn't do anything in 1.7.x)
270 nGrow 0;
271
272 // Advanced settings
273
274 // When not to extrude surface. 0 is flat surface, 90 is when two faces
275 // are perpendicular
276 featureAngle 130;
277
278 // At non-patched sides allow mesh to slip if extrusion direction makes
279 // angle larger than slipFeatureAngle.
280 slipFeatureAngle 30;
281
282 // Maximum number of snapping relaxation iterations. Should stop
283 // before upon reaching a correct mesh.
284 nRelaxIter 10;
285
286 // Number of smoothing iterations of surface normals
287 nSmoothSurfaceNormals 10;
288
289 // Number of smoothing iterations of interior mesh movement direction
290 nSmoothNormals 10;
291
292 // Smooth layer thickness over surface patches
293 nSmoothThickness 10;
294
295 // Stop layer growth on highly warped cells
296 maxFaceThicknessRatio 0.5;
297
298 // Reduce layer growth where ratio thickness to medial
299 // distance is large
300 maxThicknessToMedialRatio 0.3;
301
302 // Angle used to pick up medial axis points
303 // Note: changed(corrected) w.r.t 1.7.x! 90 degrees corresponds to 130
304 // in 1.7.x.
305 minMedialAxisAngle 90;
306 minMedianAxisAngle 90;
307
308 // Create buffer region for new layer terminations
309 nBufferCellsNoExtrude 0;
310
311 // Overall max number of layer addition iterations. The mesher will exit
312 // if it reaches this number of iterations; possibly with an illegal
313 // mesh.
314 nLayerIter 80;
315
316 nRelaxedIter 50;
317 }
318
319
320 // Generic mesh quality settings. At any undoable phase these determine
321 // where to undo.
```

```

322 meshQualityControls
323 {
324     #include "meshQualityDict"
325
326     relaxed
327     {
328         // Maximum non-orthogonality allowed. Set to 180 to disable.
329         maxNonOrtho 75;
330     }
331
332     // Advanced
333
334     // Number of error distribution iterations
335     nSmoothScale 4;
336     // amount to scale back displacement at error points
337     errorReduction 0.75;
338 }
339
340 // Advanced
341
342 //// Debug flags
343
344 debugFlags
345 (
346     //mesh           // write intermediate meshes
347     //intersections // write current mesh intersections as .obj files
348     //featureSeeds  // write information about explicit feature edge ref.
349     //attraction    // write attraction as .obj files
350     //layerInfo     // write information about layers
351 );
352
353
354 //
355 //// Write flags
356
357 writeFlags
358 (
359     //scalarLevels // write volScalarField with cellLevel for postprocessing
360     //layerSets    // write cellSets, faceSets of faces in layer
361     //layerFields  // write volScalarField for layer coverage
362 );
363
364 mergeTolerance 1e-6;
365
366 // ***** //

```

B SCRIPTS EN MATLAB

B.I CONDICIÓN DE CONTORNO EN LA ENTRADA

Las condiciones de contorno desarrolladas en el Capítulo 3 se implementan en OpenFOAM utilizando la condición de contorno *timeVaryingMappedFixedValue*, la cual interpola los valores de un conjunto de puntos proporcionados en el espacio y el tiempo. Esta condición de contorno permite especificar valores que cambian en el tiempo para las variables, tanto de presión como de velocidad. Para ello, se crea un directorio llamado *boundaryData* dentro del directorio *constant* que se muestran en la **Figura B.1**. Dentro de *boundaryData*, se crean

subdirectorios para cada frontera o región a la que se le quiere aplicar una condición de contorno específica, como la entrada y la salida. Dentro de cada uno de estos subdirectorios, se genera un directorio para cada paso de tiempo en el que se desee definir una condición de contorno particular. Finalmente, dentro de cada uno de estos directorios correspondientes a un paso de tiempo, se colocan los archivos que contienen los valores de cada variable, como la presión y la velocidad, correspondientes a ese instante de tiempo.

La generación de estos archivos se realizó mediante *scripts* en MATLAB. Cada *script* itera sobre los nodos de la frontera (entrada o salida) correspondiente, calcula y asigna el valor de presión o los valores de las componentes de velocidad que le corresponde en cada paso de tiempo. Cada valor se obtiene interpolando los puntos característicos de la onda del flujo volumétrico mediante *splines* cúbicos. De esta manera, los *scripts* crean archivos de datos que son leídos por OpenFOAM para aplicar las condiciones de contorno variables en el tiempo.

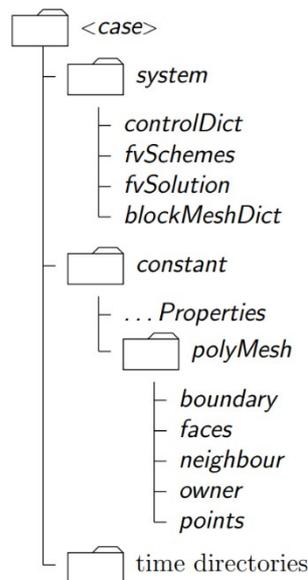


Figura B.1. Estructura de directorios para una simulación o caso en particular en OpenFOAM. En la carpeta constant se especifican los valores de velocidad y presión para aplicar las condiciones de contorno mencionadas [58].

A continuación se adjunta el *script* en MATLAB para imponer la condición de velocidad.

```

clc
clear all
close all
% Crear condicion de borde de perfil de velocidad en la entrada para
% simulacion en OpenFOAM.
% La estructura de directorios debe ser:
% ~/openfoam/ejemplo/
% |---> constant/boundaryData/
% |           |---->inlet/
% |           |----->0/
% |           |     |---->U
% |           |----->points
% |
%
% Leer vertices de la malla de entrada
filename = 'inlet.vtk';
[vertex,connec] = readNodes(filename);
nvert = length(vertex);

% Crear archivo 'points' que contiene los nodos de "inlet"
fid = fopen('../constant/boundaryData/inlet/points','w');

```

```

fprintf(fid,'%d (\n',nVert);
for i=1:nVert
    fprintf(fid,'(%f %f %f)\n',vertex(i,1),vertex(i,2),vertex(i,3));
end
fprintf(fid,')\n');
fclose(fid);

% Archivo condicion de contorno de velocidad
% Para cada paso de tiempo (dt) se aplica un valor de velocidad (igual para
% todos los nodos, velocidad uniforme) que depende de la curva de caudal
% correspondiente a un ciclo cardiaco.
dt = 1e-4; % Paso de tiempo usado en la simulacion [s]
r = 2; % Radio de la maxima esfera inscrita en la entrada [mm]
A = pi*r^2; % Area transversal [mm^2]
Qavg = 277; % Caudal promedio ICA [mL/min]
Qavg = Qavg*1e3/60; % [mm^3/s]
% Puntos caracteristicos del caudal en un ciclo cardiaco ICA (Q/Qavg)
Q = [0.68,1.18,1.66,1.42,1.20,1.22,1.08,...
    0.94,1.02,1.09,0.94,0.83,0.76,0.68];
Q = Q*Qavg; % [mm^3/s]
v = Q/A; % velocidad [mm/s]
tAvg = 0.8850; % Tiempo promedio de un ciclo cardiaco [s]

% Tiempo de los puntos caracteristicos en un ciclo cardiaco [s]
tPtsCh = linspace(0,tAvg,14);
% Vector de tiempos (size(tCycle) = numero de pasos de tiempo)
tCycle = tPtsCh(1):dt:tPtsCh(end);
% Ajuste de caudal por splines cubicos [mm^3/s]
Qinterp = spline(tPtsCh,Q,tCycle);
% Ajuste de velocidad por splines cubicos [mm/s]
vCycle = spline(tPtsCh,v,tCycle);

% Construccion de la rampa inicial
mRamp = (vCycle(2)-vCycle(1))/dt; % pendiente
vRamp = @(tr) mRamp*tr;
tEndRamp = round(vCycle(1)/mRamp,4); % Se redondea a 4 decimales por el dt
tRamp = 0:dt:tEndRamp; % Vector tiempo de la rampa
tEnd = tEndRamp+tAvg; % Tiempo en el que finaliza la rampa
nPtsRamp = length(tRamp);
vvRamp = linspace(0,vCycle(1),nPtsRamp); % vector que contiene los valores
% velocidad para cada dt

[tTotal, id, ~] = unique([tRamp tCycle+tEndRamp]);
vTotal = [vvRamp vCycle];
vTotal = vTotal(id);

% Vector normal a la entrada (Apunta hacia dentro)
nIn = [-0.83;
    -0.27;
    -0.48];

% Se crea un archivo de velocidad para cada paso de tiempo
for j=1:length(tTotal) % Para cada dt
    fid = fopen(strcat('../constant/boundaryData/inlet/',...
        num2str(tTotal(j),'%.4f'), '/U'),'w');
    fprintf(fid,'%d (\n',nVert);
    for i=1:nVert % Para cada nodo
        fprintf(fid,'(%f %f %f)\n',...
            vTotal(j)*nIn(1),vTotal(j)*nIn(2),vTotal(j)*nIn(3));
    end
end

```

```

fprintf(fid,')\n');
fclose(fid);
end

```

B.II CONDICIÓN DE CONTORNO EN LA SALIDA

En este anexo se adjunta el *script* en MATLAB para imponer la condición de presión en la salida.

```

clc
clear all
close all
% Crear condicion de borde presion en la salida para simulacion en
% OpenFOAM.
% La estructura de directorios debe ser:
% ~/openfoam/ejemplo/
%     |---> constant/boundaryData/
%     |           |---->outlet/
%     |           |----->0/
%     |           |     |--->p
%     |           |----->points
%     |
%
% Leer vertices de la malla de salida
filename = 'outlet.vtk';
[vertex,connec] = readNodes(filename);
nvert = length(vertex);

% Crear archivo 'points' que contiene los nodos de "outlet"
fid = fopen('../constant/boundaryData/outlet/points','w');
fprintf(fid,'%d \n',nvert);
for i=1:nvert
    fprintf(fid,'%f %f %f\n',vertex(i,1),vertex(i,2),vertex(i,3));
end
fprintf(fid,')\n');
fclose(fid);

% Interpolacion por splines cubicos
dt = 1e-4; % Paso de tiempo usado en la simulacion [s]
r = 2; % Radio de la maxima esfera inscrita en la entrada [mm]
A = pi*r^2; % Area transversal [mm^2]
Qavg = 277; % Caudal promedio ICA [mL/min]
Qavg = Qavg*1e3/60; % [mm^3/s]
% Puntos caracteristicos del caudal en un ciclo cardiaco ICA (Q/Qavg)
Q = [0.68,1.18,1.66,1.42,1.20,1.22,1.08,...
     0.94,1.02,1.09,0.94,0.83,0.76,0.68];
Q = Q*Qavg; % [mm^3/s]
v = Q/A; % velocidad [mm/s]
tAvg = 0.8850; % Tiempo promedio de un ciclo cardiaco [s]

% Tiempo de los puntos caracteristicos en un ciclo cardiaco [s]
tPtsCh = linspace(0,tAvg,14);
% Vector de tiempos (size(tCycle) = numero de pasos de tiempo)
tCycle = tPtsCh(1):dt:tPtsCh(end);
% Ajuste de caudal por splines cubicos [mm^3/s]
QInterp = spline(tPtsCh,Q,tCycle);
% Ajuste de velocidad por splines cubicos [mm/s]
vCycle = spline(tPtsCh,v,tCycle);

```

```

% Construccion de la rampa inicial
mRamp = (vCycle(2)-vCycle(1))/dt; % pendiente
vRamp = @(tr) mRamp*tr;
tEndRamp = round(vCycle(1)/mRamp,4); % Se redonde a 4 decimales por el dt
tRamp = 0:dt:tEndRamp; % Vector tiempo de la rampa
tEnd = tEndRamp+tAvg; % Tiempo en el que finaliza la rampa
nPtsRamp = length(tRamp);

% Archivo de condicion de contorno de presion
% Como el fluido es incompresible, la presion esta dividida por la densidad
% de la sangre. La unidad es [mm^2/s^2]
% La ecuacion que describe la curva de caudal es:
% P = P0+Q*R, siendo Q el caudal de salida (=entrada). P0 es la presion de
% referencia y R representa la resistencia hidraulica debido al arbol
% vascular distal. Se busca determinar el valor de P0 y R tales que P varie
% entre 80 y 120 mmHg.
% Para hallarlos, se plantea un sistema de ecuaciones con el valor maximo y
% minimo de la curva de caudal.
[QMax,iMax] = max(QInterp);
[QMin,iMin] = min(QInterp);
% Sabiendo que:
% Pmax = P0+QMax*R = 120mmHg = 15998.7 Pa
% Pmin = P0+QMin*R = 80mmHg = 10665.8 Pa
rho = 1025; % Densidad de la sangre [kg/m^3]
% Conversion de unidades
PMax = 15988.7/rho; % [m^2/s^2]
PMax = PMax*1e6; % [mm^2/s^2]
PMin = 10665.8/rho;
PMin = PMin*1e6;
R = (PMax-PMin)/(QMax-QMin); % Resistencia hidraulica
P0 = (PMin*QMax-PMax*QMin)/(QMax-QMin); % Resistencia hidraulica [mm^2/s^2]

P = P0+QInterp*R; % Presion total [mm^2/s^2]
ppRamp = linspace(0,P(1),nPtsRamp);
[tTotal, id, ~] = unique([tRamp tCycle+tEndRamp]);
pTotal = [ppRamp P];
pTotal = pTotal(id);

% Se crea un archivo de presion para cada paso de tiempo
for j=1:length(tTotal) % Para cada dt
    fid =
fopen(strcat('../constant/boundaryData/outlet/',num2str(tTotal(j),'%.4f'),'p'),'w');
    fprintf(fid,'%d (\n',nVert);
    for i=1:nVert % Para cada nodo
        fprintf(fid,'%f\n',pTotal(j));
    end
    fprintf(fid,')\n');
    fclose(fid);
end
end

```

B.III VALIDACIÓN DEL CÓDIGO DE ESTADO PRETENSIONADO

```

% Cylinder tetrahedral mesh - Finite Element Method
%the
% In this script we apply a pressure inside a cylinder, in order to compute the
% prestressed state of the artery, according to Sellier's geometrical algorithm.
% Extremes are fixed in x,y and z (Dirichlet condition). We consider finite

```

```

% strains, and a Kirchoff-St. Venant Material
%
% etype
% P1: linear interpolants on triangles (3-node element)
% P2: quadratic interpolants on triangles (6-node element)
% Q1: linear interpolants on quadrilaterals (4-node element)
% Q2: quadratic interpolants on quadrilaterals (8-node SERENDI PITY element)

clear
close all

itime = cputime;

% Toolbox path
addpath('.../ex_toolbox_local')
addpath('~/projects/simulab')
addpath(userpath_matlab_linux)

fprintf(1, '=====\n');

%convert trimesh surface to a vtkPolyData (ascii format) to check it in PARAVIEW
saveVTK = 1;

% FEM options
% type of element
etype = 'P1';
fprintf(1, 'Type of element: %s\n', etype);

% Numerical integration
% cubature order: 1 (1 GPts), 2 (4 GPts)
qorder = 1;
qorder_bd = qorder;
qorder_faces = qorder;
qtype = 'Tet';
qtype_faces = qtype;
fprintf(1, 'Quadrature order: %2d Type of integration: %s\n', qorder, qtype);

% Load reference mesh
model = 0;
fileIN = sprintf('.../data_mesh/vesse1_mesh_tet_n%d.mat', model);

data = load(fileIN);
x_n = data.x_n;
nPts = size(x_n, 1);
conn_e1 = data.conn_e1;
nElems = length(conn_e1);
conn_bc = data.conn_bc;
bc_tags = data.bc_tags; % 1->inner cylinder; 2->outer cylinder; 3->x=0; 4->x=H
E_tags = data.E_tags;

% For saving the mesh
connec = cell2mat(conn_e1);
connec = reshape(connec, 4, nElems)';

% Material Parameters
fac = 1;
P_tot = fac*11598.84; % external load (N/m²)
Ea = 1.044e06; % Young modulus, from Gao2006
Et = 1.044e05; % Thrombus young modulus
nu = 0.49; % Poisson coefficient: 0.3, 0.4999 (quasi incomp)

```

```

nSteps = 10;
P1      = 1000;
dP      = (P_tot-P1)/nSteps;

E = zeros(1,nElems);

% Assign the young modulus for each element
for e=1:nElems
    if E_tags(e) == 1
        E(e) = Ea;
    else
        E(e) = Et;
    end
end
fprintf('nonlinear_n%d_qord%d_%dP_1searchTET.vtk\n',model,qorder,fac);
% #####
% Initialize displacement (L-BFGS)
u_n = zeros(nPts*3,1);

% Set the reduce/expand indices
% Ids for boundary conditions
ids = (1:nPts)';
%-----
% Test: fix both ends
ids_x = ids(abs(x_n(:,1))-min(x_n(:,1)))<1.e-6); %Get nodes in the "left end"
ids_x = [ids_x; ids(abs(x_n(:,1))-max(x_n(:,1)))<1.e-6)]; %Get nodes in the "right end"

%Now keep only max and min y and z
ids_fix = [3*ids_x-2; 3*ids_x-1; 3*ids_x];

% Reduced ids
ind_expand = (1:nPts*3)';

ind_reduce = sort(ids_fix);
ind_expand(ind_reduce) = [];

u_n(ind_expand) = 1e-6;

% The algorithm starts here!!!!
oend      = 0;
iter      = 0;
maxIter   = 20;
NRTol     = 1e-6;
delta_def = 1;

% FEM parameters
data.etype = etype;
data.qorder = qorder;
data.qorder_bd = qorder_bd;
data.qtype = qtype;

% Data needed for the load (remains unchanged)
data.bc_tags = bc_tags;
data.conn_bc = conn_bc;
u_prev       = u_n;      % First initial displacement (enters the inverse algorithm loop)
FEM = wrapper_fem(data);

ids = (1:nPts)';

```

```

% Linsearch params
tol1 = sqrt(eps);
tol2 = 1e-14/3;
tol3 = 1e-5;

x_m = x_n; %Initialize deformed configuration at the original

for s = 1:nSteps+1

    if s==1
        P = P1;
    else
        P = P+dP;
    end

    iter_prestress = 0; %Number of iterarions of the inverse algorithm
    fprintf("===== Load step = %d =====\n",s)
    tinver = cputime;
    while delta_def>tol3
        fprintf("Prestress iteration = %d\n",iter_prestress);
        if iter_prestress==0
            fprintf('===== START PRESTRESS ALGORITHM ===== \n')
            tic
%           u_n = u_prev; %We recall the last u_n obtained in the previous step
        else
            x_m=x_m+delta_x;
            u_n(ind_expand) = 1e-6;
        end

%       FEM = wrapper_fem(data); %We actualize the form functions for the new deformed
configuration
%       L-BFGS finds a seed for the N-R algorithm
%       basis functions are computed
        t=cputime;

%       calculation of shape functions and gradients
        fprintf(1,'\tcputime initial shape functions : %4.3f\n', cputime-t);

%       External load is computed
        data.P = P;
        data.u_n = u_n;
        data.x_n = x_m;
        FEM = wrapper_fem(data);
        Fext = Cylinder_SurfaceForceTri(data);
        fprintf(1,'\tApplied load = %4.f Pa\n',P);

%       L-BFGS
        options_lbfgs =
struct('GradObj','on','Display','iter','LargeScale','off','Hessupdate','bfgs','InitialHesType
','identity','ToIX',1.0e-4,'ToIFun',1.0e-4);
        options_lbfgs.E = E;
        options_lbfgs.nu = nu;
        options_lbfgs.nPts = nPts;
        options_lbfgs.FEM = FEM;
        options_lbfgs.Fext = Fext;

        options_lbfgs.ind_reduce = ind_reduce;
        options_lbfgs.ind_expand = ind_expand;
        options_lbfgs.u_long = u_n;

```

```

u_short = u_n;
u_short(ind_reduce) = [];

[u_short,fval,exitflag,output,grad] =
fminlbfgs(@kirchhoff_saintvenant,u_short,options_lbfgs);

u_n(ind_expand) = u_short;

% Newton-Raphson
while oend==0
    fprintf("NR Iter = %d\n",iter);

    % basis functions are computed
    % #### CELLS ####
    t=cputime;

    % First step: external force increment

    % Compute the residual
    % #### CELLS ####
    t = cputime;

    optProblem.E      = E;
    optProblem.nu     = nu;
    optProblem.nPts   = nPts;
    optProblem.FEM    = FEM;
    optProblem.u_n    = u_n;
    optProblem.bHess  = 1;

    [Fint,H] = Assembly_Residual_3D_NonlinearStVenantKirchhoff(optProblem);

    fprintf(1,'\tcputime Residual Matrix assembly : %4.3f\n', cputime-t);

    % Apply Dirichlet boundary conditions
    % Fix x and z for the y-nodes
    for i=1:length(ind_reduce)
        ii = ind_reduce(i);

        %fix dof
        H(:,ii) = 0;
        H(ii,:) = 0;
        H(ii,ii) = 1;
        Fext(ii) = 0;
        Fint(ii) = 0;

    end

    % Solve the system
    t      = cputime;
    R      = Fint-Fext;
    deltaU = -H\R;

    fprintf(1,'\tcputime system: %4.3f\n', cputime-t);

    options.u_n      = u_n;
    options.deltaU    = deltaU;
    options.FEM       = FEM;
    options.Fext      = Fext;

```

```

options.E      = E;
options.nu     = nu;
options.nPts   = nPts;

% Use linesearch to improve the approximation
isdesc = dot(deltaU,R);
if (isdesc == 0)
    fprintf("ERROR = Newton-Raphson+LineSearch:NOT a descent direction:
p.gradE=%12.4e\n", isdesc)
    ierr = 3;
elseif (iter>maxIter)
    fprintf("N-R Solver reached the maximum number of iterations.\n");
    ierr = 2;
else
    if ( isdesc > 0.0 )
        deltaU = -deltaU;
    end
    if (norm(R)/norm(Fext) < NRTol)
        % New solution updated with NR (alpha=1)
        alpha = 1.0;
        u_n = u_n + alpha*deltaU;

        fprintf("Reached convergence criterion (norm). Advance to next step\n");
        ierr = 1;
        oend = 1;
    else
        alpha = brent_linesearch(0,2,tol1,tol2,@kirchhoff_saintvenantLSearch,options);
        fprintf("Alpha value = %4.3f\n",alpha);
        % Update u_n and recalculate F_t
        u_n = u_n + alpha*deltaU;
    end
end

%fprintf("deltaU Norm = %d\n",norm(deltaU));
fprintf("R Norm = %d\n",norm(R)/norm(Fext));

% Iteration counter
iter = iter+1;

% Save step
% u_num = reshape(u_n,3,nPts)';

end
if iter_prestress==0
    u_prev = u_n; %Save first N-R solution displacement for the next load step
end
u_num = reshape(u_n,3,nPts)';
x_new = x_m+u_num; %New deformed configuration
delta_x = x_n-x_new;
residues = vecnorm(abs(delta_x),2,2);
delta_def = max(residues); %Maximal residual vector
fprintf('Residual vector: %4.6f\n',delta_def)
iter_prestress = iter_prestress+1;

cell2vtk(sprintf('cylinder_iter_prestress%02d_TET.vtk',iter_prestress),x_n,connec,u_num);
% Reinitialize displacement
oend = 0;
iter = 0;
end

```

```

fprintf('===== FINISH PRESTRESS ALGORITHM ===== \n')
% Save mesh
cell2vtk(sprintf('cylinder_prestress_%02d.vtk',s),x_m,connec,u_num);
toc
% Reinitialize delta_def
delta_def = 1;
end
ttime = cputime-itime;
fprintf("Total time = %4.3f\n",ttime);

% Post processing
%Von Mises Stress
optProblem.E      = E;
optProblem.nu     = nu;
optProblem.nPts   = nPts;
optProblem.FEM    = FEM;
optProblem.u_h    = u_n;
v_mises = Evaluate3DNonlinearVonMisesStress(optProblem);

%convert a surface to a vtkPolyData (ascii format) to check it in PARAVIEW
if saveVTK == 1

cell2vtk(sprintf('cylinder_nonlinear_n%d_qord%d_%dP_lsearch_TET_prestress.vtk',model,qorder,fa
c),x_m,connec,u_num,v_mises);
end

% Reference and Deformed (numerical and analytical) configurations
x_def = x_n - u_num; %Reference configuration
save('./vessel_mesh_def_n0_4gPt_cylinder_prestress_test.mat','x_n','x_def','conn_e1','conn_bc
','bc_tags','E_tags','v_mises')

```

B.VI GENERACIÓN DE SUPERFICIE CERRADA DE LA PARED ARTERIAL

```

clc
clear all
close all
addpath('~\projects\simulab')
addpath(userpath_matlab_linux)
% Read inner surface
[X1,T_int] =read_vtk9('C0005_inner.vtk');

X1 = double(X1);
T_int = double(T_int);
ebnd1 = freeBoundary(triangulation(T_int,X1(:,1),X1(:,2),X1(:,3)));
% Read medium surface
[X_m,T_m] =read_vtk9('C0005_medium.vtk');

X_m = double(X_m);
T_m = double(T_m);
ebnd_m = freeBoundary(triangulation(T_m,X_m(:,1),X_m(:,2),X_m(:,3)));

% Read outer surface
[X2,T_ext] =read_vtk9('C0005_outer.vtk');
X2 = double(X2);
T_ext = double(T_ext);
ebnd2 = freeBoundary(triangulation(T_ext,X2(:,1),X2(:,2),X2(:,3)));

```

```

% Identifying boundary curves: automatic algorithm
BCurves1= IdentifyBoundaryCurves(ebnd1);
id_bc11 = BCurves1{1};
id_bc21 = BCurves1{2};

nPts1 = size(X1,1);
BCurves_m= IdentifyBoundaryCurves(ebnd_m);
id_bc12 = BCurves_m{1} + nPts1; %CAMBIADOS DE LUGAR
id_bc22 = BCurves_m{2} + nPts1;

BCurves2= IdentifyBoundaryCurves(ebnd2);
id_bcm1 = BCurves2{1} + 2*nPts1; %CAMBIADOS DE LUGAR
id_bcm2 = BCurves2{2} + 2*nPts1;

% Make boundary gap connectivity (new triangles)

Tbd1 = zeros(length(id_bc11)*4,3);
for i=1:length(id_bc11)-1
    Tbd1(2*i-1,:) = [id_bc11(i) id_bc11(i+1) id_bcm1(i)];
    Tbd1(2*i ,:) = [id_bc11(i+1) id_bcm1(i+1) id_bcm1(i)];
end
i = length(id_bc11);
Tbd1(2*i-1,:) = [id_bc11(i) id_bc11(1) id_bcm1(i)];
Tbd1(2*i ,:) = [id_bc11(1) id_bcm1(1) id_bcm1(i)];

j = length(id_bcm1)+1:2*length(id_bcm1);
for i=1:length(id_bcm1)-1
    Tbd1(2*j(i)-1,:) = [id_bcm1(i) id_bcm1(i+1) id_bc12(i)];
    Tbd1(2*j(i) ,:) = [id_bcm1(i+1) id_bc12(i+1) id_bc12(i)];
end
i = length(id_bcm1);
Tbd1(2*j(i)-1,:) = [id_bcm1(i) id_bcm1(1) id_bc12(i)];
Tbd1(2*j(i) ,:) = [id_bcm1(1) id_bc12(1) id_bc12(i)];

%%%%%%%%%%%%

Tbd2 = zeros(length(id_bc21)*4,3);
for i=1:length(id_bc21)-1
    Tbd2(2*i-1,:) = [id_bc21(i) id_bc21(i+1) id_bcm2(i)];
    Tbd2(2*i ,:) = [id_bc21(i+1) id_bcm2(i+1) id_bcm2(i)];
end
i = length(id_bc21);
Tbd2(2*i-1,:) = [id_bc21(i) id_bc21(1) id_bcm2(i)];
Tbd2(2*i ,:) = [id_bc21(1) id_bcm2(1) id_bcm2(i)];

j = length(id_bcm2)+1:2*length(id_bcm2);
for i=1:length(id_bcm2)-1
    Tbd2(2*j(i)-1,:) = [id_bcm2(i) id_bcm2(i+1) id_bc22(i)];
    Tbd2(2*j(i) ,:) = [id_bcm2(i+1) id_bc22(i+1) id_bc22(i)];
end

i = length(id_bcm2);

Tbd2(2*j(i)-1,:) = [id_bcm2(i) id_bcm2(1) id_bc22(i)];
Tbd2(2*j(i) ,:) = [id_bcm2(1) id_bc22(1) id_bc22(i)];

% Assembly all
X = [X1;X2;X_m];

```

```

T_ext=T_ext+nPts1;
T_bc=[Tbd1;Tbd2];
T = [T_int;T_ext;T_bc];

% figure(2);clf
% hold on
% trimesh(T,X(:,1),X(:,2),X(:,3))
% hold off
% xlabel('x','fontsize',20)
% ylabel('y','fontsize',20)
% zlabel('z','fontsize',20)
% axis equal
%
% figure(3);clf
% hold on
% plot3(X(id_bc11,1),X(id_bc11,2),X(id_bc11,3),'DisplayName','BC 11')
% plot3(X(id_bcm1,1),X(id_bcm1,2),X(id_bcm1,3),'DisplayName','BC M1')
% plot3(X(id_bc12,1),X(id_bc12,2),X(id_bc12,3),'DisplayName','BC 12')
% plot3(X(id_bc21,1),X(id_bc21,2),X(id_bc21,3),'DisplayName','BC 21')
% plot3(X(id_bcm2,1),X(id_bcm2,2),X(id_bcm2,3),'DisplayName','BC M2')
% plot3(X(id_bc22,1),X(id_bc22,2),X(id_bc22,3),'DisplayName','BC 22')
% hold off
% legend
% Verify normals orientation
% Correct normals in the inner surface
% column_2=T_int(:,2);
% column_3=T_int(:,3);
% T_int(:,2)=column_3;
% T_int(:,3)=column_2;
% connec=T_bc;
% [nelem,~]=size(connec);
% figure(3);clf
% hold on
% for i=1:nelem
%     elem=connec(i,:);
%     p1=X(elem(1),:);
%     p2=X(elem(2),:);
%     p3=X(elem(3),:);
%     v1=p2-p1;
%     v2=p3-p1;
%     normal=cross(v1,v2);
%     normal=normal/norm(normal);
%     x_m=(p1+p2+p3)/3;
%     quiver3(x_m(1),x_m(2),x_m(3),normal(1),normal(2),normal(3))
% end
% trimesh(T,X(:,1),X(:,2),X(:,3))
% hold off
% T = [T_int;T_ext;T_bc];
save('C0005-closed_double_width.mat','X','T_int','T_ext','T','T_bc')

surf2vtk('C0005-closed_double_width.vtk',X,T);

```

C MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS

El método de volúmenes finitos es un método numérico ampliamente utilizado en la dinámica de fluidos computacional para resolver ecuaciones diferenciales parciales que describen el comportamiento de los fluidos. En lugar de buscar soluciones analíticas, que solo existen para

geometrías y regímenes de flujo muy simples, los métodos numéricos, como el de volúmenes finitos, permiten aproximar soluciones para problemas más complejos.

En este anexo se presentan los aspectos más relevantes del FVM y, en particular, su aplicación a la ecuación de conservación del momento de Navier-Stokes para flujo incompresible en estado estacionario

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \tag{C.1}$$

donde se ha agregado \mathbf{g} como término fuente. El miembro izquierdo se puede describir considerando que

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}, \tag{C.2}$$

donde \otimes representa el producto tensorial entre dos vectores³¹. Cuando el flujo es incompresible, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, por lo que

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \tag{C.3}$$

Reemplazando en la Ecuación (C.1) se obtiene una expresión alternativa para la ecuación de Navier-Stokes

$$\rho \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}. \tag{C.4}$$

El primer paso en el FVM es dividir el dominio del problema en un conjunto de volúmenes de control o celdas, los cuales forman una malla computacional. Cada ecuación diferencial se integra sobre cada celda, lo que da lugar a una ecuación algebraica por celda. Mediante la discretización de los términos de la ecuación, se construye un sistema de ecuaciones algebraicas que, para todo el dominio, adopta la forma matricial

$$\mathcal{M}\mathbf{v} = \mathbf{B}, \tag{C.5}$$

donde \mathcal{M} es la matriz de coeficientes, cuyos elementos dependen de los coeficientes de la ecuación diferencial y del esquema de discretización. El vector \mathbf{v} es la incógnita y \mathbf{B} es el vector del lado derecho, que incluye los términos fuente. Cada fila de la matriz \mathcal{M} representa la ecuación obtenida al aplicar la integración a una celda específica.

En este desarrollo, la Ecuación (C.4) se discretizará usando una celda poliédrica genérica, que puede tomar diferentes formas, como hexaedros o tetraedros. En el FVM, los valores de los campos (como presión, velocidad, temperatura) se calculan en el generalmente en el centroide de cada celda, tal como se muestra en la **Figura C.1**, se considera estos valores varían linealmente dentro de cada celda.

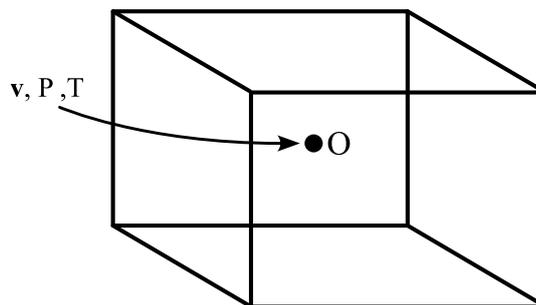


Figura C.1. En el FVM, por lo general, los valores de las variables físicas se almacenan en el centroide de cada celda.

Para comenzar, se reacomoda e integra la Ecuación (C.4) sobre el volumen de una celda con centroide O

³¹ El producto tensorial entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} está definido por

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & a_1 b_4 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & a_2 b_4 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & a_3 b_4 \end{bmatrix}.$$

$$\int_V [\rho \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla P - \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \rho \mathbf{g}] dV = 0. \quad (\text{C.6})$$

Aplicando la integral de volumen a cada término, se obtiene

$$\underbrace{\int_V \rho [\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})] dV}_{\text{Término convectivo}} = \underbrace{\int_V -\nabla P dV}_{\text{Gradiente de presión}} + \underbrace{\int_V \mu \nabla^2 \mathbf{v} dV}_{\text{Término difusivo}} + \underbrace{\int_V \rho \mathbf{g} dV}_{\text{Término fuente}}. \quad (\text{C.7})$$

Antes de desarrollar cada integral por separado, es importante definir algunos conceptos clave sobre la estructura de la malla. Cada celda del dominio se conoce como celda propietaria (*owner cell*) y está conectada con varias celdas vecinas (*neighbour cells*) a través de sus caras. Si una celda tiene m caras, entonces generalmente estará conectada con m celdas vecinas.

La **Figura C.2** muestra una celda de análisis con su centroide O y una celda vecina a la derecha con centroide N .

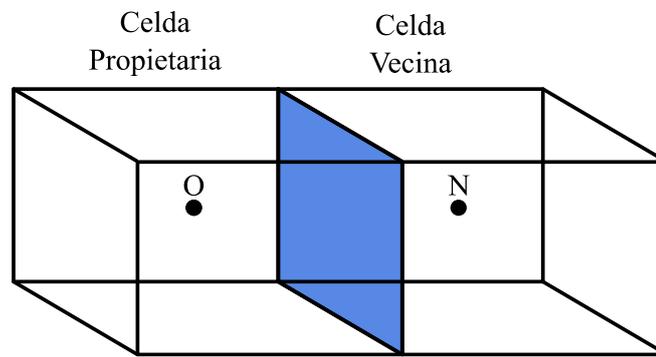


Figura C.2. Concepto de celda propietaria y celda vecina. Cuando se analiza una celda en particular, las celdas que la rodean se denominan celdas vecinas. La cara que comparten ambas celdas se ha pintado en azul.

El término fuente puede tratarse de manera sencilla si la gravedad se considera constante. En este caso, la integral se reduce a

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV = \rho \mathbf{g} V_O, \quad (\text{C.8})$$

donde V_O es el volumen de la celda propietaria.

Si analizamos la contribución de este término en la ecuación matricial del sistema $\mathcal{M}\mathbf{u} = \mathbf{B}$, observamos que no depende de la velocidad, por lo que se incorpora en el lado derecho del sistema, es decir, en \mathbf{B} . En cambio, cualquier término que depende de la velocidad se agregará a la matriz de coeficientes \mathcal{M} .

Si el término fuente depende linealmente de la velocidad, como en

$$\rho \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + s\mathbf{v}, \quad (\text{C.9})$$

donde s un escalar, su tratamiento requiere una modificación en la discretización. Este tipo de término es inusual en las ecuaciones de Navier-Stokes, pero aparece en otras ecuaciones, como la de energía cinética turbulenta. Se aborda aquí porque el método utilizado es general y puede aplicarse a la discretización de otras ecuaciones similares.

Al integrar este término

$$\int_V s\mathbf{v} dV = s_O \int_V \mathbf{v} dV, \quad (\text{C.10})$$

donde s_O es la constante evaluada en el centroide de la celda que se está analizando.

Bajo la suposición de que la velocidad varía linealmente dentro de la celda, la Ecuación (C.10) puede expresarse como

$$\int_V \mathbf{s} \mathbf{v} dV = s_0 \int_V [\mathbf{v}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \mathbf{v}_0] dV, \quad (\text{C.11})$$

donde $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ representa la distancia entre un punto \mathbf{x} dentro la celda y el centroide \mathbf{x}_0 , mientras que \mathbf{v}_0 es la velocidad evaluada en dicho centroide.

Al integrar por partes, se obtiene

$$s_0 \mathbf{v}_0 \int_V dV + s_0 \underbrace{\int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) dV \nabla \mathbf{v}_0}_{=0}. \quad (\text{C.12})$$

El segundo término es cero debido a la definición del centroide de la celda, ya que representa el promedio de las distancias desde cada punto al centroide. Así, la ecuación se simplifica a

$$\int_V \mathbf{s} \mathbf{v} dV = s_0 V_0 \mathbf{v}_0. \quad (\text{C.13})$$

Desde el enfoque matricial, ahora existe un término dependiente de la velocidad. Hay dos formas de incorporar su contribución a la ecuación:

1. Discretización implícita: se incluye el término en la matriz \mathcal{M} , modificando la relación entre celdas vecinas. En este caso la contribución de la Ecuación (C.13) es $-s_0 V_0$, lo que implica que el cálculo utiliza el valor desconocido de la velocidad en el paso de tiempo actual.
2. Discretización explícita: se añade el término al vector del lado derecho de la ecuación, utilizando los valores de velocidad del paso de tiempo anterior. En este caso la contribución sería $s_0 V_0 \mathbf{v}_0$.

Para la discretización implícita, la contribución en la matriz se representa como

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} -s_1 V_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -s_2 V_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -s_3 V_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -s_n V_n \end{bmatrix}, \quad (\text{C.14})$$

siendo n el número total de celdas en la malla. La contribución del término fuente aparece en la diagonal porque el tratamiento implícito modifica el coeficiente que relaciona el valor de la variable en una celda consigo misma.

Para la discretización explícita, la contribución en el lado derecho de la ecuación matricial se expresa como

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} s_1 V_1 \mathbf{v}_1 \\ s_2 V_2 \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ s_n V_n \mathbf{v}_n \end{bmatrix}. \quad (\text{C.15})$$

La elección entre estos métodos de discretización depende de la dominancia diagonal. Si s es positivo, el término sV también lo será, lo que incrementa la dominancia diagonal y mejora la estabilidad del sistema, favoreciendo la discretización implícita. En cambio, si s es negativo, la discretización implícita podría reducir la estabilidad, por lo que en estos casos se prefiere el tratamiento explícito.

Los términos de convección y difusión requieren un tratamiento especial, ya que contienen al operador divergencia. Para integrar estos términos se utiliza el teorema de la divergencia³².

Aplicándolo al término convectivo, se tiene³³

$$\int_V [\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})] dV = \int_S [\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] dS. \quad (\text{C.16})$$

El término $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dS$ representa el flujo volumétrico que sale de la superficie de la celda en ese punto, y es el responsable del transporte de una propiedad (en este caso, la velocidad). Esta ecuación describe cómo el flujo de entrada y de salida de la velocidad a través de las fronteras de la celda afecta la distribución de la velocidad dentro del volumen.

Dado que la celda tiene un número finito de caras, la integral de superficie se expresa como la suma de las contribuciones de cada cara

$$\int_S [\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] dS = \sum_{i=1}^m \int_{S_i} \mathbf{v}_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i) dS_i, \quad (\text{C.17})$$

donde m es el número de caras de la celda y \mathbf{n}_i el vector normal de la i -ésima cara.

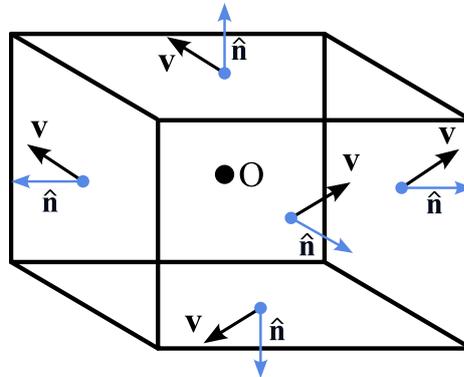


Figura C.3. Para resolver el término convectivo, se recorre cada una de las caras de la celda y se resuelve la integral del flujo de velocidad.

Para simplificar la evaluación del término convectivo, se introduce la siguiente aproximación. En lugar de integrar el producto de la velocidad y el flujo volumétrico sobre cada cara de la celda, se evalúa la velocidad en el centro de cada cara. Con esta aproximación, la integral se expresa mediante la siguiente sumatoria

$$\sum_{i=1}^m \int_{S_i} \mathbf{v}_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i) dS_i \approx \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_{fi} (\mathbf{v}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}) S_{fi}, \quad (\text{C.18})$$

donde \mathbf{v}_{fi} es la velocidad en el centro de la i -ésima cara, \mathbf{n}_{fi} es el vector normal unitario a la cara, y S_{fi} es su área. La sumatoria se realiza sobre las m caras de la celda. Por ejemplo, en una celda hexaédrica, la sumatoria constaría de seis términos, uno por cada cara.

Para evaluar cada uno de estos términos, es necesario conocer el valor de la velocidad en el centro de cada cara. Sin embargo, en el FVM, los valores de las variables se almacenan en los centros de las celdas, no en sus caras. Por lo tanto, se requiere un método de interpolación para

³² Sea U una región sólida acotada por una superficie S . Si \mathbf{F} es un campo vectorial continuamente diferenciable en un entorno de U , entonces

$$\iint_{\partial U} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_U \nabla \cdot \mathbf{F} dV,$$

donde $S = \partial U$.

³³ Nótese que se ha aplicado la siguiente propiedad del producto diádico
 $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$.

estimar estos valores, utilizando los datos conocidos en los centros de las celdas vecinas y de la celda propietaria, como se ilustra en la **Figura C.4**.

Uno de los esquemas de interpolación más comunes es el esquema lineal, que aproxima el valor en la cara como una combinación ponderada de los valores en las celdas adyacentes. Sin embargo, los códigos de CFD ofrecen una gran variedad de esquemas de interpolación, cada uno con características y limitaciones. Algunos de los más utilizados incluyen:

- Interpolación lineal: suaviza las variaciones en la solución, pero puede generar oscilaciones numéricas en problemas con gradientes pronunciados.
- Interpolación *upwind*: se basa en la dirección del flujo y ofrece mayor estabilidad, aunque introduce mayor difusión numérica.
- Esquemas de segundo orden: proporcionan mayor precisión al considerar términos adicionales en la interpolación.

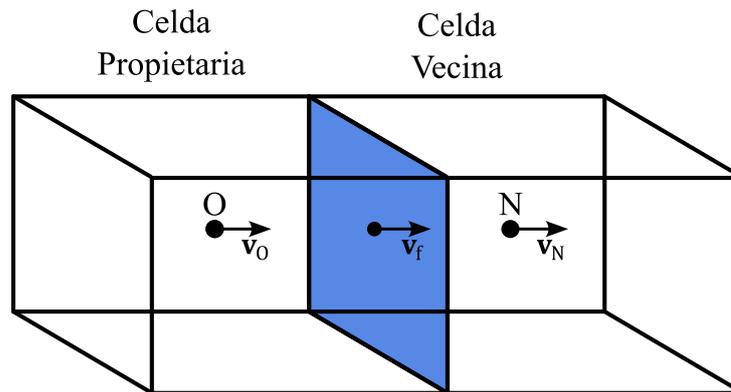


Figura C.4. En cada una de las celdas, solo se conoce el valor de la propiedad en el centroide. Para evaluar las integrales de superficie del término convectivo y de difusión, se requiere un método de interpolación para determinar el valor de la propiedad en el centro de la cara de la celda \mathbf{v}_f a partir del valor en los centroides \mathbf{v}_O y \mathbf{v}_N .

Para incorporar la contribución del término convectivo en la matriz \mathcal{M} , se considera que la velocidad en la cara \mathbf{v}_f (**Figura C.4**) se calcula como una combinación ponderada de los valores \mathbf{v}_O y \mathbf{v}_N , según el esquema de integración elegido.

En la matriz del sistema, la influencia de las celdas vecinas se refleja en los coeficientes fuera de la diagonal principal, mientras que la celda en la que se resuelve la ecuación se ve afectada a través del coeficiente de la diagonal principal. La matriz resultante tiene la forma

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{23} & m_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.19})$$

donde m_{ii} representa el coeficiente de la diagonal principal asociado a la i -ésima celda, y m_{ij} representa los coeficientes fuera de la diagonal, que indican la influencia de la j -ésima celda sobre la i -ésima.

Cada fila de la matriz, correspondiente a una celda, tendrá elementos no nulos en función de las celdas vecinas con las que interactúa a través de las caras. En una malla hexaédrica perfecta, cada celda tendría un valor en la diagonal principal y seis valores fuera de ella. Sin embargo, en las mallas no estructuradas, la cantidad de términos no nulos puede variar debido a la geometría de la malla y al esquema de discretización utilizado.

Para discretizar el término de difusión, primero se rescribe como³⁴

³⁴ El laplaciano de un vector \mathbf{v} puede describirse como

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}).$$

$$\int_V \mu \nabla^2 \mathbf{v} \, dV = \int_V [\nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v})] \, dV, \quad (\text{C.20})$$

donde μ se considera constante.

A partir de esta ecuación, se aplica el teorema de la divergencia para transformar la integral de volumen en una integral de superficie

$$\int_V [\nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v})] \, dV = \int_S [\mu (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \, dS. \quad (\text{C.21})$$

La integral de superficie se discretiza aproximando el gradiente de velocidad en el centro de la cara, asumiendo una variación lineal dentro de la celda. Esto permite expresar la integral como una sumatoria sobre todas las caras de la celda

$$\int_S [\mu (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \, dS \approx \sum_{i=1}^m [\mu_{fi} (\nabla \mathbf{v})_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}] S_{fi}, \quad (\text{C.22})$$

donde μ_{fi} es la viscosidad cinemática en el centro de la i -ésima cara, y $\nabla \mathbf{v}_{fi}$ es el gradiente de velocidad en dicha cara. Esta ecuación relaciona el flujo difusivo con el gradiente de la propiedad transportada. La viscosidad cinemática en el centro de cada cara se puede obtener a partir de algún esquema de interpolación.

La dificultad del término de difusión radica en evaluar el producto del gradiente de velocidad en la cara de la celda y el vector normal. En la **Figura C.5** se muestra una celda propietaria y una celda vecina. Se conoce el valor de velocidad en el centro de ambas celdas, así como el vector normal. Sin embargo, el gradiente de velocidad en el centro de la cara es desconocido, y al igual que el término convectivo, requiere interpolación. Al igual que con la velocidad, existen varios esquemas de interpolación para estimar el gradiente de velocidad en la cara, como la interpolación lineal o esquemas de segundo orden.

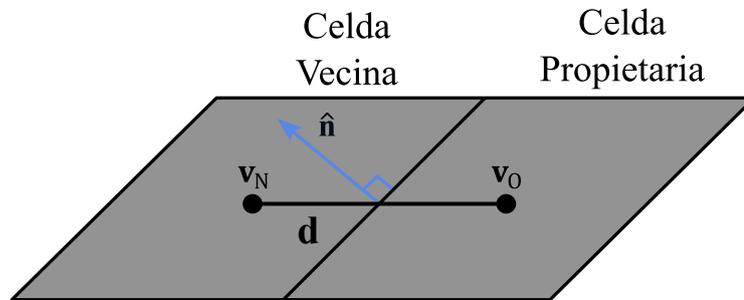


Figura C.5. Por lo general, la normal a la cara que comparten dos celdas no es paralela a la línea que une los centroides, lo que se conoce como no ortogonalidad. El ángulo de no ortogonalidad se define como el ángulo formado entre el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ y el vector \mathbf{d} . Una cara perfectamente ortogonal tiene un ángulo igual a cero.

Además, surge una dificultad en cómo calcular el producto escalar entre el gradiente de velocidad y el vector normal a la cara. Si el vector normal fuera paralelo al vector que une los centroides \mathbf{d} de las celdas adyacentes, entonces el producto escalar podría evaluarse simplemente como

$$(\nabla \mathbf{v})_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi} = \frac{\|\mathbf{v}_O\| - \|\mathbf{v}_N\|}{\|\mathbf{d}\|} \|\hat{\mathbf{n}}\|. \quad (\text{C.23})$$

Sin embargo, en las mayorías de las mallas, el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ generalmente no es paralelo al vector \mathbf{d} , lo que introduce el problema de la no ortogonalidad. Como se ilustra en la **Figura C.5**, esta desalineación impide usar directamente la magnitud del vector normal para evaluar el producto escalar. En este caso, el vector normal se descompone en una componente ortogonal

Δ , paralela al vector \mathbf{d} , y una componente no ortogonal \mathbf{k} , paralela a la cara compartida por las dos celdas, tal como se muestra en la **Figura C.6**.

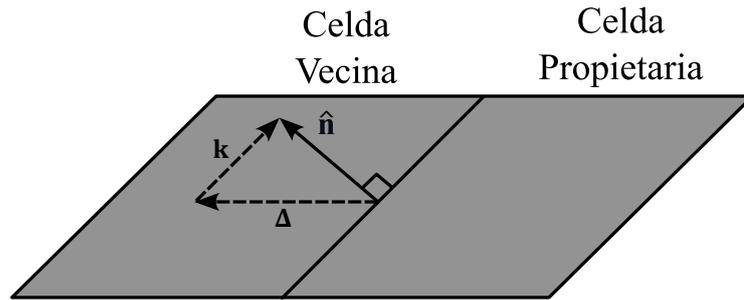


Figura C.6. Descomposición del vector normal de la celda propietaria en dos componentes: Δ , que representa la contribución alineada con la dirección del gradiente, y \mathbf{k} , que representa la desviación del vector normal con respecto a la dirección de \mathbf{d} .

Si sustituimos esta descomposición del vector normal en la Ecuación (C.22) y reordenando los términos, se obtiene

$$\sum_{i=1}^m [\mu_{fi}(\nabla \mathbf{v})_{fi} \cdot (\Delta + \mathbf{k})_{fi}] S_{fi}, \quad (\text{C.24})$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^m [\mu_{fi}(\nabla \mathbf{v})_{fi} \cdot \Delta_{fi}] S_{fi}}_{\text{Término implícito}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m [\mu_{fi}(\nabla \mathbf{v})_{fi} \cdot \mathbf{k}_{fi}] S_{fi}}_{\text{Término explícito}}. \quad (\text{C.25})$$

Ahora la ecuación se ha dividido en dos términos: un término implícito que contiene la contribución ortogonal del término de difusión y un término explícito que representa la contribución no ortogonal. Esta separación es ventajosa, porque permite evaluar cada término por separado antes de combinarlos para obtener la contribución total. La no ortogonalidad de la malla afecta la precisión y estabilidad de los cálculos. Existen métodos comunes para corregir la no ortogonalidad, como el uso de esquemas de corrección explícitos o implícitos.

El término implícito se evalúa a partir de la Ecuación (C.23) reemplazando el vector normal por la componente paralela al vector \mathbf{d} y se trata directamente dentro de la matriz \mathcal{M} . Esto contribuye a la estabilidad del sistema, ya que los valores de velocidad son desconocidos y se resuelven simultáneamente con el resto del sistema de ecuaciones.

En cambio, el término explícito se evalúa utilizando el campo de velocidad de la iteración previa o de las condiciones iniciales. Este término se agrega como una contribución al lado derecho del sistema. Sin embargo, tiende a aumentar la inestabilidad del sistema, ocasionando que sea más probable que el sistema diverja. Por este motivo, se busca minimizar la contribución no ortogonal en el sistema disminuyendo los ángulos de no ortogonalidad de la malla.

De esta manera, se ha demostrado cómo los términos discretizados contribuyen ya sea a la matriz de coeficientes \mathcal{M} o al vector del lado derecho \mathbf{B} . Por último, el sistema matricial toma la forma $\mathcal{M}\mathbf{v} = \mathbf{B}$, el cual puede resolverse usando un algoritmo iterativo adecuado, como los mencionados en el Capítulo 3.

D MÉTODOS NUMÉRICOS EN FEM

D.1 MÉTODO α

El método α es un método utilizado en el análisis dinámico para resolver las ecuaciones de movimiento en el dominio espacio-tiempo, permitiendo una evaluación directa de la respuesta dinámica de estructuras complejas bajo la influencia de cargas variables en el tiempo. Este

método, que se presenta como una evolución del algoritmo de Newmark, se caracteriza por su capacidad para mejorar la disipación de las altas frecuencias que suelen ser menos precisas debido a la discretización espacial del modelo de FEM.

La formulación implícita del método α para problemas lineales se basa en la ecuación de movimiento discretizada que se mencionó en el Capítulo 4

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}, \quad (\text{D1})$$

o en su forma más general

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}, \quad (\text{D2})$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez, \mathbf{M} la matriz de masas, \mathbf{C} la matriz de amortiguamiento y \mathbf{F} el vector de cargas externas y \mathbf{u} el vector de desplazamiento.

En este método, la discretización temporal se realiza mediante diferencias finitas. Esto hace referencia a que las variables se calculan en tiempos discretos, $t = t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots$. Para un punto material en particular, la integración de la velocidad entre los tiempos t_n y t_{n+1}

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}, \quad (\text{D3})$$

produce

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{a}(\xi) d\xi. \quad (\text{D4})$$

La integral de la Ecuación (D4) no puede resolverse dado que \mathbf{a} es desconocida, exceptuando en los límites de integración. Sin embargo, es posible aproximar la aceleración $\mathbf{a}(\xi)$ como una combinación lineal de estos valores, tal como

$$\mathbf{a}(t) \approx (1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}, t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (\text{D5})$$

Reemplazando esta expresión en la Ecuación (D4) e integrando

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t[(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}], \quad (\text{D6})$$

siendo γ un escalar y $\Delta t = t_{n+1} - t_n$.

Aplicando el mismo procedimiento para el desplazamiento \mathbf{u}

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}, \quad (\text{D7})$$

se tiene

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{v}(\eta) d\eta. \quad (\text{D8})$$

Sustituyendo la velocidad por la Ecuación (D4)

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n \Delta t + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{a}(\xi) d\xi d\eta. \quad (\text{D9})$$

Tal como en la Ecuación (D5), se asume que la aceleración de la ecuación anterior se puede expresar como una combinación lineal de \mathbf{a}_n y \mathbf{a}_{n+1}

$$\mathbf{a}_{n+1} = (1 - 2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}, t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (\text{D10})$$

Esta expresión no necesariamente es igual a la Ecuación (D5), es decir, $2\beta \neq \gamma$. Si se introduce esta expresión en la Ecuación (D9) e integrando

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n \Delta t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2[(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}]. \quad (\text{D11})$$

La Ecuación (D2) tiene que satisfacerse, por lo tanto

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}. \quad (\text{D12})$$

Si se sustituyen las Ecuaciones (D6) y (D11) en la Ecuación (D12) se obtiene el algoritmo de Newmark. Sin embargo, la experiencia ha demostrado que la disipación a alta frecuencia puede mejorarse si todos los términos de la Ecuación (D12), a excepción del primero, se evalúan en una posición intermedia entre t_n y t_{n+1}

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + (1 + \alpha)\mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} - \alpha\mathbf{C}\mathbf{v}_n + (1 + \alpha)\mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} - \alpha\mathbf{K}\mathbf{u}_n = (1 + \alpha)\mathbf{F}_{n+1} - \alpha\mathbf{F}_n, \quad (\text{D13})$$

en donde $-1 \leq \alpha \leq 0$.

Los términos de rigidez y de fricción pueden considerarse como fuerzas internas

$$\mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}} = \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1}. \quad (\text{D14})$$

Entonces, la Ecuación (D13) queda

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + (1 + \alpha)\mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}} - \alpha\mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}} = (1 + \alpha)\mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \alpha\mathbf{F}_n^{\text{ext}}. \quad (\text{D15})$$

Sustituyendo las Ecuaciones (D6) y (D11) en la Ecuación (D15) se obtiene el método α . Se puede demostrar que si los parámetros α y β satisfacen

$$\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2, \quad (\text{D16})$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha, \quad (\text{D17})$$

el algoritmo alcanza una precisión de segundo orden y es incondicionalmente estable para $\alpha \in [-1/3, 0]$. La disipación máxima de alta frecuencia se obtiene para $\alpha = -1/3$. Para $\alpha = 0$, no hay disipación de alta frecuencia y el método se reduce al caso particular del método de Newmark.

Si definimos

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + (1 - \gamma)\Delta\mathbf{a}_n, \quad (\text{D18})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\mathbf{v}_n + \frac{1}{2}\Delta t^2(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n, \quad (\text{D19})$$

las Ecuaciones (D6) y (D11) quedan expresadas de la siguiente manera

$$\mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \gamma\Delta t\mathbf{a}_{n+1}, \quad (\text{D20})$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_{n+1} + \beta\Delta t^2\mathbf{a}_{n+1}. \quad (\text{D21})$$

Debido a que las cantidades $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}$ y $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}$ solo dependen de los valores de las variables en el tiempo t_n , pueden considerarse como valores predictores. Sustituyendo las Ecuaciones (D20) y (D21) en la Ecuación (D13) se obtiene

$$[\mathbf{M} + (1 + \alpha)\mathbf{C}\Delta t\gamma + (1 + \alpha)\mathbf{K}\Delta t^2\beta]\mathbf{a}_{n+1} + (1 + \alpha)\mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} - \alpha\mathbf{C}\mathbf{v}_n + (1 + \alpha)\mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} - \alpha\mathbf{K}\mathbf{u}_n = (1 + \alpha)\mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \alpha\mathbf{F}_n^{\text{ext}}, \quad (\text{D22})$$

lo cual es equivalente a

$$\mathbf{M}^*\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{F}, \quad (\text{D23})$$

donde

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + (1 + \alpha)\mathbf{C}\Delta t\gamma + (1 + \alpha)\mathbf{K}\Delta t^2\beta, \quad (\text{D24})$$

$$\mathbf{F} = (1 + \alpha)\mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \alpha\mathbf{F}_n^{\text{ext}} - (1 + \alpha)\tilde{\mathbf{F}}_{n+1}^{\text{int}} - \alpha\mathbf{F}_n^{\text{int}}, \quad (\text{D25})$$

$$\mathbf{F}_n^{\text{int}} = \mathbf{C}\mathbf{v}_n + \mathbf{K}\mathbf{u}_n, \quad (\text{D26})$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{n+1}^{\text{int}} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}. \quad (\text{D27})$$

Después de hallar \mathbf{a}_{n+1} a partir de la Ecuación (D23), se puede determinar \mathbf{v}_{n+1} y \mathbf{u}_{n+1} usando las Ecuaciones (D20) y (D21), respectivamente.

Este método se puede extender a aplicaciones no lineales³⁵ mediante la introducción de términos de rigidez y amortiguamiento dependientes del desplazamiento y la velocidad, respectivamente. La resolución de estas ecuaciones no lineales se realiza típicamente mediante procedimientos iterativos como el método de Newton-Raphson.

D.II DESPLAZAMIENTO QUE MINIMIZA EL RESIDUO

Con el fin de encontrar el desplazamiento en la energía potencial mínima, a menudo se utiliza un método de perturbación. Supongamos que el campo de desplazamiento \mathbf{u} es perturbado en la dirección de $\bar{\mathbf{u}}$ (arbitraria) y τ es el parámetro que controla el tamaño de la perturbación. El desplazamiento perturbado se denota por

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} + \tau\bar{\mathbf{u}}, \quad (\text{D28})$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ es el desplazamiento virtual en el principio del trabajo virtual. Entonces, la primera variación de la energía potencial se puede obtener tomando la variación de primer orden de $\Pi(\mathbf{u})$ en la dirección de $\bar{\mathbf{u}}$, como

$$\bar{\Pi}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) \equiv \frac{d}{d\tau} \Pi(\mathbf{u} + \tau\bar{\mathbf{u}})|_{\tau=0}, \quad (\text{D29})$$

donde el símbolo de la barra superior representa la variación de primer orden de una función. El proceso de variación es similar a la diferenciación de una función. Obsérvese que $\Pi(\mathbf{u})$ sólo depende del desplazamiento \mathbf{u} , mientras que $\bar{\Pi}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})$ depende tanto de \mathbf{u} como de su variación $\bar{\mathbf{u}}$.

Recordemos de la ecuación de balance que ésta dependía de los trabajos internos debido a las tensiones y los trabajos externos que dependían de las fuerzas externas. Éstas últimas son independientes de la variación $\bar{\mathbf{u}}$ y solo dependen de \mathbf{u} . En cambio, el trabajo interno es función de \mathbf{u} y $\bar{\mathbf{u}}$, y además, la relación entre este término y \mathbf{u} es no lineal. Es decir, que esta ecuación variacional no puede resolverse fácilmente debido a la no linealidad implicada en la relación desplazamiento-deformación del lado izquierdo de la ecuación. Una ecuación no lineal general puede resolverse utilizando un método iterativo Newton-Raphson mediante una secuencia de linealización. Supongamos que no se satisface el equilibrio en la ecuación anterior. Entonces, la diferencia entre los lados izquierdo y derecho después de linealizar se define como un residuo

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}, \quad (\text{D30})$$

donde \mathbf{F}_{ext} y \mathbf{F}_{int} son los trabajos externo e interno respectivamente. En el método Newton-Raphson, el jacobiano del residuo es necesario en cada iteración. Dado que el jacobiano en un problema unidimensional no es más que una recta tangente a la solución actual, suele denominarse rigidez tangente, y el proceso se llama linealización.

El término a la izquierda de la Ecuación (4.10) se puede linealizar y escribir como

$$\mathbf{L}[\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})] = \int \int_{\Omega_0} \Omega [\Delta\mathbf{S} : \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{S} : \Delta\bar{\mathbf{E}}] d\Omega, \quad (\text{D31})$$

donde $\Delta\mathbf{S}$ es el incremento de tensión y $\Delta\bar{\mathbf{E}}$ es el incremento de variación de deformación. Para el material de Saint Venant-Kirchhoff, la relación tensión-deformación es lineal y, por tanto, el incremento de tensión puede escribirse como

³⁵ Para ver el desarrollo de la extensión del método α a aplicaciones no lineales consultar [67].

$$\Delta \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} : \Delta \mathbf{E} = \mathbf{D} : \Delta \mathbf{E}, \quad (\text{D32})$$

donde \mathbf{D} es el tensor constitutivo de cuarto orden y $\Delta \mathbf{E}$ es el incremento de la deformación lagrangiana. Sabiendo de la Ecuación (4.2) que $\Delta \mathbf{F} = \nabla_0 \Delta \mathbf{u}$, el incremento de la deformación puede expresarse como

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = \text{sym}(\nabla_0 \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}), \quad (\text{D33})$$

y

$$\Delta \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = \text{sym}(\nabla_0 \Delta \bar{\mathbf{u}}^T \nabla_0 \Delta \mathbf{u}). \quad (\text{D34})$$

Así, la linealización de la forma de energía en la Ecuación (D31) puede ser explícitamente derivada con respecto al desplazamiento y su variación como

$$L[F_{\text{int}}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})] = \int \int_{\Omega_0} \Omega [\Delta \mathbf{S} : \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{S} : \Delta \bar{\mathbf{E}}] d\Omega \equiv F_{\text{int}}^*(\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}). \quad (\text{D35})$$

La notación $F_{\text{int}}^*(\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})$ se utiliza de manera que la forma depende implícitamente del desplazamiento total \mathbf{u} y es bilineal con respecto a $\Delta \mathbf{u}$ y $\bar{\mathbf{u}}$. El primer integrando de $F_{\text{int}}^*(\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})$ en la ecuación anterior depende de la relación tensión-deformación.

Sea t_n el paso de carga actual y k el contador de iteración actual. Suponiendo que las cargas aplicadas son independientes del desplazamiento, la ecuación incremental linealizada de la Ecuación (4.10) se obtiene como

$$F_{\text{int}}^*(\mathbf{u}_n^k; \Delta \mathbf{u}^k, \bar{\mathbf{u}}) = F_{\text{ext}}(\bar{\mathbf{u}}) - F_{\text{int}}(\mathbf{u}_n^k, \bar{\mathbf{u}}), \quad (\text{D36})$$

y el desplazamiento total se actualiza usando

$$\mathbf{u}_n^{k+1} = \mathbf{u}_n^k + \Delta \mathbf{u}^k. \quad (\text{D37})$$

Obsérvese que la Ecuación (D37) tiene la forma de $[K_n^k] \cdot \Delta \mathbf{u}^k = R_n^k$ tras la discretización mediante elementos finitos³⁶. La Ecuación (D37) se resuelve iterativamente hasta que el término residual desaparece, lo que significa que la Ecuación (4.10) no lineal es satisfecha.

³⁶ Para más información puede consultar [68]

REFERENCIAS

- [1] J. R. Cebral, M. A. Castro, S. Appanaboyina, C. M. Putman, D. Millan y A. F. Frangi, «Efficient pipeline for image-based patient-specific analysis of cerebral aneurysm hemodynamics: technique and sensitivity,» *IEEE transactions on medical imaging*, vol. 24, n° 4, pp. 457-467, 2005.
- [2] M. Meuschke, T. Günther, P. Berg, R. Wickenhöfer, B. Preim y K. Lawonn, «Visual analysis of aneurysm data using statistical graphics,» *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, vol. 25, n° 1, pp. 997-1007, 2018.
- [3] F. Bonneville, N. Sourour y A. Biondi, «Intracranial aneurysms: an overview,» *Neuroimaging Clinics*, vol. 16, n° 3, pp. 371-382, 2006.
- [4] R. D. Brown y J. P. Broderick, «Unruptured intracranial aneurysms: epidemiology, natural history, management options, and familial screening,» *The Lancet Neurology*, vol. 13, n° 4, pp. 393-404, 2014.
- [5] M. Clinic, «Mayo Clinic,» Fundación Mayo para la Educación y la Investigación Médicas, 1998. [En línea]. Available: <https://www.mayoclinic.org/es/diseases-conditions/brain-aneurysm/symptoms-causes/syc-20361483>. [Último acceso: 18 02 2025].
- [6] Ž. Bizjak y Ž. Špiclin, «A systematic review of deep-learning methods for intracranial aneurysm detection in CT angiography,» *Biomedicines*, vol. 11, n° 11, p. 2921, 2023.
- [7] J. M. Wardlaw y P. M. White, «The detection and management of unruptured intracranial aneurysms,» *Brain*, vol. 123, n° 2, pp. 205-221, 2000.
- [8] J. Huang y J. M. Van Gelder, «The probability of sudden death from rupture of intracranial aneurysms: a meta-analysis,» *Neurosurgery*, vol. 51, n° 5, pp. 1101-1107, 2002.
- [9] A. Lagares, P. A. Gómez, J. F. Alén, F. Arikian, R. Sarabia, A. Horcajadas, ... y J. Vilalta, «Hemorragia subaracnoidea aneurismática: guía de tratamiento del Grupo de Patología Vasculare de la Sociedad Española de Neurocirugía,» *Neurocirugía*, vol. 22, n° 2, pp. 93-115, 2011.
- [10] M. V. Springer, J. M. Schmidt, K. E. Wartenberg, J. A. Frontera, N. Badjatia y S. A. Mayer, «Predictors of global cognitive impairment 1 year after subarachnoid hemorrhage,» *Neurosurgery*, vol. 65, n° 6, pp. 1043-1051, 2009.
- [11] P. N. Karamanakos, M. von und zu Fraunberg, S. Bendel, T. Huttunen, M. Kurki, J. Hernesniemi, ... y T. Koivisto, «Risk factors for three phases of 12-month mortality in 1657 patients from a defined population after acute aneurysmal subarachnoid hemorrhage,» *World neurosurgery*, vol. 78, n° 6, pp. 631-639, 2012.
- [12] D. e. team, «Drugs,» 02 2025. [En línea]. Available: https://www.drugs.com/cg_esp/aneurisma-cerebral-sin-ruptura.html. [Último acceso: 19 02 2025].

- [13] W. J. Van Rooij y M. Sluzewski, «Procedural morbidity and mortality of elective coil treatment of unruptured intracranial aneurysms,» *American journal of neuroradiology*, vol. 27, n° 8, pp. 1678-1680, 2006.
- [14] A. E. Lindgren, T. Koivisto, J. Björkman, M. von und zu Fraunberg, K. Helin, J. E. Jääskeläinen y J. Frösen, «Irregular shape of intracranial aneurysm indicates rupture risk irrespective of size in a population-based cohort.,» *Stroke*, vol. 47, n° 5, pp. 1219-1226, 2016.
- [15] J. R. Cebal, M. Vazquez, D. M. Sforza, G. Houzeaux, S. Tatehima, E. Scrivano, ... y C. M. Putman, «Analysis of hemodynamics and wall mechanics at sites of cerebral aneurysm rupture,» *Journal of NeuroInterventional Surgery*, vol. 7, n° 7, pp. 530-536, 2015.
- [16] D. M. Sforza, C. M. Putman y J. R. Cebal, «Hemodynamics of cerebral aneurysms,» *Annual review of fluid mechanics*, vol. 41, n° 1, pp. 91-107, 2009.
- [17] A. Goetz, P. Jeken-Rico, Y. Chau, J. Sédat, A. Larcher y E. Hachem, «Analysis of Intracranial Aneurysm Haemodynamics Altered by Wall Movement,» *Bioengineering*, vol. 11, n° 3, p. 269, 2024.
- [18] R. R. Lall, C. S. Eddleman, B. R. Bendok y H. H. Batjer, «Unruptured intracranial aneurysms and the assessment of rupture risk based on anatomical and morphological factors: sifting through the sands of data,» *Neurosurgical focus*, vol. 26, n° 5, p. E2, 2009.
- [19] I. Oliveira, «On the mechanics of intracranial aneurysms walls: Numerical assessment of the influence of tissue hyperelastic laws and heterogeneity and the major role played by curvature on pathways to rupture,» Ilha Solteira, 2022.
- [20] M.-C. Hsu y Y. Bazilevs, «Blood vessel tissue prestress modeling for vascular fluid–structure interaction simulation,» *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 47, n° 6, pp. 593-599, 2011.
- [21] Y. Bazilevs, M. C. Hsu, Y. A. Zhang, W. Wang, X. Liang, T. Kvamsdal, ... y J. G. Isaksen, «A fully-coupled fluid-structure interaction simulation of cerebral aneurysms,» *Computational mechanics*, vol. 46, pp. 3-16, 2010.
- [22] C. A. Figueroa, I. E. Vignon-Clementel, K. E. Jansen, T. J. Hughes y C. A. Taylor, «A coupled momentum method for modeling blood flow in three-dimensional deformable arteries,» *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 195, n° 41-43, pp. 5685-5706, 2006.
- [23] K. Takizawa, C. Moorman, S. Wright, J. Purdue, T. McPhail, P. R. Chen, ... y T. E. Tezduyar, «Patient-specific arterial fluid–structure interaction modeling of cerebral aneurysms,» *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 65, n° 1-3, pp. 308-323, 2011.
- [24] L. T. Lai y A. H. O'Neill, «History, evolution, and continuing innovations of intracranial aneurysm surgery.,» *World Neurosurgery*, vol. 102, pp. 673-681, 2017.
- [25] L. M. Vartabedian, «Análisis de estado y propuesta de implementación de sistemas pacs y ris en cuatro hospitales nivel III del Ministerio de Salud de CABA,» Ciudad Autónoma de Buenos Aires, 2023.
- [26] C. Maupu, H. Lebas y Y. Boulaftali, «Imaging Modalities for Intracranial Aneurysm: More Than Meets the Eye,» *Frontiers in Cardiovascular Medicine*, vol. 9, 2022.

- [27] «Materiales de Contraste,» [En línea]. Available: <https://www.radiologyinfo.org/es/info/safety-contrast>. [Último acceso: 7 Junio 2025].
- [28] J. Pineda, P. Abad, S. Mesa, S. Rascovsky y J. Delgado, «Aplicación clínica de la técnica 4D Flow en la evaluación hemodinámica de cardiopatías congénitas,» *Rev. Colomb. Radiol.*, vol. 29, n° 2, pp. 4901-4907, 2018.
- [29] P. K. Kundu y I. M. Cohen, *Fluid Mechanics: Fourth Edition*, USA: Academic Press, 2008.
- [30] N. Etminan, R. Dreier, B. A. Buchholz, K. Beseoglu, P. Bruckner, C. Matzenauer y R. L. Macdonald, «Age of collagen in intracranial saccular aneurysms,» *Stroke*, vol. 45, n° 6, pp. 1757-1763, 2014.
- [31] Y. C. Fung, *Biomechanics: mechanical properties of living tissues*, New York: Springer Science & Business Media, 2013.
- [32] S. Scott, G. G. Ferguson y M. R. Roach, «Comparison of the elastic properties of human intracranial arteries and aneurysms,» *Canadian journal of physiology and pharmacology*, vol. 40, n° 4, pp. 328-332, 1972.
- [33] H. J. Steiger, R. Aaslid, S. Keller y H. J. Reulen, «Strength, elasticity and viscoelastic properties of cerebral aneurysms,» *Heart and vessels*, vol. 5, pp. 41-46, 1989.
- [34] A. M. Robertson, X. Duan, K. M. Aziz, M. R. Hill, S. C. Watkins y J. R. Cebral, «Diversity in the Strength and Structure of Unruptured Cerebral,» *Annals of biomedical engineering*, vol. 43, pp. 1502-1515, 2015.
- [35] J. Cebral, X. Duan, B. Chung, C. Putman, K. Aziz y A. Robertson, «Wall Mechanical Properties and Hemodynamics of Unruptured Intracranial Aneurysms,» *American Journal of Neuroradiology*, vol. 36, n° 9, pp. 1695-1703, 2015.
- [36] D. Nakagawa, M. Shojima, M. Yoshino, T. Kin, H. Imai, S. Nomura y N. Saito, «Wall-to-lumen ratio of intracranial arteries measured by indocyanine green angiography,» *Asian journal of neurosurgery*, vol. 11, n° 4, pp. 361-364, 2016.
- [37] R. Kleinloog, E. Korkmaz, J. J. Zwanenburg, H. J. Kuijff, ... y B. H. Verweij, «Visualization of the aneurysm wall: a 7.0-tesla magnetic resonance imaging study,» *Neurosurgery*, vol. 75, n° 6, pp. 614-622, 2014.
- [38] F. Signorelli, C. Pailler-Mattei, B. Gory, P. Larquet, P. Robinson, R. Vargiolu y F. Turjman, «Biomechanical characterization of intracranial aneurysm wall: a multiscale study,» *World neurosurgery*, vol. 119, pp. e882-e889, 2018.
- [39] D. W. Laurence, H. Homburg, F. Yan, Q. Tang, K. M. Fung, B. N. Bohnstedt, ... y C. H. Lee, «A pilot study on biaxial mechanical, collagen microstructural, and morphological characterizations of a resected human intracranial aneurysm tissue,» *Scientific reports*, vol. 11, n° 1, p. 3525, 2021.
- [40] R. D. Millán, N. Muzi y I. Ferrari, «Biomecánica de aneurismas cerebrales mediante teoría de Kirchoff-Love,» 2019.
- [41] Y. Cengel y J. Cimbala, *Fluid mechanics fundamentals and applications*, McGraw Hill, 2013.

- [42] M. D. Ford, N. Alperin, S. H. Lee, D. W. Holdsworth y D. A. Steinman, «Characterization of volumetric flow rate waveforms in the normal internal carotid and vertebral arteries,» *Physiological measurement*, vol. 26, n° 4, p. 477, 2005.
- [43] S. A. Mahrous, N. A. C. Sidik y K. M. Saqr, «Newtonian and non-Newtonian CFD models of intracranial aneurysm: a review,» *CFD Letters*, vol. 12, n° 1, pp. 62-86, 2020.
- [44] C. Greenshields y H. Weller, *Notes on Computational Fluid Dynamics: General Principles*, Reading, UK: CFD Direct Ltd, 2022.
- [45] H. G. Morales, I. Larrabide, A. J. Geers, M. L. Aguilar y A. F. Frangi, «Newtonian and non-Newtonian blood flow in coiled cerebral aneurysms,» *Journal of biomechanics*, vol. 46, n° 13, pp. 2158-2164, 2013.
- [46] Wikipedia, «Material de Saint-Venant–Kirchhoff,» [En línea]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Material_de_Saint-Venant–Kirchhoff. [Último acceso: 16 Febrero 2025].
- [47] Wikipedia, «Material de Mooney-Rivlin,» [En línea]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Material_de_Mooney-Rivlin. [Último acceso: 16 Febrero 2025].
- [48] M. Gee, C. Förster y W. A. Wall, «A computational strategy for prestressing patient-specific biomechanical problems under finite deformation,» *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, vol. 26, n° 1, pp. 52-72, 2010.
- [49] N. Muzi, L. Moyano y D. Millán, «Kirchoff-Love thin-shells prestressed state estimation by MULF: application to intracranial aneurysms,» de *MECOM*, Rosario, 2024.
- [50] G. Chourdakis, K. Davis, B. Rodenberg, M. Schulte, F. Simonis, B. Uekermann, ... y O. Z. Koseomur, «preCICE v2: A sustainable and user-friendly coupling library,» *Open Research Europe*, vol. 2, 2022.
- [51] A. Eken y M. Sahin, «A parallel monolithic algorithm for the numerical simulation of large-scale fluid structure interaction problems,» *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 80, n° 12, pp. 687-714, 2016.
- [52] A. Lozovskiy, M. A. Olshanskii y Y. V. Vassilevski, «Analysis and assessment of a monolithic FSI finite element method,» *Computers & Fluids*, vol. 179, pp. 277-288, 2019.
- [53] P. B. Ryzhakov, J. Marti y N. Dialami, «A unified arbitrary Lagrangian–Eulerian model for fluid–structure interaction problems involving flows in flexible channels,» *Journal of Scientific Computing*, vol. 90, n° 3, p. 85, 2022.
- [54] R. Torii, M. Oshima, T. Kobayashi, K. Takagi y T. E. Tezduyar, «Fluid–structure interaction modeling of a patient-specific cerebral aneurysm: influence of structural modeling,» *Computational Mechanics*, vol. 43, pp. 151-159, 2008.
- [55] M. Mehl, B. Uekermann, H. Bijl, D. Blom, B. Gatzhammer y A. Van Zuijlen, «Parallel coupling numerics for partitioned fluid–structure interaction simulations,» *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 71, n° 4, pp. 869-891, 2016.
- [56] P. R. Hoskins y D. R. Hose, «The arterial system I. Pressure, flow and stiffness,» *In Cardiovascular Biomechanics*, pp. 65-81, 2017.

- [57] P. Moireau, N. Xiao, M. Astorino, C. A. Figueroa, D. Chapelle, C. A. Taylor y J. F. Gerbeau, «External tissue support and fluid–structure simulation in blood flows,» *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, vol. 11, pp. 1-18, 2012.
- [58] O. Foundation, «OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox,» 24 Diciembre 2024. [En línea]. Available: <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide>. [Último acceso: 6 Junio 2025].
- [59] H. A. Baieth, «Physical parameters of blood as a non-Newtonian fluid,» *International journal of biomedical science: IJBS*, vol. 4, nº 4, p. 323, 2008.
- [60] F. Irgens, *Rheology and non-newtonian fluids*, New York: Springer International Publishing, 2014.
- [61] M. Sellier, «An iterative method for the inverse elasto-static problem,» *Journal of Fluids and Structures*, vol. 27, nº 8, pp. 1461-1470, 2011.
- [62] «Aneurisma cerebral,» Mayo Clinic, 12 Mayo 2023. [En línea]. Available: <https://www.mayoclinic.org/es/diseases-conditions/brain-aneurysm/symptoms-causes/syc-20361483>. [Último acceso: 17 Febrero 2025].
- [63] «Redes neuronales informadas por la física (PINN),» MathWorks, [En línea]. Available: <https://la.mathworks.com/discovery/physics-informed-neural-networks.html>. [Último acceso: 18 Febrero 2025].
- [64] N. Nama, M. Aguirre, J. D. Humphrey y A. Figueroa, «A nonlinear rotation-free shell formulation with prestressing for vascular biomechanics,» *Scientific Reports*, vol. 10, nº 1, p. 17428, 2020.
- [65] I. Husain, F. Labropulu, C. Langdon y J. Schwark, «A comparison of Newtonian and non-Newtonian models for pulsatile blood flow simulations,» *Journal of the Mechanical Behaviour of Materials*, vol. 21, nº 5-6, pp. 147-153, 2013.
- [66] A. F. Bower, *Applied mechanics of solids*, New York: CRC press, 2009.
- [67] G. Dhondt, *The finite element method for three-dimensional thermomechanical applications*, John Wiley & Sons, 2004.
- [68] N.-H. Kim, *Introduction to nonlinear finite element analysis*, Springer Science & Business Media, 2014.